

Предвестники в газожидкостных смесях

В. Г. Гасенко^{+*1)}, Р. С. Горелик⁺, В. Е. Накоряков^{+*}, Л. С. Тимкин⁺

⁺Институт теплофизики им. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

^{*}Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 19 марта 2013 г.

После переработки 9 июля 2013 г.

В экспериментах по эволюции импульсов давления в газожидкостной смеси обнаружены два типа предвестников, распространяющихся со скоростью звука в чистой жидкости, в то время как основной импульс давления распространяется с низкой равновесной скоростью звука и эволюционирует в соответствии с уравнением Бюргерса–Кортевега–де Вриза. Первый высокочастотный (ВЧ) предвестник является полным аналогом классического предвестника Зоммерфельда ввиду совпадения резонансного дисперсионного уравнения пузырьковой смеси и диэлектриков в модели Лоренца и осциллирует на частоте, близкой к “плазменной”. Второй низкочастотный (НЧ) предвестник обнаружен авторами. Частота НЧ-предвестника близка к резонансной частоте пульсаций пузырьков, что почти на порядок ниже частоты ВЧ-предвестника. Низкочастотный предвестник имеет существенно большую амплитуду пульсаций, меньшее затухание и в рамках гомогенной модели газожидкостной смеси не описывается. Наблюдаемому явлению НЧ-предвестников дано объяснение в рамках простой гетерогенной модели пузырьковой жидкости.

DOI: 10.7868/S0370274X13160029

Одной из особенностей эволюции линейных волн в диспергирующих средах является существование предвестников, распространяющихся впереди основной волны. Впервые асимптотические решения для предвестников, выделяющихся из импульса электромагнитной волны в среде Лоренца (диэлектрике, состоящем из набора из N электронных осцилляторов), с резонансным дисперсионным уравнением

$$k^2(w) = \frac{w^2}{c^2} \left(1 - \sum_{i=1}^N \frac{w_{pi}^2}{w^2 - w_i^2 - \nu_i w} \right) \quad (1)$$

были получены Зоммерфельдом [1] и Бриллюэном [2]. Их именами были названы, соответственно, высокочастотные (ВЧ, $w \gg w_{pi}$) и низкочастотные (НЧ, $w \ll w_i$) предвестники. Здесь c – предельная скорость, w_i – резонансные частоты осцилляторов, w_{pi} – плазменные частоты, ν_i – коэффициенты затухания свободных колебаний осцилляторов. В отсутствие диссипации в однорезонансном случае дисперсионная кривая (1) имеет две отдельные ветви, разделенные окном непрозрачности $w_1 < w < w_r$, $w_r^2 = w_{p1}^2 + w_1^2$, а в многорезонансном случае – $N + 1$ ветвь. С учетом диссипации ветви могут сливаться. Предвестники электромагнитных волн в среде Ло-

ренца изучены как теоретически [3–6], так и экспериментально [7–9].

Газожидкостная смесь с пузырьковой структурой также состоит из осцилляторов – пузырьков газа. Ее дисперсионное уравнение, впервые приведенное в [10] и экспериментально подтвержденное в [11], совпадает с (1), где $c = c_f$ – скорость звука в чистой жидкости. “Плазменные” частоты $w_{pi}^2 = \alpha_i w_i^2 c_f^2 / c_0^2$ определяются через параметры смеси: низкочастотную скорость звука Мэллока $c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0 \varphi_0$, полное ($\varphi_0 = \sum_{i=1}^N \varphi_i$) и относительные ($\alpha_i = \varphi_i / \varphi_0$) объемные газосодержания, частоты собственных колебаний $w_i^2 = 3\gamma p_0 / \rho_1 R_i^2$ газовых пузырьков с радиусами R_i в безграничной жидкости и показатель адиабаты γ . Коэффициент затухания $\nu_i = 2\mu w_i^2 / c_0^2$ определен через эффективный коэффициент диссипации μ , учитывающий вязкость жидкости, потери колебаний пузырька на акустическое излучение и тепловые потери.

В газожидкостных смесях импульсы давления не заполнены несущей частотой и функция Грина в приближении $k \approx w/c - w_{p1}^2 / 2c(w - i\nu_1)$ для предвестника Зоммерфельда имеет вид [12, 13]

$$h_S = e^{-\nu_1 t_*} \left[\delta(t_*) - \sqrt{\frac{w_{p1}^2 x}{2ct_*}} J_1 \left(2\sqrt{\frac{w_{p1}^2 xt_*}{2c}} \right) \right], \quad (2)$$

¹⁾e-mail: gasenko@itp.nsc.ru

где $t_* = t - x/c$, J_1 – функция Бесселя. В отличие от [6] решение (2) содержит дополнительно дельта-функцию δ , дающую упругий предвестник. Оно хорошо передает огibaющую предвестника Зоммерфельда, но не его частоту, что отмечено в [6].

