

Третий адиабатический инвариант и бесстолкновительная функция распределения ансамбля частиц в токамаке

В. И. Ильгисонис¹⁾, Е. А. Сорокина

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Российский университет дружбы народов, 117198 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 сентября 2011 г.

После переработки 26 сентября 2011 г.

Показано, что в бесстолкновительном режиме функция распределения ансамбля частиц с заданной энергией в токамаке естественно формируется как функция преимущественно третьего адиабатического инварианта, особенно в приосевой области. На периферии плазменного шнура становится заметным вклад в функцию распределения тороидальной компоненты канонического импульса/продольного адиабатического инварианта. Характер зависимости функции распределения ансамбля от координат в пространстве скоростей главным образом определяется траекториями движения заряженных частиц.

Динамика функции распределения ансамбля заряженных частиц в магнитном, $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, и электрическом, $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, полях описывается стандартным кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \left(\frac{df}{dt} \right)_t + \text{St}[f] + S, \quad (1)$$

где $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ – одночастичная функция распределения как функция координаты \mathbf{r} , скорости \mathbf{v} и времени t ;

$$\left(\frac{df}{dt} \right)_t = \mathbf{v} \nabla f + \frac{Ze}{m} \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} + \mathbf{E} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \quad (2)$$

есть скорость изменения f вдоль фазовых траекторий частиц; e – элементарный заряд, Z – зарядовое число, а m – масса частицы ансамбля; St – оператор столкновений, S – плотность источников/стоков частиц ансамбля в фазовом объеме. В высокотемпературной плазме токамака правая часть уравнения (1) учитывает совокупность процессов существенно различных временных масштабов. Первый член описывает возможные модуляции f с характерными временами движения частиц вдоль траекторий, связанные с неоднородностью f в фазовом пространстве. Характерное время столкновений τ_{st} в плазме токамака обычно заметно превышает эти времена, но может быть короче времени жизни τ_s частиц ансамбля. В отсутствие источников/стоков столкновения стремились бы максвеллизировать функцию распределения, сделав ее изотропной и однородной в \mathbf{r} -пространстве. Именно благодаря присутствию S в правой части (1) могут реализоваться неоднородные в конфигурационном и в скоростном пространствах решения кинетического уравнения, в том числе стационарные,

хотя отношение данного члена к столкновительному формально мало как τ_{st}/τ_s . Аналогичным образом присутствие S способно порождать неоднородные и анизотропные распределения и на временах, много меньших τ_{st} . Эта ситуация и является предметом анализа настоящей работы. При этом нас не будут интересовать осцилляции f с характерными “траекторными” временами. По ним будет проводиться усреднение, процедура которого описана ниже.

Классическим методом решения кинетического уравнения в случае редких соударений является теория возмущений, применяемая, в частности, для расчета неоклассических коэффициентов переноса [1]. Малым параметром служит отношение характерного времени движения частицы вдоль траектории ко времени столкновений. В нулевом приближении столкновениями пренебрегают и кинетическое уравнение (1) описывает постоянство функции распределения на траекториях движения частиц ансамбля:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \left(\frac{df_0}{dt} \right)_t \approx 0. \quad (3)$$

В стационаре для заданного электромагнитного поля решением уравнения (3) является любая функция интегралов движения. Поэтому в выборе функции распределения нулевого порядка f_0 остается большой произвол. Конкретизируют вид f_0 из условия разрешимости кинетического уравнения (1) в первом порядке теории возмущений (см., например, [2, 3]). При этом в силу интегрального характера условия разрешимости вышеуказанный произвол устраняется не полностью и выявление преимущественной зависимости f от того или иного инварианта мотивируется какими-либо дополнительными соображениями. К тому же конкретный вид функции распределения ну-

¹⁾ e-mail: vil@nfi.kiae.ru

левого порядка оказывается чувствителен к виду интеграла столкновений. Поскольку траектории запертых и пролетных частиц весьма различны, функции распределения запертых (f_t) и пролетных (f_u) частиц находятся по отдельности, в переходной области производится их сшивка и результирующая f здесь оказывается сильно пикированной или имеет характерный зубец (ниже будет рассматриваться только функция нулевого порядка, так что индекс "0" будем опускать). Показательная зависимость функции распределения ансамбля α -частиц от косинуса питч-угла представлена в работах [4] (f на периферии плазменного шнура) и [5] (f на магнитной оси токамака).

