

# Об энергии ионов при разлете горячего плазменного слоя в вакуум

*Е. А. Говрас, В. Ю. Быченков*

*Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

*Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Духова, 127055 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 мая 2013 г.

Развита теоретическая модель, позволившая описать разлет плазменного слоя в вакуум для произвольного значения его электронной температуры. Продемонстрированы предельные переходы к ранее полученным результатам для квазинейтрального разлета и кулоновского взрыва. Сопоставление с численным моделированием показывает высокую точность теории.

DOI: 10.7868/S0370274X13140038

С момента появления первого теоретического описания разлета плазмы в вакуум [1] эта и последующие модели теории разлетающейся плазмы широко используются для описания ускорения ионов, обусловленного воздействием лазерного излучения на вещество. Задачи об ускорении ионов из лазерной плазмы относятся к разряду многопараметрических, определяющихся большим числом параметров лазерного импульса (интенсивностью, длительностью, размером пятна фокусировки) и плазменной мишени (температурой ее электронов, атомным составом, толщиной, плотностью). Поэтому, несмотря на современные возможности многомерного численного моделирования, даже упрощенные модели ускорения ионов, допускающие аналитические решения, оказываются востребованными. Они обладают качественной предсказательной силой для оценки эффективности генерации быстрых ионов и нахождения оптимальной схемы ускорения частиц для широкого диапазона параметров лазера и мишени. Это необходимо для предварительного изучения перед проведением как экспериментов, так и массивных численных кинетических расчетов.

Начиная с 70-х годов прошлого столетия и по настоящее время в многочисленных теоретических моделях используется бoльцмановское распределение электронов с заданной температурой. Такое приближение качественно оправдано, когда основной набор энергии ионами происходит в течение действия лазерного импульса, препятствующего остыванию электронов, что отвечает режиму изотермического разлета плазмы в вакуум. Асимптотические свойства такого разлета изучены в пионерских работах Гуревича с соавторами [1, 2]. Существенным продвижением вперед явилась работа Мора [3]. В ней, в отличие от [1, 2], учитывался эффект возникновения

скачка ускоряющего электрического поля на фронте разлетающейся плазмы и аналитически находилась максимальная энергия ионов, достигаемая к заданному моменту времени (на заданном расстоянии от поверхности мишени). Отметим, что в работах [1–3] рассматривалась модель плоской полуограниченной плазмы. Применимость ее результатов для экспериментов с фольгой ограничивается случаем достаточно толстых мишеней. Вместе с тем лазерное облучение именно тонких мишеней представляет наибольший интерес с точки зрения получения ионов максимальной энергии [4, 5]. Для таких мишеней в современных экспериментах с лазерами релятивистской интенсивности дебаевский радиус лазерно нагретых электронов  $\lambda_D^e$ , как правило, оказывается порядка или больше толщины облучаемой фольги  $L$ . Таким образом, условие  $\lambda_D^e \ll L$  применимости теорий [1–3] не выполняется. Это условие, отвечающее разлету плазмы, по существу близкому к квазинейтральному, естественным образом нарушается в случае кулоновского взрыва плазменного слоя [6]. При таком взрыве электроны столь сильно нагреваются лазером ( $\lambda_D^e \gg L$ ), что покидают мишень, вызывая ее распад под действием собственного положительного объемного заряда. В данном сообщении нами решена задача нахождения максимальной энергии ионов, достигаемой при разлете плазменного слоя в вакуум, для произвольного значения отношения  $\lambda_D^e/L$ . Продемонстрированы предельные переходы к более ранним результатам работ [1–3] и [6].