Пузырьковая жидкость – существенно нелинейная среда. Нелинейное волновое уравнение с резонансной дисперсией (1) имеет порядок $2N + 2$. В приближениях гомогенной модели [14] уравнение для безразмерного возмущения давления $\tilde{p} = p/p_0 - 1$ с использованием оператора $D = \partial/\partial t$ принимает компактный вид:

$$\tilde{p}_{xx} - \frac{1}{c_f^2} \tilde{p}_{tt} + \frac{1}{c_f^2} \sum_{i=1}^N w_i^2 \frac{p_{tt} - c_0^2 \frac{\gamma+1}{2\gamma} \tilde{p}_{xx}^2}{D^2 + w_i^2 + \nu_i D} = 0. \quad (3)$$

В однорезонансном случае (3) переходит в двухволновое нелинейное волновое уравнение (ДНВ) [15]:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{xx} - \frac{1}{c_1^2} \tilde{p}_{tt} + \frac{1}{w_1^2} \left(\tilde{p}_{xx} - \frac{1}{c_f^2} \tilde{p}_{tt} \right)_{tt} + \\ + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \tilde{p}_{xx}^2 + \frac{\nu_1}{w_1^2} \left(\tilde{p}_{xx} - \frac{1}{c_f^2} \tilde{p}_{tt} \right)_t = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Заменой $\partial/\partial t = -c_1 \partial/\partial x$ (4) приводится к уравнению Бюргерса–Кортевега–де Вриза (БКВ) для скорости $u = \tilde{p} c_1 (\gamma + 1) / 2\gamma$:

$$u_t + c_1 u_x + uu_x - \mu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \quad (5)$$

где $c_1^{-2} = c_f^{-2} + c_0^{-2}$, $\beta = c_1^3 / 2w_1^2$. Приближение БКВ (5) для газожидкостных смесей экспериментально подтверждено на ударных трубах [16]. В зависимости от амплитуды и длительности входной импульс давления распадается на линейный волновой пакет либо на последовательность солитонов, которые вследствие диссипации рапыляются и сливаются в треугольную волну Бюргерса. Предвестники Бриллюэна, распространяющиеся со скоростью c_1 , и есть линейные решения (4), (5) в виде волнового пакета [6].

Численные решения ДНВ и БКВ [15] отличаются только для входных сигналов с крутым передним фронтом. В этом случае из основного сигнала выделяется высокочастотный предвестник, распространяющийся со скоростью звука в чистой жидкости, а основной сигнал эволюционирует согласно уравнению БКВ. Это подтверждается и прямым численным расчетом полной системы гидродинамических уравнений [17]. Динамика ВЧ-предвестника с высокой точностью описывается уравнением Кляйна–Гордона (КГ), следующим из ДНВ на высокочастотной ветви при замене $\partial^2/\partial t^2 = c_f^2 \partial^2/\partial x^2$. Уравнение

КГ ввиду малости множителя c_1^2/c_f^2 оказывается линейным:

$$\tilde{p}_{tt} - c_f^2 \tilde{p}_{xx} + w_r^2 \tilde{p} + \nu_1 \tilde{p}_t = 0. \quad (6)$$

Функция Грина для уравнения КГ [18]:

$$h_S = e^{-\nu t_*} \delta(t_*) - \frac{w_* x e^{-\nu t_*}}{c_f \sqrt{t^2 - x^2/c_f^2}} J_1 \left(w_* \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{c_f^2}} \right), \quad (7)$$

дает фиксированную частоту колебания хвоста предвестника Зоммерфельда, $w_*^2 = w_r^2 - \nu^2/4$. Это связано с более точной аппроксимацией $k^2 c_f^2 \approx w_2 - w_r^2 - i\nu_1 w$ уравнения (1) при $w \gg w_1$, следующей из КГ.

Цель данной работы, проводившейся на установке “Ударная труба” с диаметром канала 26 мм и высотой 2.5 м, – экспериментальное исследование предвестников в газожидкостной смеси. Ранее предвестники наблюдались в пузырьковых завесах в бассейнах при инициации импульсов давления взрывами малых зарядов [18, 19]. Однако их структура и частота не были изучены. Предвестники наблюдались также в [20] во взвеси микропузырьков ($R = 3-4.5$ мкм) при эволюции 50-наносекундного импульса давления, инициированного оптоакустической ячейкой. Сильное затухание и малая длина распространения (единицы мм) позволили авторам наблюдать только начальную стадию формирования предвестников.