Для заряженной частицы, движущейся в осесимметричном тороидально-винтовом поле токамака, справедливы два точных закона сохранения: сохранение энергии частицы, $\epsilon = mv^2/2 + Ze\Phi$ (Φ – потенциал электрического поля); сохранение тороидальной компоненты канонического импульса, $J = mrv_\varphi + eZrA_\varphi/c$ ($A_\varphi = -B_0\Psi/r$ – тороидальная компонента векторного потенциала; здесь введена стандартная цилиндрическая система координат $\{r, \varphi, z\}$, связанная с геометрическим центром токамака, а магнитное поле представлено в виде $\mathbf{B}/B_0 = [\nabla\varphi, \nabla\Psi] + R\nabla\varphi$, где R – большой радиус токамака, B_0 – поле на магнитной оси токамака). Помимо этого, движение частицы в магнитном поле токамака является условно-периодическим и, следовательно, характеризуется сохранением адиабатических инвариантов вида $\oint p_q dq$, где q – координата такого движения, почти периодическая во времени, а p_q – соответствующий ей импульс [6]. Традиционно кинетические расчеты бесстолкновительной функции распределения проводятся в дрейфовом приближении (см., например, [7]), предусматривающем усреднение физических величин по фазе ларморовского вращения, в результате которого можно следить лишь за движением ведущего центра ларморовской орбиты частицы. Соответствующий адиабатический инвариант отвечает магнитному моменту, $\mu \approx mv_\perp^2/2B$, где v_\perp – составляющая скорости частицы, ортогональная магнитному полю, модуль B которого берется в точке положения ведущего центра в данный момент времени. Колебания ведущего центра вдоль силовых линий магнитного поля происходят с сохранением продольного адиабатического инварианта движения J_\parallel [7, 8] (в подразумеваемом нами токамаке с сильным продольным полем вместо J_\parallel бывает удобнее использовать $J_\varphi = \oint p_\varphi d\varphi$, где интегрирование выполняется в пределах изменения тороидального угла для баунс-колебаний запертых частиц или от 0 до 2π для пролетных). Наконец, периодичность $r-z$ -движения

ведущего центра частицы – проекции вдоль тороидального направления его траектории на плоскость полоидального сечения токамака $\varphi = \text{const}$ – означает сохранение поперечного или третьего адиабатического инварианта J_\perp . Можно показать, что постоянство J_\perp эквивалентно постоянству магнитного потока, пронизывающего указанную полоидальную проекцию траектории, т.е. $J_\perp = \int \mathbf{B}d\mathbf{S}$, где интегрирование выполняется по площади, охватываемой указанной проекцией (поэтому третий адиабатический инвариант также называют потоковым), см. [8]. Подчеркнем, что интегралы $J_\parallel, \varphi, \perp$ рассчитывают для движения ведущего центра ларморовской орбиты частицы. В главном порядке дрейфовой теории (по отношению ларморовского радиуса к характерному размеру неоднородности) за счет сглаживания ларморовских осцилляций магнитный момент наряду с энергией и каноническим импульсом сохраняется точно и решение бесстолкновительного дрейфово-кинетического уравнения представляют как функцию именно этих трех сохраняющихся величин: $f = f(\epsilon, J, \mu)$. Задание ϵ, J, μ определяет $r-z$ -проекцию траектории ведущего центра частицы на плоскость полоидального сечения токамака (полоидальную проекцию). Траектория же, проходящая через точку с заданными значениями r и z , определяется заданием значений всего лишь двух инвариантов. Поэтому присутствие большего числа инвариантов движения означает, что одни инварианты могут быть выражены через другие, причем не обязательно посредством локальных соотношений. Формально использование различных наборов одинакового числа независимых инвариантов эквивалентно. Однако с практической точки зрения при решении конкретных задач полезно выявлять преимущественную зависимость искомой функции распределения от того или иного инварианта. Понимание такой зависимости может заметно упростить поиск приближенных решений и повысить их качество. В данной работе объектом нашего внимания является специфическая для токамака и других тороидальных систем зависимость функции распределения от питч-угла. Заметим, что поведение каждого из инвариантов, ϵ, J и μ , в фазовом пространстве носит весьма регулярный характер, см. рис. 1 (на этом и последующих рисунках указано значение безразмерного радиуса $x = (r - R)/a$, при котором траектория частицы пересекает плоскость $z = 0$; a – малый радиус токамака). Ни один из указанных инвариантов движения не имеет в области перехода между запертыми и пролетными частицами изломов или пиков, столь характерных для бесстолкновительной функции рас-

