

О признаках квантового хаоса в рассеивающей бильярдной К-системе с изломами боковой границы

Е. М. Ганапольский¹⁾

Институт радиофизики и электроники им. Усикова НАНУ, 61085 Харьков, Украина

Поступила в редакцию 23 августа 2012 г.

Работа посвящена экспериментальному изучению признаков квантового хаоса в спектрах линейных гамильтоновых систем, в частности рассеивающих бильярдов различной конфигурации с изломами боковой поверхности. Бильярд с изломами боковой поверхности, в которых отсутствует вторая производная, образует рассеивающую К-систему. В результате спектр такого бильярда и соответствующего модельного резонатора становится хаотическим, а распределение межчастотных интервалов – близким к распределению Вигнера. Измерены кривые спектральной жесткости для модельного СВЧ-резонатора, по форме подобного рассеивающему бильярду с изломами боковой поверхности. Установлено, что характеристики случайного спектра, распределение межчастотных интервалов и кривые спектральной жесткости для бильярдов с изломами боковой границы обладают признаками квантового хаоса.

Работа посвящена изучению квантового хаоса (КХ) в линейных гамильтоновых системах. Данное направление в последнее время приобрело большое развитие. Об этом свидетельствуют многочисленные публикации – монографии и статьи (см. [1] и цитируемую там литературу), в которых изложены результаты теоретических и экспериментальных исследований этой проблемы. Следует отметить, что КХ – понятие достаточно общее. Оно охватывает широкий круг задач, связанных с квантовомеханическим описанием систем, хаотических в классическом пределе. (Для описания экспериментов с бильярдными системами применяется также и термин “волновой хаос”. Однако он пока не получил широкого распространения.) Таким образом, исследования КХ представляют общефизический интерес, связанный с реализацией принципа соответствия между классическими и квантовыми системами. Система с КХ – это неинтегрируемая система, инвариантная по отношению к операции инверсии времени. Ее классический аналог обладает хаотичностью. Согласно гипотезе Бохигаса, Джанони и Смита [2] спектральные свойства такой системы можно описать с помощью теории случайных матриц [3]. Вытекающий из этой теории основной признак КХ – наличие в системе хаотического спектра с сильной корреляцией между спектральными линиями, которая приводит к своеобразному эффекту их “расталкивания” и вигнеровскому распределению межчастотных (МЧ) интервалов.

При теоретических и экспериментальных исследованиях КХ обычно используются рассеивающие

бильярды Синая и Бунимовича. В бильярде Синая хаотическое состояние в классическом пределе обеспечивается сильной неустойчивостью траектории материальной частицы, возникающей при отражении ее от границы с отрицательной кривизной. В бильярде Бунимовича причина неустойчивости связана с рассеянием и дефокусировкой траекторий частиц при отражениях от боковых границ.

Такие рассеивающие бильярды относятся к системам с перемешиванием [4] (К-системам), когда временные корреляции фазовых траекторий при движении частицы стремятся к нулю. Общим свойством системы рассеивающего бильярда как динамической системы является ее неинтегрируемость, связанная с тем, что в ней отсутствует пространственная симметрия и, кроме интеграла полной энергии, нет никаких других интегралов движения. При экспериментальном исследовании КХ используют моделирование с применением СВЧ-резонаторов, форма которых подобна рассеивающим бильярдам. Для этой цели применяют также и регулярные СВЧ-резонаторы, принадлежащие к интегрируемым системам. Хаотичность спектра в них создается за счет заполнения объема резонатора случайно расположенными в нем диэлектрическими неоднородностями [5]. В таком резонаторе благодаря случайному расположению неоднородностей спектр также случаен. Поскольку же в распределении неоднородностей отсутствует какая-либо симметрия, система является неинтегрируемой. Благодаря этому в соответствии с [2] в спектре резонатора имеет место вигнеровское (или близкое к нему) распределение межчастотных интервалов. На проявление КХ влияют также неоднородности (шероховатости) границы СВЧ-резонатора. Они создают

¹⁾ e-mail: el.ganapolskii@mail.ru

условия для возникновения состояния, обладающего признаками КХ [6, 7].