Реальные сигналы всегда имеют конечную скорость нарастания фронта r . Амплитуда предвестника A_f зависит от r и граничной частоты w_r как $A_f \sim r w_r / (w_r^2 + r^2)$ [6]. При используемых в экспериментах пузырьках с радиусом $R_1 = 1.5$ мм за счет малого газосодержания $\varphi_0 \approx 0.5\%$ резонансная частота $w_1/2\pi$ снижалась до 1.7 кГц, а равновесная скорость увеличивалась до 150 м/с. Наличие в рабочей жидкости микропузырьков диаметром менее 0.1 мм (газосодержание которых оценивается ниже) снижало скорость звука в жидкости до 900 м/с. Такая жидкость далее называется чистой.

Импульсы давления формировались в “чистой” жидкости в колене, выполненном из трубы того же диаметра, что и основная труба, и присоединенном к ней снизу под углом 30° . Импульс создавался ударом сердечника электромагнитного соленоида по мембране, закрывающей торец колена. Управление соленоидом позволяло получать импульсы давления длительностью от 0.5 до 2 мс с длительностью фронта до 50 мкс и амплитудой от 0.01 до 0.6 МПа.

В экспериментах выполнялись условия гомогенности пузырьковой смеси: $l_{s1}, \lambda_s \gg l_1 \gg 2R_1$, где

$l_{s1} = \frac{4c_1}{w_1} \sqrt{1 + \frac{3\gamma}{(\gamma+1)\tilde{p}_s}} \approx 92$ мм – ширина солитона БКВ с амплитудой $\tilde{p}_s = 1$, $\lambda_s = 2\pi c_f/w_r \approx 69$ мм – длина волны предвестника Зоммерфельда, $l_1 = R_1(4\pi/3\varphi_0)^{1/3} \approx 14$ мм – расстояние между крупными пузырьками при их кубической упаковке. При наличии двух размеров пузырьков (3) переходит в трехволновое нелинейное волновое уравнение (ТНВ) [21], записанное в бездиссипативном случае:

$$\tilde{p}_{xx} - \frac{\tilde{p}_{tt}}{c_1^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{c_1^2}{c_0^2} \tilde{p}_{xx}^2 + \beta_2 \left(\tilde{p}_{xx} - \frac{\tilde{p}_{tt}}{c_f^2} \right)_{4t} + \beta_1 \left(\tilde{p}_{xx} - \frac{\tilde{p}_{tt}}{c_2^2} + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{c_1^2 \beta_3}{c_0^2 \beta_1} \tilde{p}_{xx}^2 \right)_{tt} = 0. \quad (8)$$

Здесь $\beta_1 = w_1^{-2} + w_2^{-2}$, $\beta_2 = w_1^{-2} w_2^{-2}$, $\beta_3 = \alpha_1 w_2^{-2} + \alpha_2 w_1^{-2}$ и $c_2^{-2} = c_f^{-2} + c_0^{-2} \beta_3 \beta_1^{-1}$. В случае $\alpha_2 \ll \alpha_1$ и $w_2 \gg w_1$ имеем $\beta_1 \approx w_1^{-2}$ и коэффициент при втором нелинейном члене оказывается ничтожно малым, $\beta_3/\beta_1 \approx \alpha_1 w_1^2/w_2^2 + \alpha_2 \ll 1$. Относительный вклад высших дисперсионных членов $\beta_2 w^6 c_f^{-2} / \beta_1 w^4 c_2^{-2} \approx c_2^2 w^2 / c_f^2 w_2^{-2}$ в области частот $w \leq 10w_1$ оказывается несущественным. В результате ТНВ (8) принимает форму ДНВ, где вместо скорости c_f стоит уменьшенная скорость в “чистой” жидкости c_2 . В приводимых экспериментах $w_2/w_1 \approx 30$ и скорость $c_2 = 900$ м/с согласно (8) достигается при относительных газосодержаниях $\alpha_1 = 0.983$ и $\alpha_2 = 0.017$. Расстояние $l_2 \approx 16$ мм между микропузырьками при такой концентрации также не нарушало условий гомогенности. Ширина же солитонов единичной амплитуды в жидкости с одними микропузырьками, $l_{s2} \approx 14$ мм $< l_2$, этим условиям не удовлетворяла. Поэтому они как регулярные структуры не образовывались.

