Письма в ЖЭТФ, том 98, вып. 5, с. 285 – 291

Идентификация квантовых взаимных корреляций между атомом и светом при рассеянии атома в поле стоячей световой волны

А. И. Трубилко

Лаборатория квантовой информации и вычислений, государственный университет аэрокосмического приборостроения, 195426 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 24 мая 2013 г.

После переработки 1 июля 2013 г.

Для идентификации квантовых взаимных корреляций между двухуровневым атомом и резонаторной модой рассмотрено рассеяние атома на стоячей световой волне. Показано, что в условиях когерентного рассеяния наблюдается сильный эффект, позволяющий отличить коррелированное состояние системы от независимого.

DOI: 10.7868/S0370274X13170025

1. Введение. Задача полной идентификации состояния квантовой системы является достаточно сложной. Для ее решения в общем случае требуется определить все элементы матрицы плотности системы или корреляционные функции произвольного порядка, что не всегда представляется возможным. Только для случая гауссового класса состояний задача имеет относительно простое решение, поскольку здесь надо знать только первый и второй моменты распределения. Так, например, в случае одномодового излучения задача решается методами квантовой полевой томографии [1]. В случае однофотонного состояния она экспериментально реализована в [2]. В основе метода лежит представление матрицы плотности через базисные операторы. При этом коэффициенты разложения являются вероятностями наблюдаемых полевых квадратур. В работе [3] предложен метод квантовой томографии поляризационных степеней свободы многомодовых световых полей. В [4] осуществлена томография смешанных поляризационных состояний кубитов и кутритов, что используется для оптимизации ряда протоколов квантовой информатики [5]. Вместе с тем в некоторых случаях имеют дело с состояниями системы, состоящей всего из двух компонент, которые связаны между собой или коррелированы, и необходимо выявить их связь. Именно такие системы, находящиеся в особом квантовом перепутанном состоянии, используются в качестве ресурса протоколов квантовых коммуникаций, являясь основой кодирования, распределения и измерения информации.

Здесь обсуждается система, состоящая из одиночного двухуровневого атома и уединенной резонаторной моды. Квантовая корреляция между ними создана посредством воздействия на систему двух широкополосных квазимод невырожденного параметрического источника. В определенных условиях, при слабом взаимодействии с подсистемой, световые поля источника могут выступать в роли термостатов. Их состояние не изменяется. Усреднение по состоянию термостатов позволяет определить состояние объединенной системы, которое описывается несепарабельной матрицей плотности $\rho_{af}^{(1)}$. Состояния отдельных систем собственно атома и резонаторного поля описываются матрицами плотности $\rho_a = Sp_f \rho_{af}^{(1)}$, $\rho_f = Sp_a \rho_{af}^{(1)}$, полученными в результате усреднения ρ_{af} по полевым и атомным переменным соответственно. Эти же самые состояния атома и полевой моды могут быть получены и в результате воздействия на них широкополосных полей от двух независимых источников с теми же значениями средних, что и в первом случае. При этом состояние атомно-полевой системы факторизуется, $\rho_{af}^{(2)} = \rho_a \bigotimes \rho_f$. Как отличить состояние $\rho_{af}^{(1)}$, обладающее взаимными корреляциями, от состояния независимых систем $\rho_{af}^{(2)}$? В прикладном плане описанная задача возникает в случае кодирования, передачи и считывания информации. Последняя может быть закодирована некоторым классическим заданным параметром, который определяет также и взаимную квантовую корреляцию подсистем. Для считывания необходимо провести определенный тип проекционного измерения. Его возможно устроить, лишь если известно, что информация передана посредством корреляции. Квантовые взаимные корреляции могут быть использованы и для сохранения секретности, например когда они играют роль цифровой подписи и квантового распределения ключа. Злоумышленник перехватывает только одну из представленных подсистем, отождествляет ее и заменяет аналогичной. При этом корреляции, измеряемые в дальнейшем, разрушаются и состояние всей системы оказывается факторизованным. Чтобы обезопасить себя от вторжения, легитимным пользователям нужно верифицировать состояние и отличать состояния с квантовой корреляцией между системами от факторизованного. Представляет интерес ситуация, когда пользователь – единственный, но имеет в наличии две рассматриваемые системы. Поскольку атом описывается дискретными переменными, а световая мода – непрерывными, вид проекционного измерения и измерительный базис в общем случае построить достаточно сложно.

