

Статистика волн-убийц в вычислительных экспериментах

В. Е. Захаров¹⁾, Р. В. Шамин¹⁾

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, 693022 Южно-Сахалинск, Россия

Department of Mathematics, University of Arizona, 857201 Tucson, USA

Поступила в редакцию 16 февраля 2012 г.

После переработки 4 июня 2012 г.

Изучаются волны-убийцы с помощью точного моделирования полных уравнений гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. С помощью вычислительных экспериментов получены статистические характеристики волн-убийц: интенсивность возникновения, среднее время существования, максимальные значения диссипации энергии при обрушении.

Поверхностные волны аномально большой амплитуды, так называемые волны-убийцы, в последнее время активно изучаются в океанологии, теоретической физике и математике (см., например, [1–9]). При этом преобладает подход к изучению волн-убийц как нелинейного эффекта в гидродинамике идеальной жидкости со свободной поверхностью. В нашей предыдущей работе [10] с помощью вычислительных экспериментов по моделированию динамики поверхностных волн, основанных на точных уравнениях, описывающих гидродинамику идеальной потенциальной жидкости со свободной поверхностью, были получены оценки вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начальных волн. В указанной работе использовались уравнения, в которые не входили ни диссипация, ни накачка. Обрушения волн в ходе экспериментов искажали статистику возникновения волн-убийц, поскольку в этом случае эксперимент прекращался досрочно.

В настоящей статье мы используем уравнения, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости, в которые включены как диссипация энергии, так и накачка. Это позволило поддерживать заданный уровень энергии в ходе экспериментов. Диссипация соответствовала сбросу энергии в результате обрушения волн, что позволяло продолжать эксперименты любое заданное время. Накачка энергии выбиралась таким образом, чтобы волны бежали в одну сторону.

Мы рассматривали задачу динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью в двумерной

геометрии с бесконечным дном: $0 < x < 2\pi$, $-\infty < y < \eta(x, t)$. Граничные условия на концах интервала $x = [0, 2\pi]$ были периодическими.

Течение предполагалось потенциальным, а жидкость – несжимаемой:

$$v = \nabla\phi, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

Таким образом, потенциал подчинялся уравнению Лапласа:

$$\Delta\phi = 0.$$

Мы осуществляли конформное отображение области, занятой жидкостью, на нижнюю полуплоскость, координаты на которой $w = u + iv$. Отображение задается функцией $z = z(w)$, $z = x + iy$.

Динамические уравнения формулировались для переменных Дьяченко:

$$R = 1/z'_w, \quad V = i\partial\Phi/\partial z.$$

Они имели вид

$$\begin{aligned} \dot{R}(u, t) &= i(UR' - U'R) + F_R[R, V] - \alpha R''''', \\ \dot{V}(u, t) &= i(UV' - B'R) + g(R - 1) + F_V[R, V] - \alpha V''''', \\ U &= P(VR^* + RV^*), \\ B &= P(VV^*). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь P – оператор проектирования на нижнюю полуплоскость: $P = \frac{1}{2}(1 + iH)$, H – аналог оператора Гильберта для периодического случая:

$$H[f](u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(u')}{\tan[(u' - u)/2]} du'.$$

¹⁾ e-mail: zakharov@math.arizona.edu, roman@shamin.ru

Операторы F_R и F_V соответствуют накачке. Эти линейные интегральные операторы в образах Фурье имеют следующий вид:

$$F_R[R, V]_k = -\beta_k(r_k - i\sqrt{k/gv_k}),$$

$$F_V[R, V]_k = \beta_k(r_k - i\sqrt{k/gv_k}).$$

Здесь

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{k - (K_0 - D_F)}{D_F}, & K_0 - D_F < k \leq K_0; \\ \frac{(K_0 + D_F) - k}{D_F}, & K_0 < k < K_0 + D_F, \end{cases}$$

где K_0 – волновое число, D_F – спектральная ширина накачки. Четвертые производные в уравнении (1) соответствуют диссипации. Накачка включалась в случае, когда уровень энергии был ниже заданного уровня, и выключалась, когда энергия превышала нужный уровень.