Вопрос о влиянии неоднородностей на спектр резонатора в последнее время вызывает значительный интерес в связи с прикладными аспектами, касающимися квантовой электроники. Они непосредственно связаны с созданием микролазера на дисковом полупроводниковом резонаторе со сверхвысокой добротностью [8]. В таком резонаторе благодаря исключительно малым диэлектрическим потерям на оптических частотах и высокой однородности полупроводникового кристалла, из которого он изготовлен, достигнута сверхвысокая добротность (порядка 10^6 и выше) для колебаний шепчущей галереи. Основанный на таком резонаторе лазер обладает очень высокой монохроматичностью и малой угловой расходимостью излучения. Важно также и то, что при сверхвысокой добротности резонатора существенно (на порядок или более) уменьшаются пороговые токи лазера.

При достижении сверхвысокой добротности лазерного резонатора большое значение имеют характер и величина диэлектрических неоднородностей в диске резонатора, а также отклонение его формы от строго цилиндрической. Эти неоднородности вызывают дополнительные радиационные потери, существенно понижающие добротность резонатора. Таким образом они негативно влияют на основные характеристики лазера. Поэтому изучение влияния неоднородностей на спектральные свойства лазерного резонатора и проявление в нем свойств КХ представляет собой интересную физическую проблему, имеющую немаловажное практическое значение.

Неустойчивость бильярдной системы (СВЧ-резонатора) и связанная с ней хаотичность могут быть следствием не только отражения волн от границы с отрицательной кривизной, как в бильярде Синая, или дефокусировки траекторий, как в бильярде Бунимовича. Хаотичность и расщепление корреляций могут возникать и в бильярдах, у которых граница имеет изломы поверхности и содержит как рассеивающие, так и фокусирующие участки. Общей чертой границы таких бильярдов является *малая гладкость* (по крайней мере отсутствие второй производной). Согласно [9] бильярд с малой гладкостью границы относится к неустойчивым рассеивающим бильярдам (K -системам). В нем отсутствует пространственная симметрия. Вследствие этого он является неинтегрируемой системой. Такой бильярд благодаря неустойчивости и рассеиванию на неоднородностях, в качестве которых выступают участки поверхности с малой гладкостью, становится хаотической системой. Это дает основание

полагать, что в его спектре можно обнаружить признаки КХ.

Следует, однако, отметить, что утверждение в [9] о принадлежности бильярда, граница которого обладает малой гладкостью, к K -системе фактически основано на неустойчивости траектории частицы, распространяющейся в таком бильярде. Такая неустойчивость приводит к хаотизации движения частиц в системе. С другой стороны, на основании гипотезы [2] можно считать, что спектры хаотических систем, инвариантных по отношению к инверсии времени (их классические аналоги являются K -системами), имеют статистические свойства, которые предсказываются теорией случайных матриц для систем, принадлежащих к гауссовому ортогональному ансамблю (ГОО). Благодаря этому они должны обладать признаками КХ. Поэтому установление в изучаемой системе хаотического спектра с корреляцией между спектральными линиями и вигнеровского распределения МЧ-интервалов дает основание считать, что здесь проявляются признаки КХ. Поскольку бильярдная система с изломами боковой поверхности является неинтегрируемой, ее хаотические свойства были изучены нами экспериментально.

Целью данной работы являются экспериментальное исследование бильярдных систем с малой гладкостью границ и выяснение возможности проявления в них признаков КХ. Для этого был применен распространенный метод моделирования эффектов КХ с использованием квазидвумерного объемного СВЧ-резонатора. Такой резонатор описывается скалярным уравнением Гельмгольца для заданного типа колебаний, которое совпадает со стационарным уравнением Шредингера. Это дает возможность рассматривать резонатор как квантовую систему и моделировать условия проявления в ней признаков КХ. Это и является предметом наших экспериментов. В них мы используем спектральный подход, когда признаки квантового хаоса проявляются в свойствах распределения МЧ-интервалов в спектре системы. При таком подходе в отсутствие КХ спектральные линии резонатора независимы, а распределение МЧ-интервалов является распределением Пуассона: $P(s) = \exp(-s)$, где s – нормированная длина МЧ-интервала. Иная ситуация возникает при наличии признаков КХ. В этом случае спектральные линии являются коррелированными, а распределение МЧ-интервалов в спектре приближается к распределению Вигнера: $P(s) = (\pi/2)s \exp[-(\pi/4)s^2]$.