В данной работе для отождествления (или идентификации) корреляций между атомом и модой исследуется когерентное рассеяние атома на стоячей световой волне [6–8]. Мы исследовали задачу рассеяния при взаимодействии между атомом и полем в так называемом дисперсионном пределе, или в крыле линии поглощения, поскольку для эффективного рассеяния взаимодействие света с атомом может быть и достаточно слабым [6]. Вместе с тем при выбранном типе взаимодействия возникают интегралы движения, позволяющие получить уравнения только для трансляционных степеней свободы атома. В случае когерентного рассеяния атома при его нормальном падении на стоячую волну и брегговского рассеяния при начальном падении под углом в рассматриваемом варианте возникает сильный эффект, позволяющий отличить начальные ситуации. Для факторизованного начального состояния рассеяния вообще не возникает, в отличие от случая, когда атом и полевая мода обладают начальными корреляциями. Этот эффект определяется средним значением потенциальной энергии взаимодействия атома и моды, которая оказывается в точности равной нулю при приготовлении независимых систем. Следует отметить, что выявленный эффект обусловлен квантовыми корреляциями подсистем, а проявляется в классической динамике развития атома. С этой точки зрения рассматриваемая задача является важной и для определения квантово-классического соответствия. Обычно квантовые эффекты проявляются лишь как малые добавки к классическим величинам. Здесь, напротив, именно квантовые корреляции обусловливают сам эффект. К эффектам подобного проявления можно отнести изменение скорости релаксации двухуровневого атома в широкополосном сжатом световом поле [9], эффекты типа квантовой линзы [10] и квантовой призмы [11], связанные с отклонением атома на определенный угол в зависимости от фоковского состояния поля стоячей волны.

2. Квантовые корреляции одиночного двухуровневого атома и резонаторной уединенной полевой моды. Приготовление системы или подсистемы в заданном состоянии можно осуществить двумя способами: либо используя проекционное измерение, либо путем динамической эволюции системы. В обоих случаях предполагается, что выделенная анализируемая в дальнейшем подсистема входит в состав большой системы. В первом случае в момент измерения над частью подсистема проецируется в необходимое состояние. При этом исход измерения оказывается недетерминистическим (или вероятностным). Во втором случае, необходимое состояние подсистемы может быть получено детерминированным (унитарным или неунитарным) развитием всей системы. При этом ее состояние получается путем усреднения состояния всей системы по переменным, не участвующим в дальнейшем рассмотрении.

Наиболее просто квантовые корреляции между двумя системами даже разной физической природы получают посредством воздействия на них широкополосных электромагнитных полей, обладающих взаимными корреляциями. Такие связанные световые поля можно получить с помощью параметрического источника, основанного, например, на взаимодействии волн в нелинейной квадратичной среде. Процесс невырожденной по частоте параметрической генерации света из вакуума в поле интенсивной классической монохроматрической световой волны может быть описан эффективным гамильтонианом $V = i\hbar\chi(b_1^\dagger b_2^\dagger - \mathrm{h.c})$, где χ – константа связи, пропорциональная квадратичной восприимчивости нелинейной среды и интенсивности волны накачки с частотой Ω, $b_m^\dagger, b_m$ – операторы рождения и уничтожения квазимод $m = 1, 2$ с частотой ω_m: $\omega_1 + \omega_2 = \Omega$. Здесь предполагаются выполненными условия фазового синхронизма, которые связывают волновые векторы мод. Последние имеют конечную спектральную ширину $\delta\omega$, определяемую полосой синхронизма. Поэтому операторы рождения и уничтожения могут интерпретироваться как огибающих генерируемых компонент.