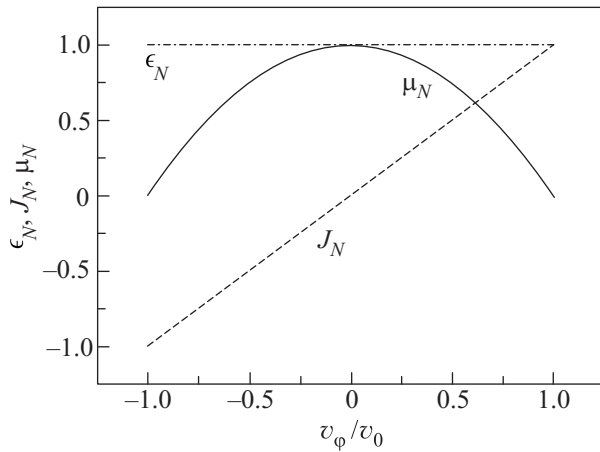


Рис. 1. Нормированные энергия ($\epsilon_N = 2\epsilon/mv_0^2$), канонический импульс ($J_N = J/mv_0R$) и магнитный момент ($\mu_N = 2\mu B_0/mv_0^2$) как функции тороидальной скорости в точке $x = 0$ плоскости $z = 0$

пределения. Поэтому единообразно сконструировать на их основе необходимую функцию не представляется возможным. Рассмотрим два оставшихся адиабатических инварианта: $J_{||}$ и J_{\perp} . В осесимметричном токамаке продольный адиабатический инвариант не является информативным из-за отсутствия точного интеграла движения – канонического импульса J . Тем не менее, поскольку сохранение J нарушается при нарушении осевой симметрии в реальном токамаке с гофрировкой или, тем более, в присутствии нестационарных полей, знание $J_{||}$ или J_{φ} становится в этом случае весьма полезным. Зависимость $J_{||}$ от pitch-угла приведена на рис. 2. Как видно, она мало

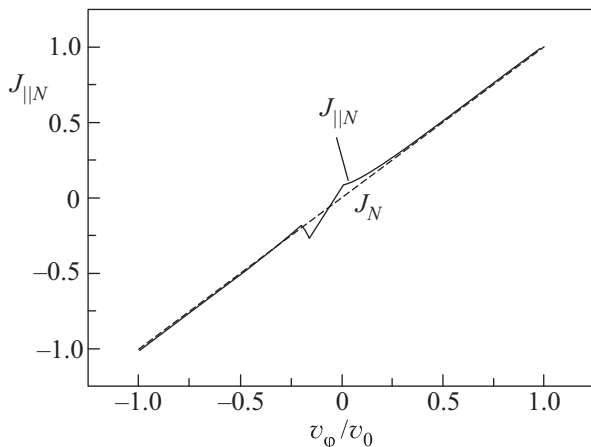


Рис. 2. Нормированный продольный адиабатический инвариант ($J_{||N} = J_{||}/mv_0R$) как функция тороидальной скорости в точке $x = 0$ плоскости $z = 0$