Таким образом, установление вигнеровского распределения МЧ-интервалов в хаотическом спектре резонатора, боковые стенки которого обладают ма-

лой гладкостью, является хорошим доводом в пользу того, что резонаторная система с малой гладкостью боковой границы обладает признаками КХ.

Квазидвумерный объемный СВЧ цилиндрический резонатор, который использовался для моделирования системы с КХ, представлял собой цилиндрическую металлическую полость высотой 14 мм и диаметром 130 мм. Для концентрации в ней электромагнитного поля полость была закрыта двумя металлическими дисками (крышками). Для создания в резонаторе различных условий малой гладкости поверхности границы, когда в определенных ее точках исчезает вторая производная, в него вводились алюминиевые вставки в виде сегментов, форма и размеры которых позволяли обеспечить моделирование того или иного типа рассеивающего бильярда. Вставки, выполненные из чистого алюминия, плотно прилегали своей внешней цилиндрической поверхностью к боковой стенке резонатора. Размер вставок вдоль оси резонатора был в точности равен его высоте. Это позволило, с одной стороны, минимизировать потери электромагнитного поля в резонаторе, а с другой – обеспечить возбуждение в нем заданной моды колебаний. Спектральные исследования резонатора проводились в восьмимиллиметровом диапазоне на частотах 27–38 ГГц. Для возбуждения СВЧ-колебаний в резонаторе и их приема была использована волноводная дифракционная антенна. Она представляла собой отверстие диаметром 2 мм в тонкой (толщиной 0.1 мм) диафрагме, закрывающей собой торец стандартного прямоугольного волновода, впаянного в корпус резонатора. Широкая сторона волновода была ориентирована вдоль оси резонатора. В этих условиях в нем возбуждались колебания преимущественно H -типа с магнитным полем вдоль той же оси. Благодаря этому силовые линии электрического поля были расположены в перпендикулярной плоскости и СВЧ-токи возбуждаемых колебаний не пересекали границу между корпусом и верхней (нижней) крышкой резонатора. В результате в резонаторе достигалась относительно высокая добротность, величина которой составляла в высокочастотной части миллиметрового диапазона более 10^3 . Важно отметить, что форма модельного резонатора была выбрана такой, чтобы в нем возбуждались колебания только H -типа с тем, чтобы обеспечить необходимую для КХ корреляцию между частотами спектральных линий.

Частотный спектр резонатора определялся с помощью широкополосного измерителя интенсивности СВЧ-сигнала Р2-65, который позволял производить измерения спектра в широком интервале частот миллиметрового диапазона. Спектральные измерения

выполнялись в режиме “на проход” путем измерения интенсивности прошедшего через резонатор сигнала. При этом регистрировались многочисленные (числом порядка сотни) спектральные линии. Для того чтобы обеспечить стабильность характеристик сигнала и, соответственно, спектральных линий, измерения производились за достаточно короткое время. С этой целью процесс измерения был полностью автоматизирован. Весь спектр или отдельные его участки регистрировались в течение 40 с и фиксировались с помощью компьютера. Обработка спектра осуществлялась с применением специально разработанной программы, которая позволяла определять добротность и собственную частоту каждой из многочисленных спектральных линий с достаточно высокой точностью. Относительные погрешности в измерении частоты и добротности спектральной линии с использованием специального калибратора составляли величины порядка 10^{-5} и 10^{-3} соответственно. На рис. 1 показан фрагмент спектра гладкого (не содержаще-

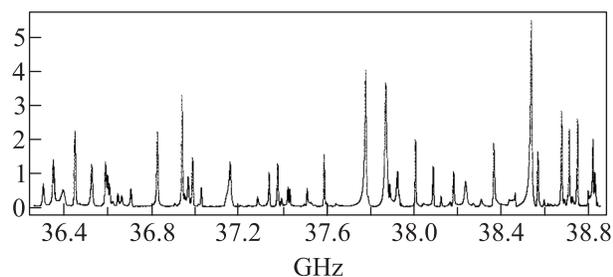


Рис. 1. Фрагмент спектра квазиоптического цилиндрического резонатора с гладкой границей. По вертикали (в произвольных единицах) отложена интенсивность сигнала, прошедшего через резонатор, по горизонтали – частота спектральной линии (в ГГц)

го вставок) цилиндрического резонатора, который содержит около 50 высокодобротных спектральных линий.