Пусть анализируемая система состоит из двухуровневого атома и уединенной высокодобротной резонаторной моды, не взаимодействующих между собой непосредственно и находящихся в разных областях пространства. В начальном состоянии атом и мода считаются независимыми, их состояние факторизовано. Пусть на такую систему действуют световые поля невырожденного по частоте и направлению распространения параметрического источника. В условиях, когда собственные спектральные ширины $\delta\omega$ квазимод параметрического источника много больше скоростей спонтанных распадов атома (γ) и резонаторной моды (C) в вакуум, световые поля играют роль термостатов для подсистемы и их состояние не изменяется. Для подсистемы, которую мы будем описывать посредством матрицы плотности ρ, можно вывести кинетическое управляющее уравнение [12]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_{af})\rho. \qquad (1)$$

Здесь действие релаксационного оператора $\mathcal{R}_a$ определено выражением

$$\mathcal{R}_a\rho = -\frac{\gamma}{2}\Big[N(S^-S^+\rho - 2S^+\rho S^- + \rho S^-S^+) + \\ + (N+1)(S^+S^-\rho - 2S^-\rho S^+ + \rho S^+S^-)\Big], \qquad (2)$$

зависящим только от атомных операторов $S^+ = |e\rangle\langle g|$ и $S^- = |g\rangle\langle e|$ перехода между нижним, $|g\rangle$, и верхним, $|e\rangle$, состояниями энергетического базиса двухуровневого атома. Атомные операторы отвечают коммутационным соотношениям $[S^+; S^-] = S_z$, $[S_z; S^\pm] = \pm 2S^\pm$, характерным для образующих алгебры углового момента, а $S_z = (|g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|)$ является оператором инверсии. Широкополосное поле соответствующей квазимоды параметрического источника проявляется средним значением ее числа фотонов $N = \langle b_m^\dagger b_m\rangle = \sinh^2(r)$, где r – параметр сжатия источника, зависящий от нелинейности среды и интенсивности классической волны накачки. Следует отметить, что все необходимые для построения уравнения корреляционные функции источника второго порядка по полевым операторам в обсуждаемых условиях δ-коррелированы во времени. Эта дельта-функция является крупномасштабной и имеет ширину, определяемую обратной шириной полосы синхронизма $(\delta\omega)^{-1}$.

Второе слагаемое в правой части (1) является операторозначной функцией только фотонных операторов рождения ($a^\dagger$) и уничтожения (a) резонаторной моды. Его явный вид определяется выражением

$$\mathcal{R}_f\rho = -\frac{C}{2}\Big[N(aa^\dagger\rho - 2a^\dagger\rho a + \rho aa^\dagger) + \\ + (N+1)(a^\dagger a\rho - 2a\rho a^\dagger + \rho a^\dagger a)\Big]. \qquad (3)$$

Операторы $a^\dagger, a$ подчиняются бозонным коммутационным соотношениям $[a^\dagger, a] = 1$ алгебры Гейзенберга–Вейля.

Наконец, последнее слагаемое в правой части (1) служит проявлением взаимной корреляции исходных квазимод термостата. Его действие сводится к выражению

$$\mathcal{R}_{af}\rho = -\sqrt{\gamma C}\Big[M(aS^-\rho - S^-\rho a - a\rho S^- + \rho aS^-) + \\ + M^*(a^\dagger S^+\rho - S^+\rho a^\dagger - a^\dagger\rho S^+ + \rho a^\dagger S^+)\Big], \qquad (4)$$

зависящему от комбинаций атомных и полевых операторов. Световые поля источников проявляются здесь средним значением величины межмодовой оптической когерентности, заданной аномальными средними: $M = \langle b_1^\dagger b_2^\dagger\rangle = \cosh r \sinh r \exp(-i\phi)$, где ϕ – фаза классической волны накачки. Указанные аномальные средние служат проявлением коммутационных соотношений вакуумных полей на входе источника и возникают только в рамках его квантовомеханического описания. Оптической когерентности внутри каждой квазимоды для рассматриваемого источника не возникает, поскольку в приведенной модели источника средние $\langle b_m^\dagger b_m^\dagger\rangle = \langle b_m b_m\rangle = 0$. Обсуждаемое слагаемое описывает эффективное нелокальное взаимодействие между атомом и модой, которое возникает из-за квантовых корреляций термостата и отвечает за перенос квантовых корреляций от термостата к подсистеме. Уравнение вида (1) описывает релаксацию различных физических систем в термостате, обладающем взаимными квантовыми корреляциями компонент, или перепутанном термостате. Оно выведено в ряде наших работ [12, 13].