Пусть в начальный момент времени ионы плазмы (с зарядом  $Ze$  и массой  $M$ ) распределены однородно по плазменному слою толщиной  $L$  с плотностью  $n_0$  (в области  $-L/2 \leq x \leq L/2$ ). Движение ионов слоя описывается уравнением Власова с самосогласованным полем  $E(x, t)$ , являющимся решением

уравнения Пуассона. Дополненные бoльцмановским распределением плотности электронов с температурой  $T$  эти уравнения составляют основу численной кинетической модели Больцмана–Власова–Пуассона (БВП) [7]. При  $T \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow \infty$  эта модель отвечает упрощенным теориям квазинейтрального разлета [1, 2] и кулоновского взрыва [6]. Мы ставим своей целью аналитическое описание разлета слоя в вакууме для произвольного значения  $0 < T < \infty$ . Оно позволило бы избежать проведения численных кинетических расчетов, типично выполняемых методом “частица в ячейке” [7, 8]. До сих пор попытки решения этой задачи не увенчались успехом.

При рассмотрении одномерного движения ионов при  $x > 0$  (что достаточно в силу симметрии задачи), отвечающего характеристикам уравнения Власова, система уравнений БВП-модели формулируется в виде

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \eta^e \exp(\varphi/T) - n(x, t), \\ \varphi'|_{x=0} &= \varphi'|_{x=\infty} = 0, \\ \ddot{x} &= -\varphi'(x, t), \\ x(0) &= x_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ n(x, t) &= \left| \frac{\partial x(x_0, t)}{\partial x_0} \right|^{-1}, \quad 0 \leq x_0 \leq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) были введены следующие масштабы измерения величин:  $L/2$  для координат частиц  $x$ ,  $\omega_{pi}^{-1} = \sqrt{M/4\pi(Ze)^2 n_0}$  для времени  $t$ ,  $n_0$  для ионной плотности  $n$ ,  $4\pi(Ze)^2 n_0 (L/2)^2$  для энергии ( $Ze\varphi$ ,  $ZT$  или  $\varepsilon = M\dot{x}^2/2$ ). Безразмерный параметр  $\eta^e$  связан со значением электронной плотности  $n_0^e$  в центре слоя плазмы в начальный момент времени соотношением  $\eta^e = n_0^e/Zn_0$ . Он определяется из условия полной электронейтральности плазмы:

$$1 = \eta^e \int_0^\infty \exp[\varphi(x, 0)/T] dx. \quad (2)$$

При этом для определенности мы выбираем  $\varphi(0, 0) = 0$ . Приближенное аналитическое решение системы (1) в начальный момент времени  $t = 0$  позволяет получить следующий скейлинг  $\eta^e(T)$ :

$$\eta^e = \frac{1}{1 + 2T}. \quad (3)$$

Отклонения скейлинга (3) от полученного численно из (1) не превышают 7%.

Приведем решения системы (1) в известных случаях. В пределе  $\lambda_D^e \gg L$ , т.е. при очень сильном нагреве электронов мишени лазерным импульсом, происходит кулоновский взрыв плазменного слоя. Такой

случай был исследован в работе [6]. Он соответствует генерации максимально возможных ускоряющих полей, когда электростатическое поле на фронте имеет вид

$$E_f^{\text{CE}}(t) = 1. \quad (4)$$

Электрическому полю (4) соответствуют закон движения фронта разлетающейся ионной плазмы

$$x_f^{\text{CE}}(t) = 1 + t^2/2 \quad (5)$$

и зависимость максимальной энергии ионов от времени

$$\varepsilon_{\text{max}}^{\text{CE}}(t) = t^2/2. \quad (6)$$

Противоположный предел,  $\lambda_D^e \ll L$ , отвечает результату работы Мора [3] для случая полуограниченной плазмы,  $L \rightarrow \infty$ , когда  $\eta^e \simeq 1$ . Численно полученный в работе [3] закон изменения электрического поля на фронте  $E_f^{[3]}(t)$  выглядит как

$$E_f^{[3]}(t) = \frac{2\sqrt{T\eta^e}}{\sqrt{2e + t^2}}. \quad (7)$$

Электрическое поле (7) приводит к следующим асимптотикам ( $t \gg \sqrt{2e}$ ) для координаты фронта и максимальной энергии ионов:

$$x_f^{[3]}(t) = 1 + 2t\sqrt{T\eta^e} \left[ \ln \left( \sqrt{\frac{2}{e}} t \right) - 1 \right], \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\text{max}}^{[3]}(t) = 2T\eta^e \left[ \ln \left( \sqrt{\frac{2}{e}} t \right) \right]^2. \quad (9)$$