Рассмотрим вначале результаты спектральных измерений пустого (без вставок) цилиндрического резонатора. Такой резонатор, обладая элементами симметрии, является интегрируемой системой, а его электромагнитное поле можно представить в виде совокупности независимых спектральных мод (в данном случае это H -моды). Благодаря этому спектр резонатора является регулярным, спектральные линии независимы, а распределение МЧ-интервалов в нем близко к распределению Пуассона (рис. 2). Отклонение от распределения Пуассона наблюдается только при малых МЧ-интервалах s . Оно связано, по-видимому, с конечной шириной спектральной линии.

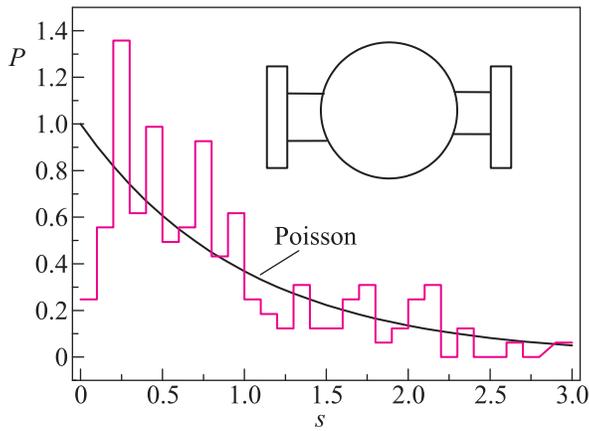


Рис. 2. Гистограмма МЧ-интервалов в спектре пустого цилиндрического резонатора. Распределение МЧ-интервалов близко к пуассоновскому (плавная кривая)

Конфигурация резонатора с двумя секторными вставками, расположенными под углом $\sim 20^\circ$, отвечает геометрии несимметричного бильярда Бунимовича. На боковой поверхности такого резонатора, где плоские поверхности вставок сочленяются с цилиндрической поверхностью, имеются изломы, в которых исчезает вторая производная. Благодаря этому в резонаторе возникают неустойчивость и хаотический спектр, в котором проявляется эффект отталкивания спектральных линий, что существенно сказывается на распределении МЧ-интервалов. Число малых МЧ-интервалов существенно уменьшается, а вероятность появления больших МЧ-интервалов, соответственно, возрастает. В результате распределение МЧ-интервалов в спектре резонатора приближается к распределению Вигнера. Относящиеся к этому случаю экспериментальные результаты показаны на рис. 3б. Видно, что в спектре резонатора с такой геометрией наряду с доминирующей случайной компонентой присутствует еще и регулярная составляющая.

Подобная особенность в распределении МЧ-интервалов имеет место и при конфигурации резонатора с одной сегментной вставкой, что соответствует полностью несимметричному бильярду (рис. 3а), когда вторая производная отсутствует в местах излома поверхности. Здесь, так же как и в случае несимметричного бильярда Бунимовича с двумя вставками, распределение МЧ-интервалов приближается к распределению Вигнера. В то же время наличие достаточно больших значений вероятности при малых s говорит о том, что в этом случае регулярная составляющая спектра по сравнению со спектром резонатора, подобного