Состояние отдельно атома или моды характеризуется соответствующей матрицей плотности ρ_i ($i = a, f$) и описывается уравнением вида

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} = \mathcal{R}_i\rho_i, \qquad (5)$$

которое получено для каждой из подсистем путем усреднения уравнения (1) по состоянию другой подсистемы. Уравнение (5) является следствием равенства $Sp_a(\mathcal{R}_{af}\rho) = Sp_f(\mathcal{R}_{af}\rho) = 0$ и описывает релаксацию отдельно атома или моды в любом широкополосном поле с заданным средним числом фотонов N. На его основе могут быть получены все необходимые атомные и/или полевые средние, характеризующие состояние отдельно атома или полевой моды. Например, в стационарном случае средние $\langle a^\dagger\rangle = \langle a\rangle = 0$, $\langle S^+\rangle = \langle S^-\rangle = 0$. Среднее число фотонов резонаторной моды $\langle a^\dagger a\rangle$ определяется средним числом фотонов N соответствующей квазимоды широкополосного источника. Посредством этого же параметра определяется и стационарное среднее значение инверсии $\langle S_z\rangle$ двухуровневого атома:

$$\langle a^\dagger a\rangle = N, \quad \langle S_z\rangle = -\frac{1}{2N+1}. \qquad (6)$$

Вместе с тем, как следует из основного уравнения (1), в стационарных условиях между атомом и модой возникают корреляции, обусловленные связью квазимод источника. Это отражено наличием последнего слагаемого в (1). Так, например, отличными от нуля оказываются стационарные аномальные атомно-полевые средние $\langle S^+a^\dagger\rangle = \langle S^-a\rangle \neq 0$, которые и играют определяющую роль для квантовых корреляций коллективной системы. Эти средние носят существенно квантовый характер, поскольку могут быть получены только посредством широкополосного квантового источника света и не могут быть получены в рамках классического описания электромагнитных полей. В частности, именно эти средние приводят к полному подавлению (или отсутствию корреляции) среднего от совместного действия операторов числа фотонов резонаторной моды и инверсии двухуровневого атома, $\langle a^\dagger a S_z\rangle = 0$, для рассматриваемого здесь параметрического источника. При возбуждении атома и моды независимыми широкополосными источниками света с теми же значениями средних, что и у параметрического источника, рассматриваемое среднее факторизуется, $\langle a^\dagger a S_z\rangle = \langle a^\dagger a\rangle\langle S_z\rangle$, и, естественно, отлично от нуля ввиду соотношений (6). В работе [14] показано, что в исследуемой системе в стационарных условиях обнаруживаются квантовые взаимные корреляции между атомом и резонаторной модой.

3. Рассеяние атомов в поле стоячей световой волны. Корреляции между одиночным двухуровневым атомом и уединенной полевой модой, порождаемые квантовыми корреляциями мод перепутанного термостата (параметрического источника), могут проявляться в различных физических явлениях. При этом как и возникновение этих корреляций в системе, так и их выявление могут осуществляться либо при проекционном измерении, либо при динамическом взаимодействии. Несомненный интерес представляет не только обнаружение проявления квантовых корреляций в том или ином эффекте, но и обсуждение физической ситуации, в которой само явление было бы способно выявить такие корреляции или их отсутствие. Хорошо известно, что статистика светового поля проявляется в эффектах рассеяния атома в световом поле стоячей волны. Общее решение такой задачи оказывается сложным ввиду ее многопараметричности. Мы продемонстрируем проявление корреляций между системами при когерентном рассеянии, когда наблюдаемый эффект оказывается сильным и позволяет отличить случай с квантовыми корреляциями от случая независимых подсистем.