Как видно, экстраполяция (7)–(9) за рамки формальной применимости ( $\lambda_D^e \gtrsim L$ ), не позволяет даже качественно описать переход в режим кулоновского взрыва (4)–(6).

При произвольных значениях электронной температуры (параметра  $\lambda_D^e/L$ ) сложность аналитического решения системы (1) заключается в самосогласованном вычислении плотности ионов в терминах лагранжевых переменных. Альтернативой здесь является использование численного решения, например методом “частица в ячейке” (PIC). С таким численным решением мы будем сравнивать результаты нашей аналитической теории. Переходя к ее описанию, заметим, что кулоновский взрыв плазменного слоя (случай экстремально горячих электронов) сопровождается сохранением однородности профиля ионной плотности [6], т.е.  $n(x, t) = 1/x_f(t)$ ,

где  $x_f(t)$  – положение границы расширяющейся ионной плазмы. С другой стороны, при слабом нагреве электронной компоненты разлет плазмы протекает в квазинейтральном режиме, когда  $n(x, t) \approx n^e(x, t) = \eta^e \exp(\varphi/T)$ . Используя эти два асимптотических поведения, можно предложить интерполяционное распределение плотности плазмы для случая произвольных температур:

$$n(x, t > 0) = \begin{cases} \eta^e \exp\left[\frac{\varphi(x, t)}{T}\right] A + \frac{1}{x_f(t)} B, & 0 \leq x \leq x_f(t), \\ 0, & x > x_f(t). \end{cases} \quad (10)$$

Здесь интерполяционные коэффициенты  $A$  и  $B$  однозначно связаны друг с другом условием нормировки ( $\int_0^{x_f} n(x, t) dx \equiv 1$ ) и имеют следующее асимптотическое температурное поведение:

$$\begin{aligned} A(T \rightarrow 0) &= 1, & B(T \rightarrow 0) &= 0, \\ A(T \rightarrow \infty) &= 0, & B(T \rightarrow \infty) &= 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Соответственно

$$B = 1 - A + A \sqrt{2 \eta^e T e^{-\delta(t)} \exp[\varphi_0(t)/T]}, \quad (12)$$

где  $\varphi_0(t)$  – значение потенциала в центре слоя ( $x = 0$ ),  $\delta(t)$  – падение потенциала на толщине плазмы,  $\delta(t) = [\varphi_0(t) - \varphi_f(t)]/T$ .

Для дальнейших вычислений мы выбираем простейшее представление, обеспечивающее плавный переход плотности с ростом температуры от  $n = \eta^e \exp(\varphi/T)$  к  $n = 1/x_f$ , в виде

$$A(T) = \frac{1}{1+T}. \quad (13)$$

Приближенное вычисление первого интеграла уравнения Пуассона (1) с плотностью (10) с учетом (12), (13) приводит к следующему выражению для напряженности электрического поля:

$$E = \begin{cases} \frac{2T\delta}{x_f} \sqrt{\frac{T(\exp\{-\delta(x/x_f)^2\} - 1) + (T + e^{-\delta})(x/x_f)^2}{T(1-\delta) + e^{-\delta}}}, & 0 \leq x \leq x_f(t), \\ \sqrt{2\eta^e T} \left[ \sqrt{\frac{\eta^e}{2T}}(x - x_f) + \exp\left(-\frac{\varphi_0 - T\delta}{2T}\right) \right]^{-1}, & x \geq x_f(t). \end{cases} \quad (14)$$

