Письма в ЖЭТФ, том 53, вып. 3, стр. 153 - 157 10 февраля 1991 г.

СДВИГ МАССЫ КЛАССИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И СДВИГ ЦИКЛОТРОННОЙ ЧАСТОТЫ ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩИХ ГРАНИЦ

С.Л.Лебедев

Чувашский государственный педагогический институт им. И.Я.Яковлева
428000, Чебоксары

Поступила в редакцию 8 января 1991 г.

Изучено влияние проводящей плоскости на собственную энергию заряда, совершающего финитное (инфинитное) движение в магнитном (электрическом) поле. Зависимость сдвига от интеграла невозмущенного движения в магнитном поле ($v_\perp$) не ограничивается требованием $v_\perp \ll 1$ и позволяет установить связь между сдвигом массы и индуцированным границей сдвигом циклотронной частоты. Полученные выражения содержат "запаздывающую" и "незапаздывающую" асимптотики сдвига как частные предельные случаи.

Эффекты самодействия в классической электродинамике точечной частицы обнаруживаются как в уравнениях движения (сила реакции излучения), так и в конечных поправках к действию частицы. Добавки возникают вследствие конечного изменения внешним полем (бесконечной) собственной энергии ускоряемого этим полем электрона [1,2]. Эффекты самодействия зависят от окружения частицы: наличие проводящих поверхностей приводит к дополнительным добавкам к действию, которые удается в известном смысле интерпретировать как изменение массы [3]. Повышенный интерес к эффектам этого типа связан с выполненными в последнее время прецизионными экспериментами с уединенным электроном в ловушках Пеннинга (см. обзор [4]), где влияние границ существенно для оценки точности измерения $(g-2)$-фактора электрона. В работах [5-7] показано, что влиянием границ на частоту спиновой прецессии ω_s можно пренебречь, так что индуцированный границей сдвиг циклотронной частоты ω_c - это единственная граничная поправка в $(\omega_s-\omega_c)/\omega_c=(g-2)/2$, при этом обнаружено также, что основные формулы, описывающие эффект, классичны [5,7-9].

Мы предлагаем достаточно простой метод расчета поправок к собственной энергии электрона, которые, как оказалось, содержат информацию и о сдвиге циклотронной частоты. Метод восходит к работам [1-3] и основан на вычислении добавки ΔW к действию, связанной с самодействием заряда

$$\Delta W=\frac{e^2}{2}\int\int d\tau d\tau' \dot{x}_\alpha(\tau)\dot{x}_\beta(\tau')D^c_{\alpha\beta}(x,x')\Big|_0^{F,B}. \tag{1}$$

Здесь $\dot{x}_\alpha(\tau)$ – классическая 4-скорость, соответствующая невозмущенному границей движению частицы по мировой линии $x_\alpha(\tau)$, $D^c_{\alpha\beta}(x,x')$ – причинная функция Грина фотона с учетом границ, символ $\Big|_0^{F,B}$ указывает на то, что берется изменение самодействия, вызванное границами и внешним полем[1)].

В случае постоянного однородного поля и движения, параллельного проводящей плоскости, сдвиг массы выражается через функцию

$$f(\tau-\tau')=(x(\tau)-x(\tau'))^2. \tag{2}$$

Так как параллельность движения плоскости означает фиксированность одной из координат, то соответствующий (2) интервал для заряда-изображения ($\tilde{x}_\alpha(\tau)$ – его мировая линия) имеет вид

$$(x(\tau)-\tilde{x}(\tau'))^2=f(\tau-\tau')+R^2, \tag{3}$$

R - удвоенное расстояние от заряда до плоскости. Проводя вычисления так же, как в [3], для вещественной [2)] части самодействия (1) можно получить выражение

$$\mathrm{Re}\Delta W=-\frac{\alpha\tau}{2}\,\frac{f''(\Delta\tau_+)}{|f'(\Delta\tau_+)|}\equiv-\Delta m\tau. \tag{4}$$

Здесь $\Delta\tau_+$ – положительный корень уравнения

$$f(\Delta\tau)+R^2=0 \tag{5}$$

---

1) Используется система единиц, в которой $c=1$, $\hbar=1$, $\alpha=e^2/4\pi\hbar c$ и метрика, в которой $x_\alpha=(\vec{x},ix_0)$, и т. д.

2) В данной работе мы касаемся только существенной части ΔW, в связи с чем символ Re в дальнейшем будем опускать. Физический смысл мнимой части ΔW объясняется в [2,10], см. также [3].