отличается от соответствующей зависимости J . Аналогичным образом ведет себя и J_{φ} . Далее мы пока-

жем, что именно J_{\perp} в значительной степени определяет вид бесстолкновительной функции распределения в фазовом пространстве. Заметим, что поскольку в стационарном поле осесимметричного токамака полоидальная проекция траектории ведущего центра замкнута, J_{\perp} оказывается точным интегралом дрейфового движения, так же как и любой другой интеграл вдоль замкнутой траектории. При нарушении же стационарности и (или) осевой симметрии J_{\perp} сохраняется адиабатически, что выгодно отличает его от других траекторных интегралов.

Решение бесстолкновительного кинетического уравнения будем искать по методу, использованному в [9] для расчета плотности бутстрэп-тока, генерируемого высокоэнергичными α -частицами. Рассмотрим кинетическое уравнение с дельта-функциональным по времени источником S в правой части, задающим распределение частиц в начальный момент времени $t = 0$:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \left(\frac{df_0}{dt} \right)_t = S = \delta(t)n_0(\mathbf{r})\gamma_0(\mathbf{v}). \quad (4)$$

Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция от времени, $n_0(\mathbf{r})$ – начальная концентрация частиц, $\gamma_0(\mathbf{v})$ – начальное распределение частиц по скоростям. Кинетическое уравнение (4) легко интегрируется в виде

$$f = \Theta(t)n_0(\mathbf{r}_0)\gamma_0(\mathbf{v}_0), \quad \Theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 & t \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $\Theta(t)$ – функция Хевисайда, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t = 0)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t = 0)$ – начальные положение и скорость частицы. Проводя обратное интегрирование вдоль траекторий, найденных путем численного решения точных уравнений движения, определяем зависимости $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, а значит, и явный вид функции распределения $f(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Функция распределения (5) принципиально нестационарна, т.к. не является в начальный момент времени функцией интегралов движения. На траектории $\mathbf{r}(t)$ величины $n_0(\mathbf{r}_0)$ и $\gamma_0(\mathbf{v}_0)$ не постоянны, поэтому по мере поступления в точку наблюдения частиц из разных точек пространства f может меняться со временем. Поскольку частицы движутся по условно-периодическим траекториям, ясно также, что эта временная зависимость будет осциллирующей функцией с периодом, определяемым самым большим характерным “траекторным” временем системы, т.е. максимальным баунс-периодом или периодом обращения пролетных частиц. Для получения стационарной картины на временах, больших не-