Для регистрации давления использовалось четыре датчика давления SPT-mv фирмы Honeywell с паспортной полосой пропускания более 10 кГц. Первый датчик находился на расстоянии 120 мм от сочленения колена с трубой, а последующие три – на расстояниях 500 мм друг от друга. Датчики подключались к усилителям и опрашивались 16-разрядным АЦП L-1620S фирмы L-CARD с частотой дискретизации 40 кГц. Рабочая жидкость представляла собой 30-процентный водоглицериновый раствор плотностью 1008 кг/м³. Пузырьки формировались путем подачи сжатого воздуха через отверстия диаметром 0.14 мм в большом объеме воды ниже ударного генератора и направлялись в канал конусной вставкой.

Профили давления при эволюции входного сигнала с пологим передним фронтом, полученного на мембране из неупругого пластика толщиной 3 мм,

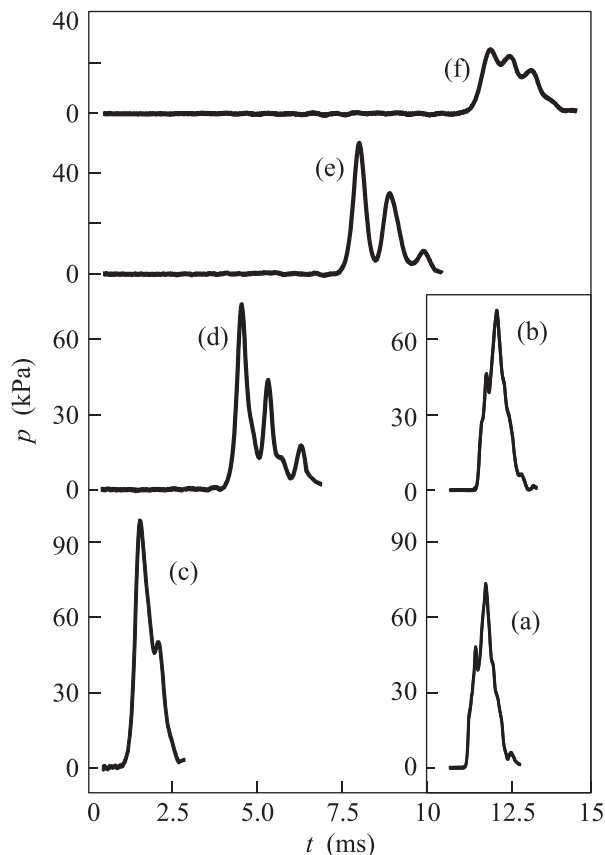


Рис. 1. Профили давления при эволюции сигнала с пологим передним фронтом: (а), (b) – в “чистой” жидкости на расстояниях 120 и 620 мм; (с), (d), (е), (f) – в газожидкостной смеси на расстояниях 120, 620, 1120 и 1620 мм соответственно

представлены на рис. 1. Профили давления (а), (b), снятые, соответственно, с первого и второго датчиков, отвечают эволюции сигнала в “чистой” жидкости. Профили (с), (d), (е), (f), снятые с датчиков 1–4 отвечают эволюции такого же сигнала в газожидкостной смеси. Эволюция сигнала с пологим фронтом здесь соответствует модели уравнения БКВ. Сигнал распадается на три солитона, амплитуда которых вследствие диссипации уменьшается. Они сливаются и превращаются в треугольную волну Бюргерса.

Эволюция входного сигнала в “чистой” жидкости с крутым передним фронтом, полученного на дюралевой мембране толщиной 3.3 мм, показана на рис. 2. Изменение профилей давления (а), (b), (с) с первых трех датчиков в “чистой” жидкости связано с проявлением дисперсии, вязкости и нелинейности жидкости с микропузырьками. Незначительность этих изменений позволяет считать газожидкостную смесь с