Будем предполагать следующую постановку эксперимента. Пусть поле стоячей световой волны образовано одной из квазимод широкополосного внешнего источника света. Атом, движущийся вдоль направления z, до взаимодействия со стоячей волной в некоторой области пространства взаимодействует с широкополосным полем другой квазимоды. Поскольку внешнее для атома широкополосное поле представляет собой бегущую волну, а само взаимодействие является слабым, можно пренебречь эффектами отдачи. Таким образом готовится начальное состояние атома и стоячей волны до их взаимодействия. Теперь будем предполагать, что на входе резонатора имеется однородное по поперечному направлению распределение монокинетических атомов, обладающих импульсом p и пролетающих через резонатор по одному, с заданными начальными корреляциями атома и поля. Мы будем обсуждать две ситуации: либо атом и мода обладают взаимными корреляциями, либо они независимы. Эти состояния описываются стационарными решениями уравнения (1), причем состояния собственно атома и моды по отдельности абсолютно одинаковы и определены стационарными решениями уравнений (5). Нас будет интересовать распределение атомов после взаимодействия со стоячей волной резонатора.

Отдельный атом, пролетая резонатор за время τ, взаимодействует с полем стоячей световой волны, имеющей пространственную неоднородность вдоль оси x. Чтобы начальное состояние атомно-полевой системы не было разрушено, а взаимные корреляции проявились в рассеянии, время взаимодействия должно быть много меньше скорости релаксации атома и полевой моды в вакууме: $\tau \ll \gamma, C$. Последние для простоты расчета положим одинаковыми по величине, что достижимо в современных экспериментах. В условиях задачи рассеяния наряду с внутренним состоянием атома необходимо учитывать и его трансляционные степени свободы. Кроме того, будем считать, что взаимодействие атома и светового поля осуществляется далеко в крыле линии поглощения (или в так называемом дисперсионном пределе). Как известно [15], такая динамическая задача рассеяния описывается с помощью гамильтониана вида

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} - \mathcal{U}\sin^2(kx). \tag{7}$$

Здесь первое слагаемое в правой части является оператором кинетической энергии движения атома (m – масса атома), а второе – оператором взаимодействия атома и квантованной моды электромагнитного поля стоячей волны с волновым числом k в условиях дисперсионного предела [16, 12]:

$$\mathcal{U} = \hbar\frac{g^2}{\Delta}\left[a^\dagger a S_z + \frac{1}{2}(1+S_z)\right]. \tag{8}$$

При записи последнего следует обратить особое внимание на тот факт, что всегда должно быть выполнено условие $g^2\Delta^{-1}\langle a^\dagger a\rangle \ll 1$, где g – константа взаимодействия атома и моды, а $\Delta = |\omega_a - \omega_f|$ – частотная отстройка атомного перехода и полевой моды. Именно данное условие и позволяет записать атомно-полевое взаимодействие в выбранной форме (8).

Рассмотрим режим когерентного рассеяния при нормальном падении атомов на стоячую волну. Мы будем интересоваться распределением атомов по поперечной компоненте импульса, которое, как известно, имеет многопиковую структуру. Количество пиков при рассматриваемом нами взаимодействии может быть оценено [17] параметром $\tilde{N} = 1 + 2(\langle\mathcal{U}\rangle/\varepsilon_r)^{1/2}$. Будем считать, что выполнены следующие условия: 1) средняя потенциальная энергия взаимодействия атома и моды $\langle\mathcal{U}\rangle$ сравнима с энергией отдачи $\varepsilon_r = \hbar^2k^2/2m$, что отвечает эффективному рассеянию, где наблюдается $\tilde{N} = 3$ пика в импульсном распределении; 2) время взаимодействия τ достаточно велико, $\varepsilon_r\tau > 1$. Вместе с тем надо помнить, что время взаимодействия всегда много меньше времен релаксации систем (именно этот факт и определяет здесь термин когерентности). В этих условиях возникает резонанс для трех атомных волн со значениями поперечного импульса $p_x = 0, \pm 2\hbar k$. Для описания рассеяния мы должны получить уравнение движения трансляционных степеней свободы атома. Для его вывода воспользуемся уравнением эволюции полной атомно-полевой системы:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\Big[\mathcal{H};\rho\Big]. \tag{9}$$