и имеет смысл интервала собственного времени заряда между испусканием фотона и его поглощением после отражения от зеркала. Сдвиг явно лоренц-инвариантен: при инерциальных движениях, параллельных плоскости, интервалы (2), (3), их производные по собственному времени, а также корень $\Delta\tau_+$ остаются неизменными.

Движение в магнитном поле, перпендикулярном плоскости. Для функции f в магнитном поле имеем [2]

$$f(\Delta\tau) = -\gamma_\perp^2 \Delta\tau^2 + 4R_c^2 \sin^2\left(\frac{\kappa\Delta\tau}{2m}\right), \tag{6}$$

$\gamma_\perp = (1 - v_\perp^2)^{-1/2}$, $R_c = p_\perp/\kappa = mv_\perp\gamma_\perp/\kappa$– радиус циклотронной орбиты, $\kappa = e\eta$, η– напряженность магнитного поля. Тогда, используя (4), для Δm получаем

$$\Delta m = -\frac{\alpha\kappa}{2m}\,\frac{1 - v_\perp^2\cos\theta}{\theta - v_\perp^2\sin\theta}, \tag{7}$$

а θ определяется в соответствии с (5) из уравнения

$$\theta^2 = 4v_\perp^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{\kappa R}{m\gamma_\perp}\right)^2. \tag{8}$$

Таким образом, помимо магнитного поля и расстояния до плоскости, сдвиг зависит от лоренц-инвариантного параметра $(u_\alpha \equiv \dot{x}_\alpha(\tau))v_\perp$,

$$v_\perp^2 = \frac{2(F_{\mu\nu}u_\nu)^2}{F_{\mu\nu}^2 + 2(F_{\mu\nu}u_\nu)^2}, \tag{9}$$

представляющего собой поперечную по отношению к полю и сохраняющуюся при движении скорость частиц в системе отсчета, где имеется только магнитное поле. Переходя в эту систему, для поправок к функции Лагранжа частицы и ее энергии получаем соответственно

$$\Delta L = -\frac{\Delta m}{\gamma_\perp}, \qquad \Delta E = v_\perp\frac{\partial\Delta L}{\partial v_\perp} - \Delta L. \tag{10}$$

Рассмотрим нерелятивистский предел, считая $v_\perp^2 \ll 1$, $\omega_c R \gtrsim 1$. Тогда для добавки ΔE на основании (7), (8) и (10) имеем

$$\Delta E = -\frac{\alpha}{2R} - \frac{\alpha}{R}\left(\cos\omega_c R - \frac{\sin\omega_c R}{\omega_c R} + \frac{1 - \cos\omega_c R}{\omega_c^2 R^2}\right)\frac{v_\perp^2}{2}, \tag{11}$$

так что величина

$$\delta m = -\frac{\alpha}{R}\left(\cos\omega_c R - \frac{\sin\omega_c R}{\omega_c R} + \frac{1 - \cos\omega_c R}{\omega_c^2 R^2}\right) \tag{12}$$

может рассматриваться как поправка к массе частицы. В правой части (11) отброшены слагаемые порядка $v_\perp^4$. Заметим, что полученный в работе [5] сдвиг циклотронной частоты может быть целиком объяснен сдвигом массы (12): $\delta\omega_c = -\omega_c\delta m/m$ и, отбрасывая члены $\sim R^{-2}, R^{-3}$, получаем

$$\frac{\delta\omega_c}{\omega_c} = \frac{\alpha}{Rm}\cos\omega_c R, \tag{13}$$

что совпадает с формулой (2.7) указанной работы, если учесть, что в наших обозначениях R соответствует $2R$ в [5], а магнитное поле направлено пер-

пендикулярно плоскости. Заметим также, что при $\kappa \to 0$ $\theta \simeq \frac{\kappa R}{m} \to 0$ и не зависит от $v_\perp$, так что в (11) можно перейти к пределу $\omega_c R \to 0$ и получить поправку к энергии заряда, движущегося вдоль плоскости с постоянной скоростью $v_\perp$ [3)] :

$$\Delta E = \frac{-\alpha}{2R} + \left(\frac{-\alpha}{2R}\right)\frac{v_\perp^2}{2} \tag{14}$$

(в работе [5] бралась асимптотика волновой зоны $\omega_c R \gg 1$, и слагаемые порядка R^{-2}, R^{-3}, имеющиеся в (12) и необходимые для получения (14), не учитывались). Формула (14), очевидно, дает также поправку к энергии, когда $R \to 0$, $v_\perp \ll 1$, так что выключение поля эквивалентно приближению к плоскости. Аналогичное свойство имеется и у равноускоренного заряда [3]. В этой связи интересен ультрарелятивистский предел $R_c \gg R$, $v_\perp \sim 1, \gamma_\perp \to \infty$, в котором

$$\Delta m = -\frac{3\alpha}{2R}\left(\frac{\kappa R \gamma_\perp}{2\sqrt{3}m}\right)^{1/2}. \tag{15}$$