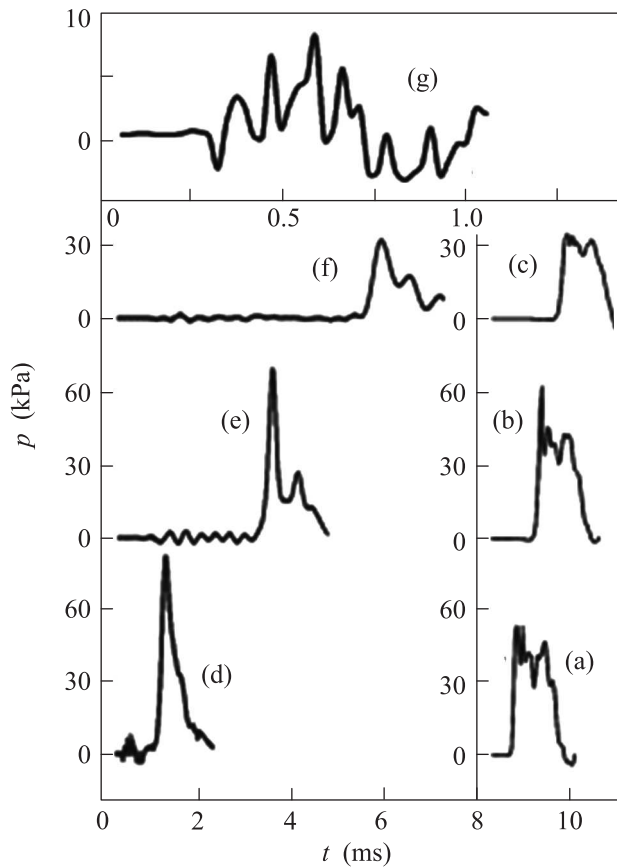


Рис. 2. Профили давления при эволюции сигнала с крутым передним фронтом в “чистой” жидкости (a), (b), (c) и в газожидкостной смеси (d), (e), (f) на расстояниях 120, 620 и 1120 мм соответственно, а также предвестник в увеличенном масштабе (g)

микропузырьками “чистой” жидкостью, т.е. однородной средой, с пониженной скоростью звука.

Эволюция сигнала с крутым передним фронтом в пузырьковой смеси показана на профилях давления (d), (e), (f) на рис. 2, снятых, соответственно, с первого, второго и третьего датчика. Форма основного сигнала здесь также эволюционирует согласно уравнению БКВ, но отличается наличием предвестников, движущихся со скоростью звука в “чистой” жидкости. Предвестник на фронте рис. 2d показан в увеличенном масштабе (рис. 2g). Предвестник представляет собой суперпозицию одного периода колебания НЧ на частоте w_1 и около 11 периодов колебаний предвестника Зоммерфельда на частоте w_r , движущихся с одинаковой скоростью c_2 . Измеренные значения c_0 и c_2 между первым и вторым датчиками составили 154 и 869 м/с, а между вторым и третьим – 143 и 833 м/с. Различие в скоростях звука между разными датчиками здесь связано с увеличением газо-

содержания за счет снижения статического давления столба жидкости по высоте трубы.

Cos-фурье спектры предвестников, выделенных на профилях давления (d), (e) и (f) на рис. 2, приведены на рис. 3a, b и c соответственно. Различие в

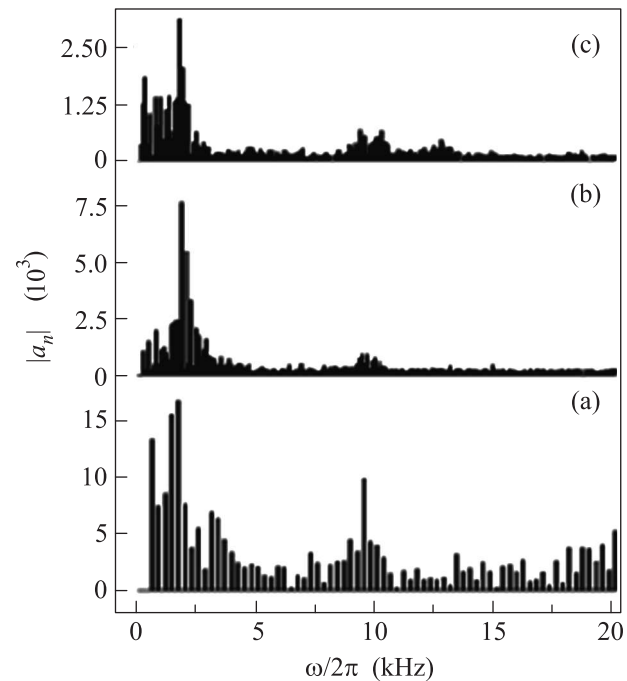


Рис. 3. Cos-фурье спектры (a), (b), (c) предвестников с профилями давления (d), (e), (f) на рис. 2

плотностях заполнения спектров связано с различным количеством приходящихся на предвестники точек отсчета, снятых с разных датчиков. Предвестником при фурье-анализе считался сигнал от начала реализации до точки последнего локального минимума перед основным сигналом (см. рис. 2g).