Выражение (14) отвечает следующему приближенному решению уравнения Пуассона, справедливому

для широкого диапазона значений температуры  $T > 0.001$ :

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - T\delta \left(\frac{x}{x_f}\right)^2, & 0 \leq x \leq x_f, \\ -2T \ln \left[ \sqrt{\frac{\eta^e}{2T}}(x - x_f) + \exp\left(-\frac{\varphi_0 - T\delta}{2T}\right) \right], & x \geq x_f. \end{cases} \quad (15)$$

Условия сшивки потенциала и поля при  $x = x_f$  дают уравнение для нахождения  $\delta$  и связь между  $\varphi_0$  и  $\delta$ :

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{1+T}}{\sqrt{T(1-\delta) + e^{-\delta}}} = \\ & = \frac{e^{-\delta/2}}{T + e^{-\delta}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2x_f(T + e^{-\delta})}{\delta e^{-\delta}}} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\eta^e \exp\left(\frac{\varphi_0}{T}\right) = \frac{2\delta^2}{x_f^2} \frac{T(1+T)}{T(1-\delta) + e^{-\delta}}. \quad (17)$$

Из (14) получаем поле на фронте:

$$E_f = \frac{2T\delta e^{-\delta/2}}{x_f} \sqrt{\frac{1+T}{T(1-\delta) + e^{-\delta}}}, \quad (18)$$

а также соответствующее ему уравнение движения фронта ионов:

$$\ddot{x}_f = \frac{2T\delta e^{-\delta/2}}{x_f} \sqrt{\frac{1+T}{T(1-\delta) + e^{-\delta}}}. \quad (19)$$

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение (19) с зависимостью  $\delta(x_f)$ , определяемой соотношением (16), по существу, решает задачу нахождения зависимости  $x_f(t)$ , поскольку легко решается численно. В то же время первый интеграл уравнения (19) дает квадратурную формулу для максимальной энергии ионов в зависимости от положения фронта:

$$\varepsilon_{\max}(x_f, T) = 2T\sqrt{1+T} \int_1^{x_f} \frac{\delta e^{-\delta/2}}{x \sqrt{T(1-\delta) + e^{-\delta}}} dx. \quad (20)$$

Подстановка решения уравнения (19) в (20) позволяет получить временную зависимость максимальной энергии ионов  $\varepsilon_{\max}(t)$ .

Проведем сравнение полученных аналитических формул с численными расчетами для произвольных температур электронов и известными предельными случаями малых и больших отношений  $\lambda_D^e/L$ . На