Движение в электрическом поле. Рассмотрим заряд, движущийся параллельно плоскости в электрическом поле ϵ, причем, в отличие от [3], предположим наличие у него постоянной 4-скорости $u_\perp$, ортогональной направлению поля. В этом случае сдвиг зависит от лоренц-инвариантного параметра $(\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma})v_{\perp 0}$,

$$v_{\perp 0}^2 = \frac{u_\perp^2}{1+u_\perp^2} = \frac{2(\tilde{F}_{\mu\nu}u_\nu)^2}{\tilde{F}_{\mu\nu}^2 + 2(\tilde{F}_{\mu\nu}u_\nu)^2}, \tag{16}$$

- скорости частицы в системе отсчета, связанной с полем, ортогональной ему и взятой в момент, когда вторая компонента скорости обращается в нуль $(v_\perp^2(\tau) = u_\perp \gamma^{-1}, \quad \gamma^2 = 1 + u_\perp^2 + u_\parallel^2(\tau) \neq \mathrm{const})$. Имеем $(\nu = e\epsilon, \ \gamma_0^2 = 1 + u_\perp^2)$:

$$f(\Delta\tau) = u_\perp^2 \Delta\tau^2 - \frac{2m^2\gamma_0^2}{\nu^2}\left(\mathrm{ch}\frac{\nu\Delta\tau}{m} - 1\right), \tag{17}$$

так что согласно (4) и (5)

$$\Delta m = -\frac{\alpha\nu}{2m}\,\frac{\mathrm{ch}\theta - v_{\perp 0}^2}{\mathrm{sh}\theta - v_{\perp 0}^2\theta}, \tag{18}$$

$$4\mathrm{sh}^2\frac{\theta}{2} = v_{\perp 0}^2\theta^2 + \left(\frac{\nu R}{m\gamma_0}\right)^2, \tag{19}$$

и брать следует положительный корень уравнения (19). Равенство нулю $v_{\perp 0}$ не означает нерелятивистского предела, так как движение при этом становится равноускоренным, т. е. заведомо релятивистским. Этот случай подробно исследовался в [3]. Предельный переход $R \to \infty$ $(v_{\perp 0} = 0)$, в отличие от случая финитного движения, дает ненулевой сдвиг $\Delta m = -\alpha\nu/2m$ [1]. Рост γ_0 в (19) не приводит к эффекту "выключения" поля или "приближения" к плоскости, так как характерное значение θ имеет в этом случае прядок $(\nu R/m\gamma_0)^{1/2}$, так что в полной аналогии с (15) получаем ультрарелятивистскую асимптотику

[3)] Формула (14) может быть получена и непосредственно из (4), (5) и (10), если учесть, что при $\kappa = 0$, $f(x) = -x^2$.

(18) в виде

$$\Delta m \simeq -\frac{3\alpha}{2R}\left(\frac{\nu R\gamma_0}{2\sqrt{3}m}\right)^{1/2}. \tag{20}$$

В заключение отметим, что предложенный метод позволяет определить поправку к массе и сдвиг циклотронной частоты и для случая, когда магнитное поле параллельно плоскости. В частности, в правой части (13) появится дополнительный множитель 1/2 в полном согласии с результатом работ [5,7]. Этот и другие вопросы будут изложены в подробной публикации.

Автор благодарен В.И.Ритусу за обсуждения и полезные замечания.

Литература

1. Ритус В.И. ЖЭТФ, 1978, 75, 1560.
2. Ритус В.И. ЖЭТФ, 1981, 80, 1288.
3. Лебедев С.Л. ЖЭТФ, 1989, 96, 44.
4. Brown L.S., Gabrielse G. Rev. Mod. Phys., 1986, 58, 233.
5. Boulware D.G., Brown L.S., Lee T. Phys. Rev. D, 1985, 32, 729.
6. Kreuzer M. J. Phys. A: Math. Gen., 1988, 21, 3285.
7. Barton G., Fawcett N.S.J. Phys. Rep. 1988, 170, 1.
8. Bordag M. JINR. E2-85-409. Dubna, 1985.
9. Brown L.S., Gabrielse G., Helmerson K., Tan J. Phys. Rev. A, 1985, 32, 3204.
10. Ритус В.И. ЖЭТФ, 1982, 82, 1375.