На спектре (a) отчетливо выделяются два максимума на частотах 1.67 и 9.44 кГц, отвечающих НЧ- и ВЧ-предвестникам. Их амплитуды сопоставимы и отличаются в 1.72 раза. На спектре (b) частоты НЧ- и ВЧ-предвестников составляют 1.79 и 9.58 кГц, но относительная амплитуда ВЧ-предвестника здесь в 6.26 раз ниже. Вычисленные по значениям c_0 , c_2 и $w_1/2\pi$ частоты ВЧ-предвестников w_r между датчиками составляют 9.44 и 10.4 кГц соответственно. В первом случае совпадение измеренной и вычисленной частот w_r подтверждает вывод о том, что частота НЧ-предвестника совпадает с резонансной частотой $w_1/2\pi$. Во втором случае 9-процентная ошибка связана с неточностью измерения скорости c_2 , вызванной малой амплитудой ВЧ-предвестника.

На спектре (с) предвестника, снятого с третьего датчика, выделяются частоты НЧ- и ВЧ-предвестников – 1.72 и 10.2 кГц, а также комбинационная частота 11.8 кГц.

Более отчетливо НЧ-предвестники выделяются из входных сигналов, полученных с использованием никелевых мембран толщиной 0.2 мм. Эволюция такого сигнала в “чистой” жидкости показана на рис. 4 на профилях давления (а) и (b), снятых с первого

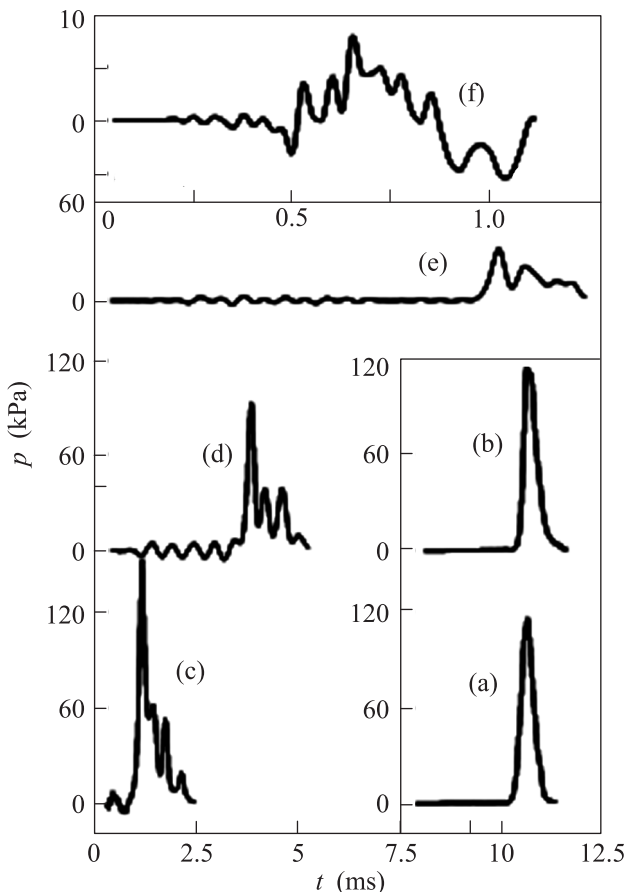


Рис. 4. Профили давления при эволюции сигнала с умеренно крутым передним фронтом: (а), (b) – в “чистой” жидкости на расстояниях 120 и 620 мм, (с), (d), (е) – в газожидкостной смеси на расстояниях 120, 620 и 1620 мм. (f) – Предвестник на профиле (с) в большом масштабе

и второго датчиков, а в газожидкостной смеси – на профилях (с), (d), (е), снятых с первого, второго и четвертого датчиков. Здесь НЧ-предвестник имеет большую амплитуду, чем в предыдущем случае, и распространяется с меньшим затуханием, чем основной сигнал. Высокочастотный предвестник на профиле (с) хорошо различим в большом масштабе (f).

Влияние микропузырьков на форму сигналов в “чистой” жидкости здесь не прослеживается.

Отождествляя амплитуды НЧ- и ВЧ-предвестников с амплитудами гармоник на спектрах рис.3 на частотах w_1 и w_r , уменьшающимися, соответственно, в 2 и 10 раз на расстояниях 0.5 м от датчика к датчику, можно оценить коэффициенты затухания: $\nu_1 = 2c_2 \ln 2 \approx 1200 \text{ с}^{-1}$ и $\nu_2 = 2c_2 \ln 10 \approx 4000 \text{ с}^{-1}$. Последний датчик был расположен на расстоянии 0.6 м от конца трубы. Таким образом, отраженный с коэффициентом $K_R \approx -1$ от границы раздела газожидкостная смесь-воздух НЧ-предвестник должен изменить амплитуду с задержкой $t_4 = 2d_4/c_2 \approx 1.3 \text{ мс}$ в $1 - \exp(-\nu_1 t_4) \cos(w_1 t_4) \approx 1.17$ раз. В зависимости от фазы $w_1 t_4$ суммарный сигнал может усилиться или ослабнуть. Для последующих датчиков эти изменения составят, соответственно, 1.04, 1.01 и 1.001 раза. Однако ввиду большой задержки ($t_1 = 4.6 \text{ мс}$) отраженный сигнал на первом датчике не фиксируется. Поскольку затухание ВЧ-предвестников в 5 раз выше, такие расчеты для них не имеют смысла.