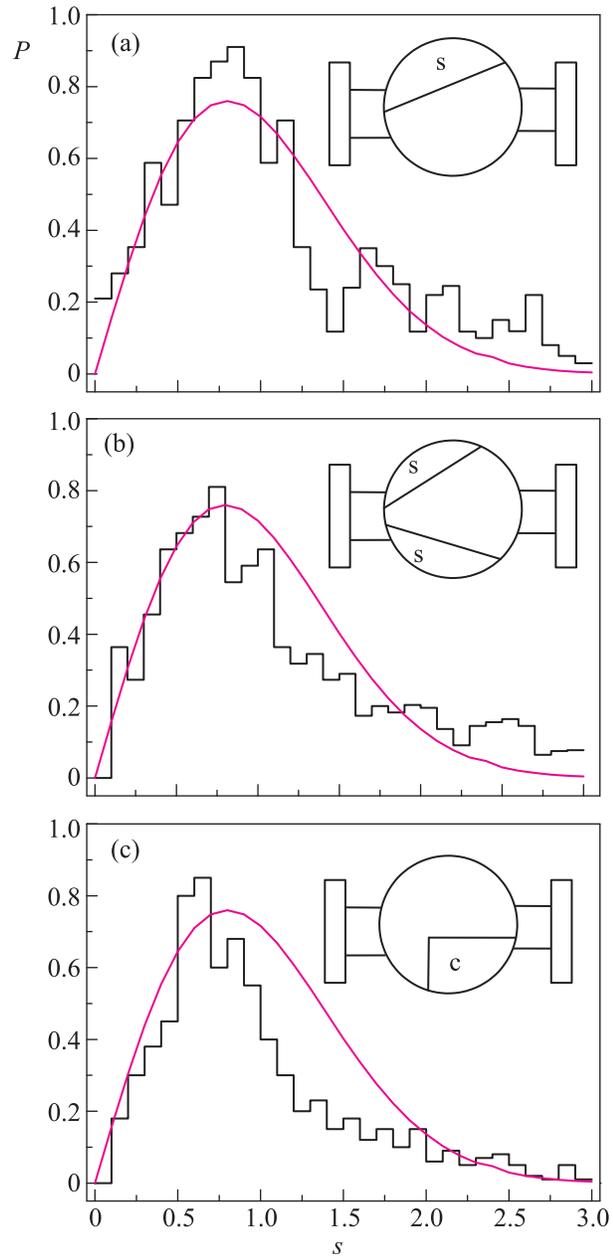


Рис. 3. Гистограммы МЧ-интервалов в спектрах резонаторов с алюминиевыми вставками-сегментами, благодаря которым поверхность боковой стенки резонатора приобретает малую гладкость. (а) – Резонатор с одной вставкой-сегментом. (б) – Резонатор с двумя вставками-сегментами. (с) – Резонатор с угловым уступом. Расположение сегментов в резонаторе схематически показано на вставках к рисункам. Распределение МЧ-интервалов в спектрах резонаторов со вставками близко к распределению Вигнера (сплошная кривая)

несимметричному бильярду Бунимовича (резонатор с двумя сегментными вставками), увеличивается. На рис. 3с показано распределение МЧ-интервалов

для случая резонатора, в котором вставка выполнена в виде несимметричного острого уступа. Сравнивая полученный спектр с рассмотренными выше спектрами резонаторов с одной и двумя несимметричными сегментными вставками, можно заметить, что острый угол вносит существенное по сравнению с резонатором без вставок изменение в характер спектра рассеивающего бильярда и распределение МЧ-интервалов. Последнее также приближается к распределению Вигнера. В этом случае при малых МЧ-интервалах вероятность $P(s)$ близка к нулю. Следовательно, в спектре резонатора с острым уступом боковой поверхности регулярной составляющей не обнаруживается.

Признаки КХ проявляются и в кривой спектральной жесткости $\Delta_3(L)$, где L – длина спектра, нормированная на средний МЧ-интервал (рис. 4). Функция