Проведем усреднение (9) по полевым степеням свободы и внутренним степеням свободы атома. Тогда для матричного элемента трансляционного движения атома $\rho_{x_1x_2} = \langle x_1|\rho^t|x_2\rangle = \langle x_1|Sp_{a,f}\rho|x_2\rangle$ имеем уравнение, которое позволяет представить эту матрицу плотности в факторизованном виде и получить стандартное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial\Psi(x;t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_x^2 + \langle\mathcal{U}\rangle\sin^2(kx)\right]\Psi(x;t), \tag{10}$$

имеющее вид уравнения Матье, известного в теории рассеяния атома на стоячей волне. Поскольку оператор $\mathcal{U}$ является интегралом движения, его среднее значение существенным образом зависит от способа начального приготовления атомно-полевой системы. Так, при приготовлении начального состояния системы, обладающей корреляциями между атомом и модой, $\langle\mathcal{U}\rangle \neq 0$, в то время как для независимых атома и моды $\langle\mathcal{U}\rangle = 0$. Это означает, что при втором способе приготовления системы когерентное рассеяние атома вообще отсутствует, что и позволяет резко отличить начальные состояния системы в рассматриваемом случае. В этом смысле эффект является сильным.

Для описания рассеяния в эффективном потенциале при коррелированном начальном состоянии системы представим волновую функцию в виде разложения по плоским волнам: $\Psi(x;t) = \sum_n a_n(t)\exp(inkx)$, где коэффициенты $a_n(t)$ являются парциальными амплитудами вероятности нахождения атома в данном состоянии. В этих приближениях предполагается, что начальное распределение атомов по поперечным импульсам – достаточно узкое, практически дельтаобразное, и значение начального поперечного импульса меньше, чем импульс фотона $\hbar k$. Для отличных от нуля $a_n(t)$ из (10) справедлива простая система зацепляющихся уравнений:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial a_0}{\partial t} &= -\frac{\langle\mathcal{U}\rangle}{4}\Big[2a_0 - (a_{-2} + a_{+2})\Big], \\ i\hbar\frac{\partial a_{\pm2}}{\partial t} &= -\Big(\frac{\langle\mathcal{U}\rangle}{2} - 4\varepsilon_r\Big)a_{\pm2} + \frac{\langle\mathcal{U}\rangle}{4}a_0, \end{aligned} \tag{11}$$

которую надо решать с начальным условием $a_n(t = 0) = \delta_{n,0}$.

Импульсное распределение атомов на выходе резонатора, полученное в результате усреднения по однородному распределению атомов на входе, представляет трехпиковую структуру, интенсивности которой определяют вероятность нахождения атомов в том или ином состоянии. Величины пиков равны

$$\begin{aligned} W_0(\tau) &= |a_0(\tau)|^2 = \\ &= \cos^2\big(\tilde{\Omega}\tau\big) + \frac{(4\varepsilon_r)^2}{(4\varepsilon_r)^2 + 0.5\langle\mathcal{U}\rangle^2}\sin^2\big(\tilde{\Omega}\tau\big), \\ W_{\pm2}(\tau) &= |a_{\pm2}(\tau)|^2 = \frac{1}{4}\frac{\langle\mathcal{U}\rangle^2}{(4\varepsilon_r)^2 + 0.5\langle\mathcal{U}\rangle^2}\sin^2\big(\tilde{\Omega}\tau\big), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\tilde{\Omega} = (2\hbar)^{-1}\sqrt{(4\varepsilon_r)^2 + 0.5\langle\mathcal{U}\rangle^2}$. Таким образом, в условиях коррелированной квантовой связи атома и полевой моды и когерентного рассеяния атома на поле стоячей волны в импульсном распределении атомов наблюдается три характерных пика, которые отсутствуют в случае приготовления систем в независимом состоянии с теми же средними.