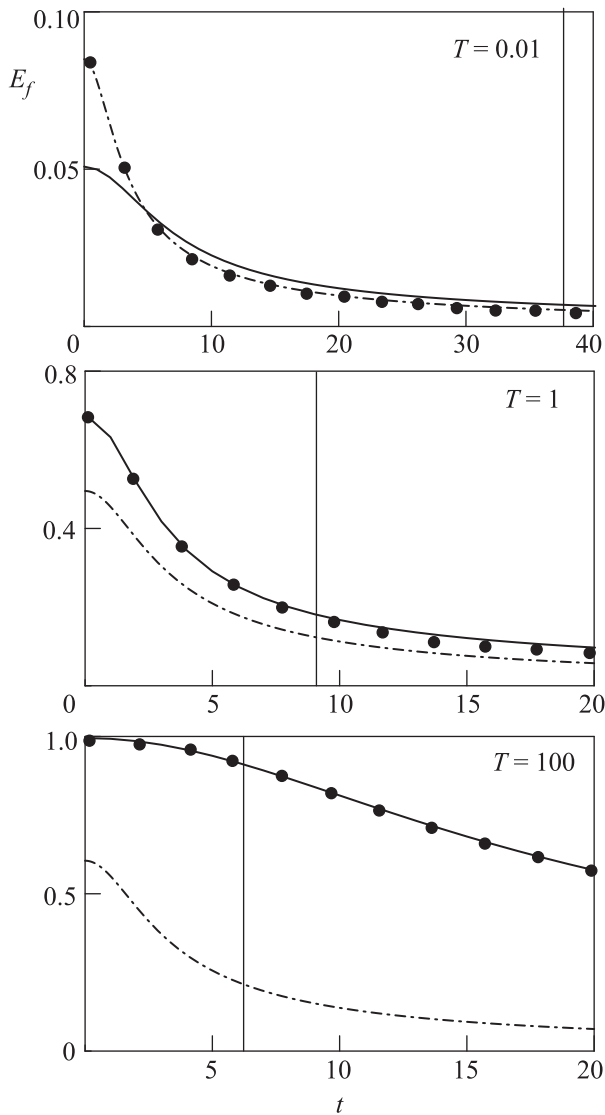


Рис. 1. Зависимость поля на фронте разлетающейся плазмы от времени. Сплошные линии соответствуют формуле (18), точками представлено численное решение (1), а штрихпунктирные кривые отвечают формуле (7). Вертикальные линии показывают момент пересечения фронтом плоскости с координатой  $x = x_d = 20$

рис. 1 показана эволюция электрического поля на фронте ионной плазмы  $E_f(t)$ . Прослеживается хорошее согласие между аналитическими (сплошные кривые) и численными (точки) результатами во всем диапазоне электронных температур. Отклонения на малых временах при  $T = 0.01$  обусловлены переходом изначально однородной ионной плотности к  $n \approx n^e$ , который не описывается (10). Однако такое отклонение не существенно для описания разлета плазмы на временах  $t > \max(1, 1/\sqrt{T})$  и практически не влияет на характеристики ускоренных ионов. Как

видно из рис. 1, формула для поля на фронте (7) из [3] (штрихпунктирные линии) применима лишь при малых значениях температур,  $T \lesssim 1$ , что соответствует выполнению соотношения  $\lambda_D^e/L \ll 1$ . Кроме того, в отличие от численной и нашей аналитической кривых, поле (7) не стремится к полю в режиме кулоновского взрыва (4) с ростом температуры. Вертикальные линии на рис. 1 отвечают моменту пересечения ионным фронтом плоскости с заданной координатой (в рассмотренном примере  $x_d = 20$ ). Ее можно отождествлять с границей одномерного разлета (длиной ускорения), при достижении которой уже не происходит существенного набора энергии разлетающимися ионами [6]. Действительно, при одномерном рассмотрении разлета плазмы электростатическая энергия плазменного слоя бесконечна. Поэтому с течением времени будет происходить неограниченное ускорение ионов. Конечность энергии в реальных экспериментах по ускорению ионов обусловлена переходом с течением времени разлета плазмы из одномерной в трехмерную стадию, сопровождающимся сильным падением ускоряющих полей. Поэтому большую часть своей энергии ионы набирают на этапе, когда трехмерные эффекты разлета еще несущественны [6]. Для плазмы лазерной мишени в качестве границы чисто одномерного разлета можно приближенно принять радиус пятна фокусировки лазерного импульса  $R_f$  [9]. Таким образом, одномерное рассмотрение будет справедливо до момента пересечения ионами плоскости с координатой  $x_d \simeq R_f$ . С учетом вышесказанного плоскость  $x = x_d$  можно трактовать как “детектор” ускоренных ионов. Для характерных параметров экспериментов, в которых возможно эффективное ускорение ионов, толщина фольги составляет десятки-сотни нанометров [10, 11]. Типичный же радиус фокусировки – порядка нескольких длин волн (нескольких мкм). Следовательно, типичная безразмерная величина  $x_d$  будет иметь значение порядка нескольких десятков.