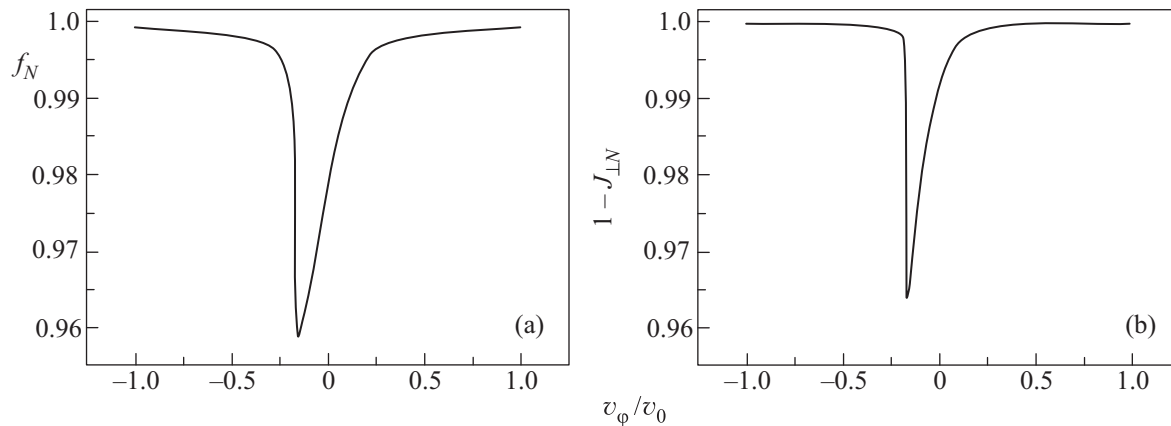


Рис. 3. Зависимости функции распределения f_N (а) и величины $1 - J_{\perp N}$ (б) от тороидальной скорости в точке $x = 0$ плоскости $z = 0$

скольких таких баунс-периодов, необходимо провести временное усреднение функции распределения:

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle &= \langle n_0(\mathbf{r}_0) \gamma_0(\mathbf{v}_0) \rangle(\mathbf{r}, \mathbf{v}, T) = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T n_0(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) \gamma_0(\mathbf{v}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)) dt. \end{aligned} \quad (6)$$

В асимптотике $T \rightarrow \infty$ функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle$ перестает зависеть от времени и определяется только интегралами движения, представляя собой аналог стационарной функции распределения, рассчитываемой по теории возмущений. В нашем подходе роль слабых столкновений, конкретизирующих вид функции распределения, выполняет усреднение по времени. Ниже под f будем понимать усредненную функцию распределения в смысле (6) при $T \rightarrow \infty$, а треугольные скобки будем опускать.

Вычисления проведем в магнитном поле простейшей конфигурации тороидально вложенных concentрических круглых магнитных поверхностей: $\Psi = [(r - R)^2 + z^2]/(2q) -$ метка магнитной поверхности, $q = \text{const}$ - коэффициент запаса устойчивости. В качестве источника частиц S , инжектированных в систему или рождающихся в ней в момент времени $t = 0$, выберем функцию с максвелловским распределением по скоростям, $\gamma_0(\mathbf{v}) = \gamma_0(v^2) = (\pi v_T^2)^{-3/2} \exp[-(v/v_T)^2]$ (v_T - тепловая скорость), и заданным пространственным распределением, зависящим только от метки магнитной поверхности, $n_0(\mathbf{r}) = n_0(\rho)$, $\rho = \sqrt{(r - R)^2 + z^2}/a$. Для плавных профилей $n_0(\rho)$, как показывают расчеты, качественный характер результирующего распределения частиц в пространстве скоростей слабо зависит от конкретного вида $n_0(\rho)$ и присутствия электрического поля. Ниже для определенности приведены результаты расчетов для $n_0(\rho) = n_A(1 - \rho^2)^2$, где n_A

- начальная концентрация частиц ансамбля на магнитной оси токамака.

Величину третьего адиабатического инварианта J_{\perp} рассчитаем как поток тороидального магнитного поля $B_T/B_0 = R/r$ через проекцию траектории ведущего центра дрейфового движения частицы вдоль тороидального направления на плоскость $\varphi = \text{const}$ (полоидальную проекцию). Положение ведущего центра находим путем вычета из радиуса-вектора, определяющего положение реальной частицы, радиуса-вектора ларморовского вращения, $\mathbf{v}_{\perp} \times \omega_{\mathbf{B}}$, где $\omega_{\mathbf{B}} = -Ze\mathbf{B}/mc$ - локальная циклотронная частота. Расчет траекторий частиц производится численно. Для верификации процедуры расчета используется проверка точности сохранения полной энергии и тороидальной компоненты канонического импульса.