Найденный эффект не является единственным. Рассмотрим его проявление для пространственного распределения атомов при когерентном брегговском рассеянии [18]. Последнее наблюдается при наклонном падении атомного пучка на стоячую волну. Само рассеяние оказывается эффективным, если угол между вектором начального импульса атома $\mathbf{p}_0$ и перпендикуляром к волновым векторам стоячей волны равен брегговскому углу $\theta_{\rm B} = \pm(k/p_0) \ll 1$. Описание трансляционного движения центра масс атомов, определяемое радиусом-вектором $\mathbf{r}$, в такой постановке отвечает уравнению Шредингера, аналогичному (10), с заменой $x \to \mathbf{r}$, $\nabla_x^2 \to \nabla_{\mathbf{r}}^2$. Последнее посредством унитарного преобразования $\Psi(\mathbf{r};t) = \exp\big(-i\mathbf{p}_0\mathbf{r} - i\frac{\hbar p_0^2 t}{2m}\big)\psi(x;t)$ дает уравнение для $\psi(x;t)$ следующего вида:

$$\frac{\partial\psi(x;t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\Big[\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\hbar p_{0x}}{m}\frac{\partial}{\partial x} + \langle\mathcal{U}\rangle\sin^2(kx)\Big]\psi(x;t). \quad (13)$$

Представим искомую функцию в виде разложения в ряд Фурье: $\psi(x;t) = \sum_n a_n(t)\exp(inkx)$, где коэффициенты $a_n(t)$ являются парциальными амплитудами вероятности нахождения атома в момент времени t в пучках, отклоненных от первоначального направления движения на углы $n\theta_{\rm B}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, ...)$. Эти коэффициенты удовлетворяют системе зацепляющихся уравнений, следующей из (13):

$$i\frac{\partial a_n}{\partial t} = \Big(n^2\omega_r + n\delta\Big)a_n + \frac{\langle\mathcal{U}\rangle}{4\hbar}\Big(a_{n+2} + a_{n-2} - 2a_n\Big), \quad (14)$$

где $\omega_r = \hbar^{-1}\varepsilon_r$, $\delta = kp_{0x}/m$. Систему (14) надо решать при начальном условии $a_n(0) = \delta_{n,0}$.

В условиях точного брегговского резонанса при определенном угле падения атома выполняется соотношение $2\omega_r \mp \delta = 0$. При этом первое слагаемое в правой части (14) равно нулю при $n = 0, \pm2$ и "выживают" только амплитуды вероятности с $n = 0$ и ∓2, которые описывают нерассеянный и рассеянные пучки атомов. Вероятности нахождения атома в рассеянных и нерассеянном пучках в данных условиях задаются квадратами модулей $|a_n|^2$. Они определены соотношениями

$$W_0(\tau) = |a_0(\tau)|^2 = \frac{1}{2}\Big[1 + \cos(\tilde{\Omega}\tau)\Big], \quad (15)$$
$$W_{\mp2}(\tau) = |a_{\mp2}(\tau)|^2 = \frac{1}{4}\Big[1 - \cos(\tilde{\Omega}\tau)\Big],$$

где эффективная частота определена средним значением энергии атомно-полевого взаимодействия $\tilde{\Omega} = \sqrt{2}\hbar^{-1}\langle\mathcal{U}\rangle$. Мы снова получаем сильный эффект, отвечающий рассеянию атомов под определенными углами только в случае, если начальная атомно-полевая система обладает квантовыми корреляциями между атомом и полем. В случае независимого приготовления систем рассеяние отсутствует. Естественно, полная вероятность обнаружения атома сохраняется в силу унитарной динамики процесса когерентного брегговского рассеяния. Обратим внимание на еще одно важное обстоятельство, следующее из соотношений (15). В случае, если время взаимодействия атома с полем стоячей волны такое, что $\tilde{\Omega}\tau = (2m+1)\pi$ (где $m = 0, 1, 2, ...$), вероятности симметрично отклоненных пучков оказываются одинаковыми и равными пятидесяти процентам. В этих условиях мы имеем делитель атомного пучка, являющийся важным элементом квантовых коммуникационных технологий. Отметим, что в рассмотренной нами ситуации такой делитель обусловлен исключительно начальными квантовыми корреляциями подсистем.