На рис. 2 показано движение фронта ионов  $x_f(t)$ . Малое отклонение аналитической зависимости от численной, не превышающее 6% при  $T = 0.01$ , позволяет говорить о высокой точности полученных результатов. С увеличением температуры электронные компоненты различия между численным и аналитическим решениями оказываются еще меньше. При этом отмечается плавный переход к зависимости, отвечающей режиму кулоновского взрыва (5).

Монотонно растущее электростатическое поле при  $x \leq x_f$  указывает на то, что максимальной энергией при разлете будут обладать ионы, находящиеся на фронте плазмы. Для них  $x(t) \equiv x_f(t)$  и  $x_0 = 1$ . На

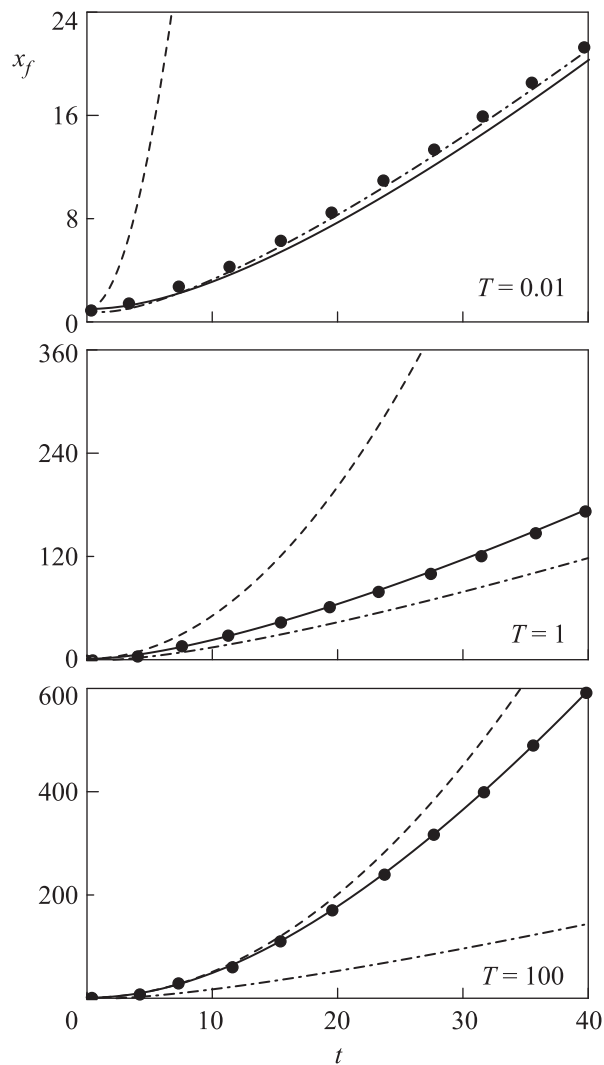


Рис. 2. Движение фронта ионной плазмы. Сплошные линии отвечают решению уравнения (19), точки – численное решение системы (1), пунктирные линии – движение фронта в режиме кулоновского взрыва (5), штрихпунктирные линии соответствуют формуле (8)

рис. 3 сравниваются результаты, полученные с помощью формулы для кулоновского взрыва (6), аналитической модели (19), (20), численных PIC-расчетов и формулы Мора (9). При  $T = 0.01$  максимальное отклонение аналитических формул (19), (20) от численных результатов не превышает 10%. С увеличением температуры точность приближенной аналитической модели возрастает и как аналитические, так и численные кривые стремятся к зависимости, отвечающей кулоновскому взрыву (6). Формула же (9) остается справедливой только при малых значениях температур ( $T < 1$ ).