Прокомментируем физический смысл диссипативных членов и операторов накачки в уравнении (1). Обрушение волн является основной причиной преждевременного прекращения счета. Для его предотвращения мы используем диссипативные члены, подавляющие старшие гармоники, что можно интерпретировать как диссипацию вследствие обрушения. Операторы накачки увеличивают энергию волн, бегущих в одну сторону, что соответствует выбранным начальным данным. Накачка в пик спектра позволяет увеличивать энергию основных волн, рассматриваемых в эксперименте.

Система уравнений (1) обладает исключительно хорошими для теоретического и численного анализа свойствами, что обуславливает ее популярность в последнее время. Математические результаты, касающиеся разрешимости этой системы, а также описание методов ее численного решения приведены в работах [11–14].

Постановки наших вычислительных экспериментов в основном соответствовали экспериментам, описанным в работе [10]. Начальное волнение задавалось как ансамбль бегущих в одну сторону волн. Среднее значение волнового числа равнялось $K_0 = 25$.

Начальное возмущение поверхности задавалось суммой гармоник со случайными фазами:

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{\max}}^{\frac{1}{2}K_{\max}} \phi(k - K_0) \cos(kx - \xi_k). \quad (2)$$

Здесь K_{\max} – полное число спектральных мод, ξ_k – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$.

Начальные значения потенциала скоростей предполагались связанными с (2) согласно линейной теории.

Функция $\phi(k)$ определялась по формуле

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \leq K_w. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь δ_k – независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$.

Параметры спектра $1 \leq K_w \leq 10$, κ , α задавались так, чтобы средняя крутизна μ

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx,$$

и дисперсия

$$D = \left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk \right) \left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk \right)^{-1}$$

принимали заданные значения. Вклад случайного шума в энергию составлял не более трех процентов.

В каждом отдельном эксперименте расчет проводился при $0 \leq t \leq 400$, что соответствовало приблизительно 1000 периодам волн. В расчетах полное число гармоник составляло $K_{\max} = 2048$. Спектральная ширина накачки равнялась $D_F = 15$, коэффициент диссипации $\alpha = 10^{-9}$.

Волны-убийцы регистрировались согласно стандартному амплитудному критерию – одновременно выполнению при каком-либо значении $t = t^*$ следующих условий:

$$\nu(t^*) = \frac{H_{\max}(t^*)}{H_s(t)} \geq 2.1,$$

$$\mu(t^*) = \max_{0 < x < 2\pi} |\eta_x(x, t^*)| \geq 0.3,$$

где $H_s(t)$ есть значительная высота волнения, а $H_{\max}(t)$ – максимальная амплитуда волны в момент времени t .

На рис. 1 приведены результаты типичного вычислительного эксперимента. На нем изображены графики функций $\nu(t)$ и $\mu(t)$ и обозначены критические линии $\nu = 2.1$ и $\mu = 0.3$.

Во время проведения отдельного вычислительного эксперимента волна-убийца могла возникать несколько раз. Поэтому в качестве стохастической модели возникновения волн-убийц мы используем распределение Пуассона:

$$P(n, T) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}.$$

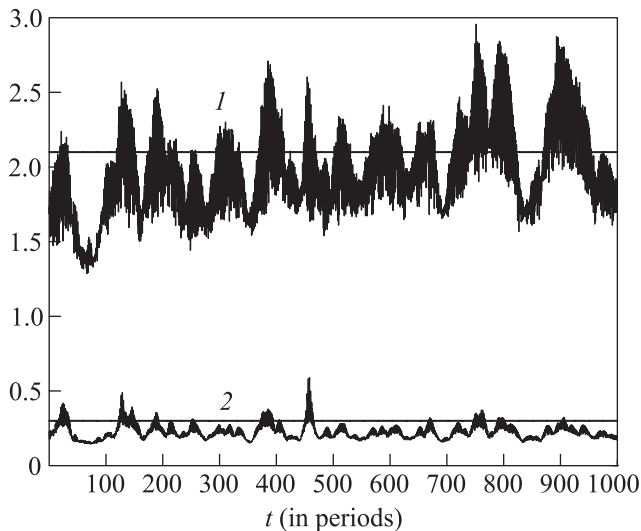


Рис. 1. Значения функций $\nu(t)$ (1) и $\mu(t)$ (2)