Зависимости получаемой функции распределения, нормированной на величину $f_0 = n_A(\pi v_T^2)^{-3/2} \exp[-(v_0/v_T)^2]$ ($f_N = f/f_0$), и J_{\perp} , нормированного на $J_0 = B_0 \pi a^2$ ($J_{\perp N} = J_{\perp}/J_0$), от тороидальной скорости в разных точках полоидального сечения шнура представлены на рис. 3-5: рис. 3 - на магнитной оси ($x = 0$), рис. 4 - на внутреннем обводе тора ($x = -0.8$), рис. 5 - на внешнем обводе тора ($x = 0.8$). Видно, что функциональный ход f и J_{\perp} на рис. 3 практически одинаков. Отсюда можно заключить, что в окрестности магнитной оси поведение f в пространстве скоростей определяется третьим адиабатическим инвариантом, J_{\perp} . Вдали от магнитной оси профиль функции распределения отличается от профиля третьего адиабатического инварианта, главным образом в области фазового пространства, где доля запертых частиц ансамбля значительна (см. рис. 4, 5). В этой области роль и других инвариантов движения, в первую очередь продольного инварианта J_{\parallel} (или J_{φ}), в формирова-

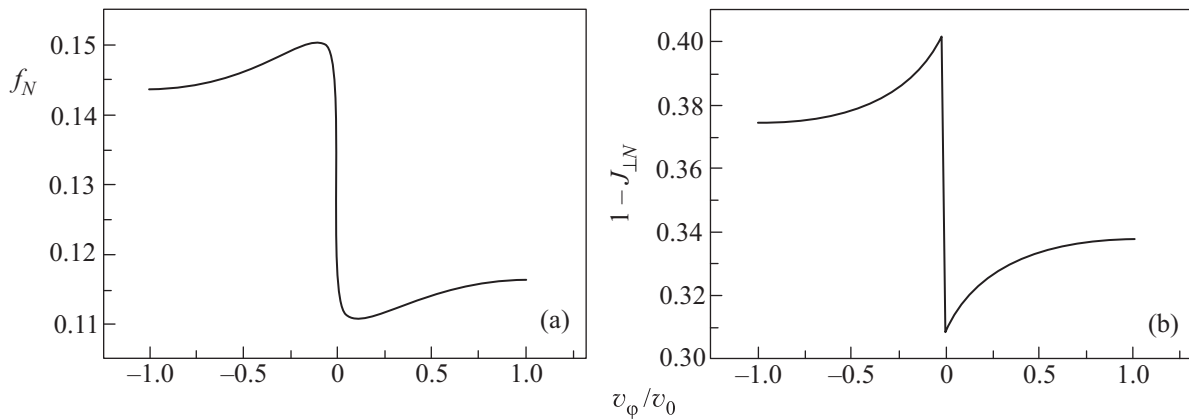


Рис. 4. Зависимости функции распределения f_N (а) и величины $1 - J_{\perp N}$ (б) от тороидальной скорости в точке $x = -0.8$ плоскости $z = 0$