На рис. 4 показана температурная зависимость максимальной энергии ионов на “детекторе”. Макси-

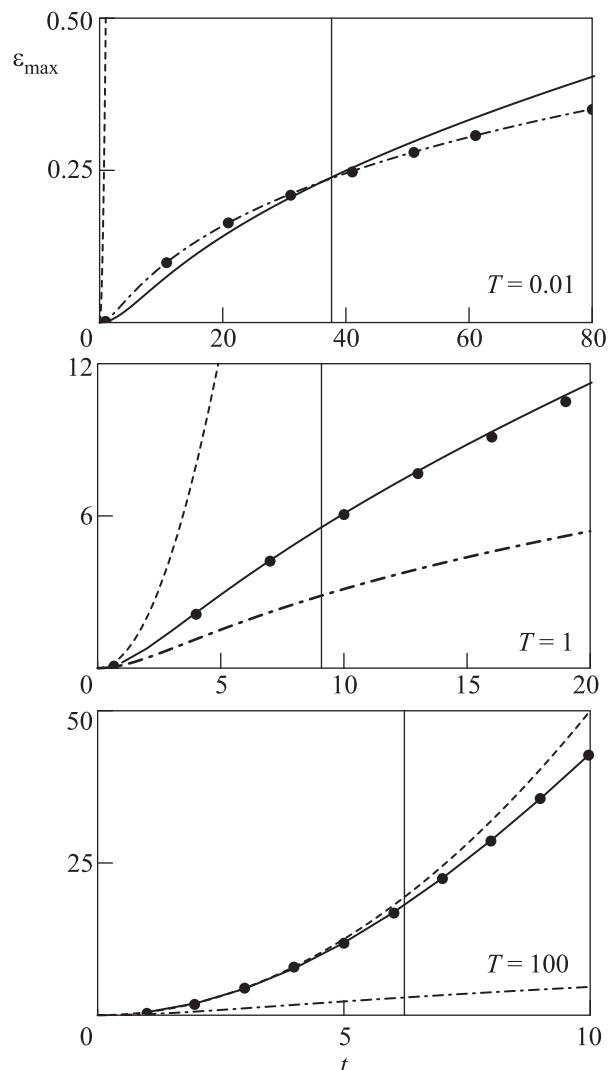


Рис. 3. Зависимость максимальной энергии от времени. Сплошные линии соответствуют аналитическому решению (19), (20), точки – численному решению системы (1), штрихпунктирные линии – формуле (9), пунктирные линии – зависимости в режиме кулоновского взрыва (6). Вертикальные линии показывают момент пересечения ионным фронтом плоскости  $x = x_d = 20$

мально достижимым значением здесь является энергия для случая кулоновского взрыва:

$$\epsilon_{\max}^{\text{CE}} = x_d - 1. \quad (21)$$

В пределе больших температур к ней стремятся как аналитическое, так и точное численное решения. Аналитическая модель демонстрирует очень хорошее согласие с численным решением во всем широком диапазоне температур электронов. Рис. 4 позволяет более точно установить границу применимости формул (8), (9) для полуограниченной плазмы. Их заметное (более 50%) отклонение от нашего аналити-

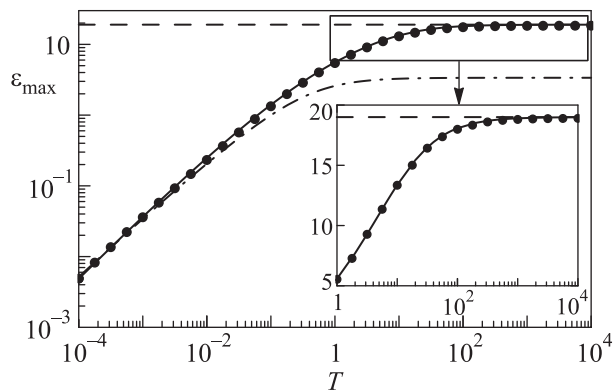


Рис. 4. Максимальная энергия ионов, фиксируемая на “детекторе” (плоскости  $x = x_d = 20$ ), в зависимости от температуры. Сплошные линии – формула (20), точки – численно найденные значения, пунктир – максимальная энергия ионов при кулоновском взрыве (21), штрихпунктирная линия – зависимость, полученная из формул для полубесконечной плазмы (8), (9). Вставка детализирует область высоких температур

ческого решения начинается при  $T > 0.1$ , что соответствует значениям дебаевского радиуса  $\lambda_D > L/6$ .