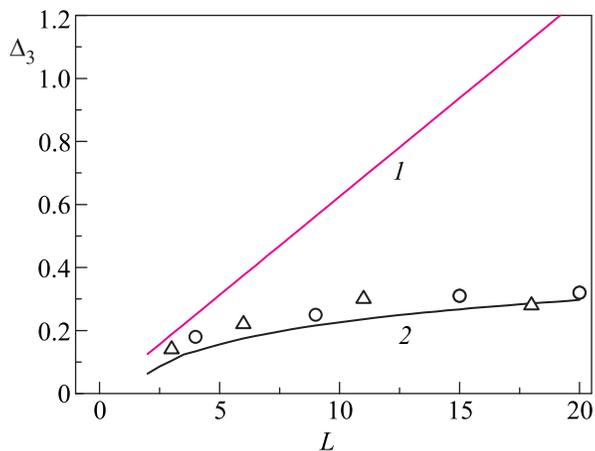


Рис. 4. Спектральная жесткость для спектров цилиндрических резонаторов: 1 – для пустого резонатора, в спектре которого отсутствует корреляция между спектральными линиями, $\Delta_3(L) = L/15$, 2 – для хаотической системы, принадлежащей гауссовому ортогональному ансамблю с коррелированными спектральными линиями, $\Delta_3(L) = 1/\pi^2 [\ln(2\pi L) + \gamma - 5/4 - \pi^2/8]$. Здесь L – нормированная длина спектрального интервала, в котором производится оценка, γ – постоянная Эйлера. Значки – экспериментальные данные для резонаторов со вставками-сегментами, обеспечивающими малую гладкость боковой поверхности: кружки – в случае двух вставок-сегментов, треугольники – в случае углового уступа

$\Delta_3(L)$ характеризует упорядоченность спектральных уровней в системе. Для регулярной системы (резонатор без вставок) с некоррелированными спектраль-

ными линиями $\Delta_3(L)$ возрастает $\sim L$ с тангенсом угла наклона $1/15$. Для спектров бильярдных с малой гладкостью боковых границ спектральная жесткость $\Delta_3(L)$ с ростом L сначала возрастает, а затем выходит на плато, $\Delta_3(L) = 1/\pi^2 (\ln L + \gamma - 5/4 - \pi^2/8)$. Согласно [10] такое поведение $\Delta_3(L)$ является признаком характерной для КХ коррелированности спектральных линий. При этом для изученных резонаторов характер приближения $\Delta_3(L)$ к плато различен, что, по-видимому, связано с присутствием в системе наряду с хаотической регулярной составляющей.

Итак, в настоящей работе с использованием модельных СВЧ-резонаторов впервые экспериментально установлено, что в бильярдной системе малая гладкость боковой границы (наличие изломов поверхности, в которых отсутствует вторая производная) является источником неустойчивости и превращает регулярную, устойчивую бильярдную систему в рассеивающую К-систему. Благодаря этому в такой системе (в соответствующем модельном СВЧ-резонаторе) появляются признаки квантового хаоса: случайный характер спектра и вигнеровское распределение межчастотных интервалов.

1. Х.-Ю. Штокман, *Квантовый хаос: введение* (под ред. В. Я. Демикховского; пер. с англ. А. И. Малышева), М.: Физматлит, 2004, 376 с.
2. O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984).
3. T. Guhr, A. Muller-Groeling, and H. Weidenmuller, *Phys. Rep.* **299**, 189 (1998).
4. Г. М. Заславский, *Стохастичность динамических систем*, М.: Наука, 1984, 365 с.
5. Е. М. Ganapolskii, Z. E. Eremenko, and Yu. V. Tarasov, *Phys. Rev. E* **75**, 026212 (2007).
6. Е. М. Ganapolskii, Z. E. Eremenko, and Yu. V. Tarasov, *Phys. Rev. E* **79**, 041136 (2009).
7. Е. М. Ganapolskii, Yu. V. Tarasov, and L. D. Shostenko, *Phys. Rev. E* **84**, 026209 (2011).
8. K. Srivansan, M. Borselli, T. J. Jonson et al., *Appl. Phys. Lett.* **86**, 151106 (2005).
9. Б. М. Гуревич, *Эргодичность динамических систем*, в кн. *Физическая энциклопедия* (под ред. А. М. Прохорова), М.: Рос. энциклопедия, 1998, т. 5, с. 625–636.
10. Л. Е. Райхл, *Переход к хаосу в консервативных классических и квантовых системах* (L. E. Reichl, *The Transition to Chaos Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations Second Edition Springer*), М.–Ижевск, 2008.