Это распределение дает вероятность появления n волн-убийц в течение T периодов. Значения параметра λ , имеющего смысл интенсивности появления волн-убийц, для различных параметров начального волнения приведены на рис. 2. Согласно формуле

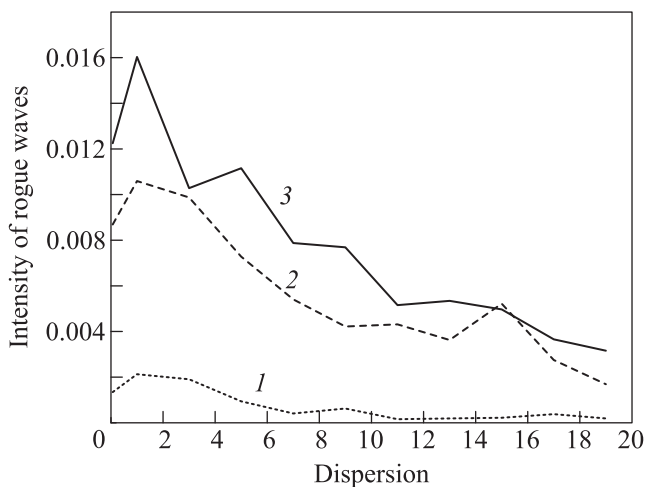


Рис. 2. Интенсивность возникновения волн-убийц: 1 – $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$; 2 – $3.08 \cdot 10^{-3}$; 3 – $4.10 \cdot 10^{-3}$

Литтла среднее число волн-убийц, возникающих в течение T периодов, равно

$$N^* = \lambda T.$$

В недавней работе [15] рассматривались натурные эксперименты по обнаружению волн-убийц в районе южного побережья о. Сахалин. В этих экспериментах также было использовано распределение Пуассона. Полученные в них оценки качественно совпадают с нашими результатами.

В результате вычислительных экспериментов были получены оценки времени существования волн-убийц. На рис. 3 приведены средние значения количества периодов существования волн-убийц.

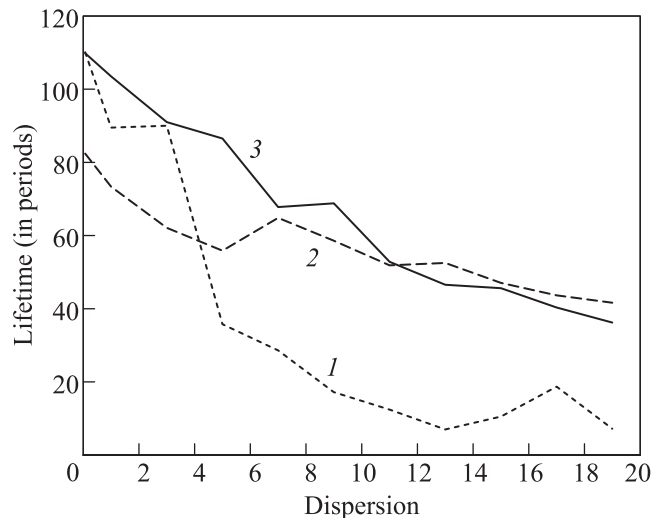


Рис. 3. Среднее время существования волн-убийц: 1 – $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$; 2 – $3.08 \cdot 10^{-3}$; 3 – $4.10 \cdot 10^{-3}$

Как правило, при возникновении волн-убийц происходило обрушение волны, что выражалось в резкой диссипации энергии. На рис. 4 приведены зави-