Теоретическое обоснование существования НЧ-предвестников может быть получено только в рамках гетерогенной модели газожидкостной смеси, учитывающей межпузырьковое пространство как выделенный канал чистой жидкости. В существующих работах по гетерогенным моделям [22–24] трехмерное акустическое поле в смеси рассчитывается как сумма рассеянных от каждого пузырька полей. Это предполагает только численные расчеты и затрудняет аналитические оценки. Рассмотрим данную задачу в упрощенной двумерной постановке, считая газожидкостный канал плоским и расслоенным по середине. Примем ширину канала равной диаметру ударной трубы d . Линейные волновые уравнения для потенциалов скоростей в “чистой” жидкости и в газожидкостной смеси без учета сжимаемости жидкости и диссипации примут вид

$$\begin{aligned} \Delta \Phi - c_f^{-2} \Phi_{tt} &= 0, \\ \Delta \Psi - c_1^{-2} \Psi_{tt} + w_1^{-2} \Delta \Psi_{tt} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Решения (9) для бегущих волн $\Phi = \phi(y)e^{iwt-ikx}$ и $\Psi = \psi(y)e^{iwt-ikx}$ с нулевыми граничными условиями на стенках канала для поперечных скоростей $\phi_y(0) = 0, \psi_y(d) = 0$ имеют вид $\phi = A \cos(ay)$ и $\psi = B[\text{tg}(bd) \sin(by) + \cos(by)]$. Дополнительные граничные условия на границе раздела: равенства скоростей, $\phi_y(d/2) = \psi_y(d/2)$, и давлений, $\phi(d/2) = \psi(d/2)$ (без учета разницы плотностей), приводят к системе однородных уравнений от-

носительно A и B , разрешаемых при равенстве нулю их определителя:

$$a \operatorname{tg}(ad/2) + b \operatorname{tg}(bd/2) = 0, \quad (10)$$

где $a^2 = w^2/c_f^2 - k^2$ и $b^2 = (w^2/c_1^2)/(1 - w^2/w_1^2) - k^2$. Уравнение (10) является искомым дисперсионным уравнением со множеством решений $k(w)$, отражающих различные моды волн в акустическом волноводе, и в общем виде разрешается только численно. При $ad, bd \ll 1$ при учете только первого члена в разложении tg из (10) следует дисперсионное уравнение $a^2 + b^2 = 0$, совпадающее с однорезонансным дисперсионным уравнением (1), но с усредненным по ширине канала газосодержанием (результат, известный для расслоенных течений [25]). Другое частное решение (10) имеет место при $ad = 2\pi n$ и $bd = 2\pi m$ (где n, m – целые числа), когда обнуляются оба слагаемых в (10). Каждое из этих решений, записанное для фазовой скорости $V(w) = w/k$:

$$V_{an}(w) = c_f \sqrt{\frac{w^2}{w^2 - w_{an}^2}}, \quad w_{an} = \frac{2c_f \pi}{d} n, \\ V_{bm}(w) = c_1 \frac{w_{bm} w}{\Omega_m w_1} \sqrt{\frac{w_1^2 - w^2}{w^2 - w_{bm}^2}}, \quad (11) \\ \Omega_m = \frac{2c_1 \pi}{d} m, \quad \frac{1}{w_{bm}^2} = \frac{1}{\Omega_m^2} + \frac{1}{w_1^2},$$