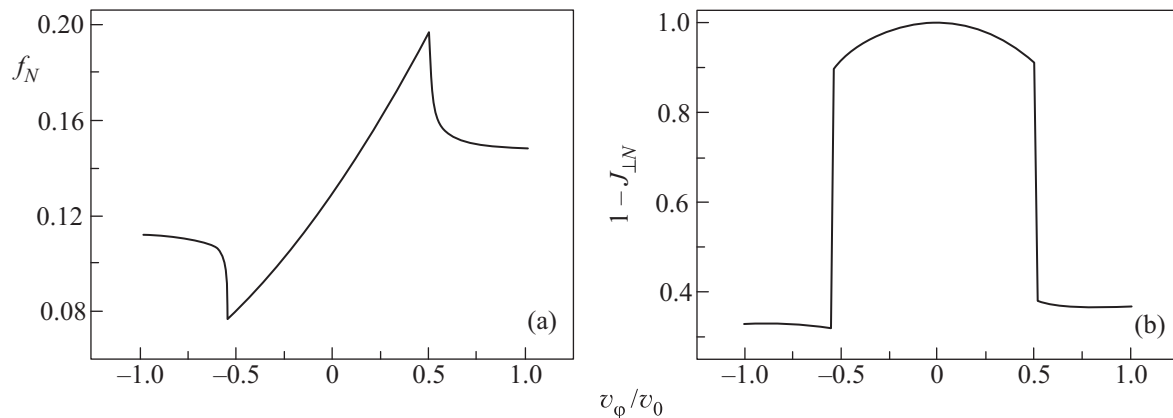


Рис. 5. Зависимости функции распределения f_N (а) и величины $1 - J_{\perp N}$ (б) от тороидальной скорости в точке $x = 0.8$ плоскости $z = 0$

нии бесстолкновительной функции распределения становится заметной. Тем не менее основные характерные особенности f в значительной степени связаны с особенностями именно J_{\perp} .

Определяющая роль траекторных инвариантов J_{\perp} , J_{\parallel} в формировании функции распределения проявляется лишь в случае, когда характерные времена баунс-осцилляций и пролетные времена существенно меньше времени столкновений, так что заряженные частицы успевают “почувствовать” дрейфовую траекторию полностью, прежде чем они испытают столкновение. Поэтому неудивительно, что представленные нами асимптотические функции распределения весьма схожи с функциями распределения, полученными в рамках классической теории возмущений [4, 5] в приближении редких столкновений. Это обстоятельство указывает на то, что главным фактором в формировании функции распределения ансамбля может выступать именно траекторное движение частиц, а не диффузионный оператор столкно-

вений, хотя это вопрос количественного, а не качественного анализа. Только в случае доминирующей роли столкновительной диффузии в пространстве скоростей оправдано представление искомой функции распределения в часто употребляемой форме “максвелловская функция распределения плюс поправка”. Подчеркнем, что доминирующая роль J_{\perp} в приосевой области плазменного шнура связана с относительно высокой долей пролетных частиц, тогда как на периферии в области слабого магнитного поля возрастает “удельный вес” запертых частиц, что приводит к увеличению вклада J_{\parallel} в формирование функции распределения. Адиабатическое сохранение J_{\perp} , J_{\parallel} при медленном изменении магнитного и электрического полей позволяет надеяться на то, что рассмотренные особенности формирования функции распределения заряженных частиц в токамаке сохраняются и в присутствии низкочастотных колебаний.

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и педагогические кадры

инновационной России 2009–2012 гг.” при частичной поддержке гранта РФФИ # 10-02-01302 и гранта # НШ-65382.2010.2 Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ.

1. А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев, *Вопросы теории плазмы*, вып. 7 (под ред. акад. М. А. Леонтовича), М.: Атомиздат, 1973, с. 205.
2. D. J. Ben Daniel and W. P. Allis, *Plasma Phys.* **4**, 31, 79 (1962).
3. В. П. Пастухов, *Вопросы теории плазмы*, вып. 13 (под ред. акад. Б. Б. Кадомцева), М.: Энергоатомиздат, 1984, с. 160.
4. С. В. Путвинский, *Вопросы теории плазмы*, вып. 18 (под ред. акад. Б. Б. Кадомцева), М.: Энергоатомиздат, 1990, с. 209.
5. V. Ya. Goloborod'ko and Ya. I. Kolesnichenko, *Nucl. Fusion.* **23**, 399 (1983).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. I, *Механика*. 5-е изд., стереот., М.: Физматлит, 2004. 224 с.
7. Д. В. Сивухин, *Вопросы теории плазмы*, вып. 1 (под ред. М. А. Леонтовича), М.: Госатомиздат, 1963, с. 7.
8. T. G. Northrop and E. Teller, *Phys. Rev.* **117**, 215 (1960).
9. В. И. Ильгисонис, Е. А. Сорокина, Э. И. Юрченко, *Физика плазмы* **36**, 3 (2010).