В заключение приведем оценки рассматриваемых здесь эффектов. Следует отметить, что современная техника эксперимента уже позволяет манипулировать с уединенными квантовыми объектами. Так, удается сконструировать высокодобротные резонаторы, в которых скорость релаксации фотонной моды достигает значений $\Gamma \sim 10^4 - 10^6$ с$^{-1}$. Времена жизни этого же порядка могут наблюдаться и для ряда атомных переходов, например для ридберговских состояний. Типичные скорости атомных пучков составляют $10^2 - 10^5$ см/с , а поперечная область локализации световой моды равна 10^{-3} см. Следовательно, пролетное время атома через резонатор составляет $10^{-5} - 10^{-8}$ с. Для выполнения условий когерентного рассеяния при взаимодействии атома с модой в дисперсионном пределе необходимо лишь незначительное среднее число фотонов в резонаторе. Поэтому мощности световых пучков в резонаторе должны составлять десятые доли ватта. Итак, мы показали, что квантовые взаимные корреляции между атомом и резонаторной модой могут быть выявлены при когерентном рассеянии атомов на стоячей световой волне. При этом обнаружено сильное различие между ситуациями, в которых атом и мода коррелированы и независимы. В случае факторизованного начального состояния систем эффекта рассеяния не наблюдается.

Автор благодарен С.П. Кулику за полезные обсуждения.

---

1. K. Vogel and H. Risken, Phys. Rev. A **40**, 2847 (1987); D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani,

Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993); U. Leonhardt, H. Paul, and G. M. D'Ariano, Phys. Rev. A **52**, 4899 (1995).

2. A. I. Lvovsky, H. Yansen, T. Aichele et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 050402 (2001).
3. В. П. Карасев, А. В. Масалов, ЖЭТФ **126**, 63 (2004).
4. Ю. И. Богданов, А. К. Гавриченко, К. С. Кравцов и др., ЖЭТФ **140**, 224 (2011).
5. Ю. И. Богданов, С. П. Кулик, Е. В. Морева и др., Письма в ЖЭТФ **91**, 755 (2010).
6. А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович, В. П. Яковлев, *Механическое действие света на атомы*, М.: Наука, 1991.
7. M. K. Oberthaler, B. Abfalterer, S. Barnet et al., Phys. Rev. Lett. **77**, 4980 (1996); M. K. Oberthaler, B. Abfalterer, S. Barnet et al., Phys. Rev. A **60**, 456 (1999).
8. P. J. Martin, B. J. Oldager, A. H. Miklich, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **60**, 515 (1988).
9. C. W. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **56**, 1917 (1986).
10. I. Sh. Averbukh, V. M. Akulin, and W. P. Scheich, Phys. Rev. Lett. **72**, 437 (1994).
11. P. Domokos, P. Adam, J. Janszky, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **77**, 1663 (1996).
12. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **89**, 571 (2009); В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **135**, 227 (2009).
13. В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **92**, 689 (2010); В. Н. Горбачев, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **138**, 616 (2010).
14. А. И. Трубилко, Письма в ЖЭТФ **95**, 48 (2012); А. И. Трубилко, ЖЭТФ, **141**, 659 (2012).
15. В. П. Шляйх, *Квантовая оптика в фазовом пространстве*, М.: Физматлит, 2005.
16. A. M. Basharov, V. N. Gorbachev, and A. A. Rodichkina, Phys. Rev. A **74**, 042313 (2006); А. М. Башаров, В. Н. Горбачев, Опт. и спектр. **102**, 641 (2007).
17. С. В. Борисенок, Ю. В. Рождественский, Изв. РГПУ им. Герцена, сер. Физика **7**, 32 (2007).
18. М. В. Федоров, М. А. Ефимов, В. П. Яковлев, В. П. Шляйх, ЖЭТФ **124**, 578 (2003).