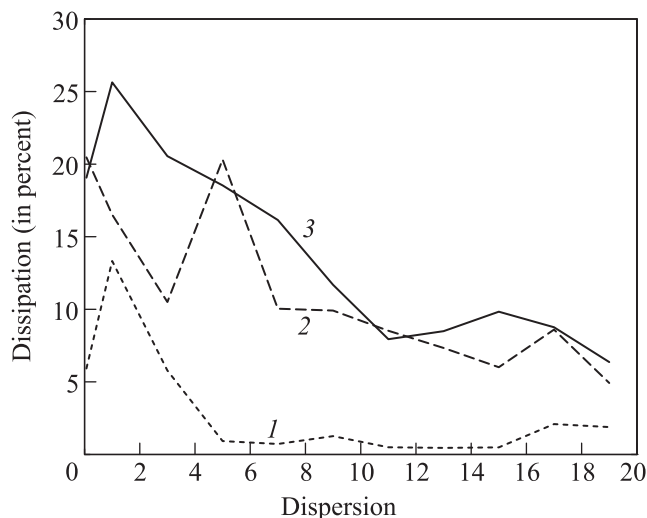


Рис. 4. Максимальная диссипация энергии при обрушении волны-убийцы: 1 – $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$; 2 – $3.08 \cdot 10^{-3}$; 3 – $4.10 \cdot 10^{-3}$

симости максимальной диссипации энергии (в процентах) при обрушении волны-убийцы от начальных параметров.

Предложенная нами модификация уравнений Дьяченко, включающая в себя накачку и дис-

сипацию, позволяет проводить вычислительные эксперименты, с одной стороны, устойчивые к обрушению волн, а с другой – с поддержанием заданного уровня энергии в системе. С помощью этих экспериментов, основанных на полных нелинейных уравнениях, нам удалось построить распределения Пуассона для возникновения волн-убийц. Конечно, полученная статистика зависит от параметров спектров начальных волн, в частности от количества индивидуальных волн в рассматриваемом цуге волн. Однако наши результаты подтверждают стохастический характер фактов возникновения волн-убийц, ранее отмеченный во многих публикациях, а также позволяют получать и другие характеристики волн-убийц.

Рисунок 2 показывает, что интенсивность (в смысле пуассоновского процесса) возникновения волн-убийц убывает с увеличением дисперсии, что соответствует выводам, сделанным в других публикациях, посвященных исследованию волн-убийц. Среднее время существования волны-убийцы (рис. 3) также убывает с ростом дисперсии. Интересно отметить, что при минимальной крутизне время существования волны-убийцы в случае узкого спектра близко к значениям при большей крутизне, а с увеличением ширины спектра оно резко убывает.

Максимальные значения диссипации энергии при обрушении волны-убийцы, приведенные на рис. 4, показывают, что она может концентрировать в себе значительную часть энергии всей системы. В одном численном опыте, проведенном А.И. Смирновой, рассчитывалась полная энергия каждой отдельной волны. При этом было получено, что типичная волна-убийца содержит около 20% энергии волны.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-6170.2012.2 и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математические методы в нелинейной динамике”, а также гранта Правительства РФ по государственной поддерж-

ке научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор # 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

1. C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean*, Springer, 2009, 216 p.
2. K. L. Henderson, D. H. Pelegri, and J. W. Dold, *Wave Motion* **29**, 341 (1999).
3. W. J. D. Bateman, C. Swan, and P. H. Taylor, *J. Comput. Physics* **174**, 277 (2001).
4. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B Fluids* **21**, 283 (2002).
5. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and A. O. Prokofiev, *Eur. J. Mech. B Fluids* **25**, 677 (2006).
6. V. E. Zakharov and A. I. Dyachenko, *European Journal of Mechanics B Fluids*. Published online 5 November 2009.
7. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ* **88**(5), 356 (2008).
8. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and R. V. Shamin, *Eur. Phys. J. Spec. Top.* **185**(1), 113 (2010); DOI:10.1140/epjst/e2010-01242-y.
9. D. Chalikov, *Phys. Fluids*. **21**(7), 076602-1 (2009).
10. В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, *Письма в ЖЭТФ* **91**(2), 68 (2010).
11. Р. В. Шамин, *Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане*, М.: Наука, 2008, с. 133.
12. R. V. Shamin, *Journal of Mathematical Sciences* **160**(5), 537 (2009).
13. Р. В. Шамин, *Доклады Российской академии наук* **406**(5), 112 (2006).
14. Р. В. Шамин, *Сибирский журнал вычислительной математики* **9**(4), 379 (2006).
15. А. И. Зайцев, А. Е. Малашенко, Е. Н. Пелиновский, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* **4**(4), 35 (2011).