В заключение отметим, что построенная нами аналитическая модель позволила корректно описать эволюцию таких важных характеристик разлета плазмы в вакуум, как поле на фронте  $E_f(t)$ , положение фронта  $x_f(t)$  и максимальная энергия ионов  $\varepsilon_{\max}(t)$ , в широком диапазоне температур (от квазинейтрального разлета плазменного слоя до его кулоновского взрыва), что до сих пор оставалось нерешенной задачей. Наша модель дает возможность связать основные параметры лазерного импульса и мишени с максимально достижимой энергией ионов, что является важным для экспериментов по ускорению ионов. Поясним это на примере. Возьмем параметры эксперимента работы [11], в котором были использованы фольга из углерода ( $Z = 6$ ) с плотностью частиц  $n_0 = 1.4 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$  толщиной  $L = 0.2 \text{ мкм}$  и лазерный импульс с интенсивностью  $I = 5 \cdot 10^{20} \text{ Вт/см}^2$  с длиной волны  $\lambda = 1054 \text{ нм}$ , сфо-

кусированный в пятно с  $R_f = 3.8 \text{ мкм}$ . Используя пондеромоторный скейлинг для температуры электронов [12]:  $T = m c^2 (\sqrt{1 + a^2/2} - 1)$ , где  $m$  – масса электрона,  $c$  – скорость света,  $a = 0.85 \sqrt{I_{18}} \lambda$  – безразмерная амплитуда лазерного поля, определяемая интенсивностью  $I_{18}$  в единицах  $10^{18} \text{ Вт/см}^2$  и длиной волны  $\lambda$  в мкм, получаем оценку для максимальной энергии ионов углерода  $\varepsilon_{\max} \approx 665 \text{ МэВ}$ . Данный теоретический результат хорошо согласуется с экспериментальными данными ( $\varepsilon_{\max} \approx 650 \text{ МэВ}$ ).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты # 12-02-31183-мол\_а, 12-02-33045-мол\_а\_вед, 12-02-00231-а, 13-02-00426\_а) и ФЦП “Кадр” (грант # 2012-1.2.2-12-000-1011-055). Один из авторов (Е.А.Г.) благодарен С.Г. Бочкареву за плодотворные обсуждения численного кода для БВП-модели.

1. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **49**, 647 (1965).
2. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **54**, 891 (1968).
3. P. Mora, Phys. Rev. Lett. **90**, 185002 (2003).
4. Y. Sentoku, V. Yu. Bychenkov, K. Flippo et al., Appl. Phys. B **74**, 207 (2002).
5. A. J. Mackinnon, M. Borghesi, and S. Hatchett, Phys. Rev. Lett. **86**, 1769 (2001).
6. В. Ю. Быченков, В. Ф. Ковалев, Квантовая электроника **35**, 1143 (2005).
7. V. Yu. Bychenkov, V. N. Novikov, D. Batani et al., Phys. Plasmas **11**, 3242 (2004).
8. K. L. Cartwright, J. P. Verboncoeur, and C. K. Birdsall, Phys. Plasmas **7**, 3252 (2000).
9. А. В. Брантов, В. Ю. Быченков, Физика плазмы **36**, 279 (2010).
10. A. Brantov, V. Yu. Bychenkov, D. V. Romanov et al., Contrib. Plasma Phys. **53**, 161 (2013).
11. D. Jung, L. Yin, B. J. Albright et al., New J. Phys. **15**, 023007 (2013).
12. S. C. Wilks, W. L. Kruer, M. Tabak et al., Phys. Rev. Lett. **69**, 1383 (1992).