отвечает n -й и m -й модам волн в полуканале как в плоском акустическом волноводе шириной $d/2$, заполненном, соответственно, жидкостью либо газожидкостной смесью. Здесь w_{an} и Ω_m – гармоники резонансных частот w_{a1} и Ω_1 жидкостного и газожидкостного каналов соответственно. Точки пересечения кривых $V_{an}(w)$ и $V_{bm}(w)$ будут принадлежать дисперсионным кривым решений (10). Обозначим их двухиндексными модами $V_{nm}(w)$. Согласно (11) каждая мода в жидкости определена в области частот $w_{an} < w < \infty$, а в газожидкостной области – в полосе частот $w_{bm} < w < w_1$. В нашем случае жидкостной канал узок ($w_{a1} \gg w_1$). Поэтому пересекаться будут только кривые V_{bm} ($m > 0$) с прямой линией $V_{a0} = c_f$, а решениями (10) окажутся моды волн V_{0m} . Рассмотрим самую низкочастотную моду, $V_{01}(w)$. Из уравнения $V_{b1}(w) = c_f$ при экспериментальных значениях параметров вычислим одну точку, $w_{01} \approx 0.999986w_1$, принадлежащую дисперсионной кривой $V_{01}(w)$, зависимость которой от w можно найти разложением (10) в ряд по $w - w_{01}$. Газожидкостной канал также узок ($\Omega_1 \gg w_1$). В результате частоты высоких мод w_{0m} ($m > 1$) еще меньше отличаются от резонансной частоты w_1 . Очевидно, что

этому закону дисперсии и принадлежит обнаруженный НЧ-предвестник.

Полученный результат принципиально не изменится при усложнении задачи в цилиндрическом канале и произвольном расположении точки расслоения газожидкостной смеси. Усложнение волновой картины НЧ-предвестников и ее зависимость от точки расслоения возникают только в широких каналах, где $\Omega_1 \ll w_1$ либо $w_{a1} \ll w_1$.

Таким образом, при распространении нелинейных волн в газожидкостных смесях с пузырьковой структурой в вертикальной трубе наблюдались два вида предвестников, распространяющихся со скоростью звука в “чистой” жидкости c_2 : ВЧ-предвестники Зоммерфельда и НЧ-предвестники, являющиеся ненулевой модой волны в акустическом волноводе и колеблющиеся, соответственно, на верхней (w_r) и нижней (резонансной, w_1) граничных частотах окна непрозрачности.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства России # 11.G34.31.0035 ведущему ученому В.Е. Захарову.

1. A. Sommerfeld, Ann. Phys. **44**, 177 (1914).
2. L. Brillouin, Ann. Phys. **44**, 203 (1914).
3. Л. Л. Вайнштейн, УФН **118**, 339 (1976).
4. K. E. Oughstun and G. C. Sherman, *Electromagnetic Pulse Propagation in Causal Dielectrics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
5. A. Karlsson and S. Rikte, *The Time-Domain Theory of Forerunners*, Lund, Sweden, 1997.
6. B. Maske and B. Segard, Phys. Rev. A **86**, 013837 (2012).
7. P. Pleshko and I. Palocz, Phys. Rev. Lett. **22**, 1201 (1969).
8. J. Aaviksoo, J. Kuhl, and K. Ploog, Phys. Rev. A **44**, R5353 (1991).
9. S. Choi and U. Osterberg, Phys. Rev. Lett. **92**, 193903 (2004).
10. E. L. Carstensen and L. L. Foldy, J. Acoust. Soc. Amer. **19**, 481 (1947).
11. F. Fox, S. Curley, and G. Larson, J. Acoust. Soc. Amer. **27**, 534 (1955).
12. В. А. Ларичев, Г. А. Максимов, Акустический журнал **44**, 814 (1998).
13. Г. А. Максимов, В. А. Ларичев, Акустический журнал **49**, 656 (2003).
14. Б. С. Когарко, ДАН СССР **137**, 1331 (1961).
15. В. Е. Накоряков, В. Г. Гасенко, И. Р. Шрейбер, ПМТФ **18**, 119 (1979).
16. В. В. Кузнецов, В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, И. Р. Шрейбер, Письма в ЖЭТФ **24**, 194 (1976).

17. K. Ando, T. Colonius, and C.E. Brennen, *Int. J. Multiphase Flow* **37**, 596 (2011).
18. В. К. Кедринский, *Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели*, Новосибирск: Из-во СО РАН, 2000.
19. N. V. Mal'kh and I. A. Ogorodnikov, *J. Physique* **40**, 300 (1979).
20. А. А. Карабутов, В. А. Ларичев, Г. А. Максимов, И. М. Пеливанов, *Акустический журнал* **52**, 676 (2006).
21. V. G. Gasenko and V. E. Nakoryakov, *J. Eng. Thermophysics* **17**, 158 (2007).
22. Z. Ye and A. Alvarez, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 3503 (1998).
23. K. Wang and Z. Ye, *Phys. Rev. E* **64**, 056607 (2001).
24. M. Kafesaki, R. S. Penciu, and E. N. Economou, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 6050 (2000).
25. S. Marioka and G. Matsui, *J. Fluid Mech.* **70**, 721 (1975).