

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ГАМОВА НА МНОГОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В.С.Попов, В.Д.Мур¹⁾, А.В.Сергеев²⁾

*Институт теоретической и экспериментальной физики
117259, Москва*

¹⁾*Московский инженерно-физический институт
115409, Москва*

²⁾*Государственный оптический институт им. С.И.Вавилова
199034, Ленинград*

Поступила в редакцию 3 апреля 1991 г.

Дано обобщение формулы Гамова для ширины уровня на случай многомерных систем с разделяющимися переменными. Получено условие применимости этого приближения.

1. В атомной и ядерной физике часто встречается задача о вычислении энергий и ширин квазистационарных состояний (резонансов). Если потенциал $U(x)$ является плавным, а ширина Γ мала, то в одномерном случае применима известная формула Гамова ^{1,2}. Мы рассмотрим ее обобщение для многомерных систем с разделяющимися переменными q_1, q_2, \dots, q_f (f - число степеней свободы).

2. Если проникаемость барьера экспоненциально мала, то туннелирование в многомерном потенциале происходит практически вдоль одной из координат, в качестве которой выберем ¹⁾ q_f . Используя модификацию правила квантования Бора - Зоммерфельда с учетом проникаемости барьера ^{3,4}, приходим к искомой формуле:

$$\Gamma = cT_f^{-1} \exp(-2\pi a_f), \quad (1)$$

где

$$c \doteq \left(\alpha v_f \sum_{i=1}^f 1/v_i \right)^{-1}, \quad T_f = 2 \int_{q_f^{(0)}}^{q_f^{(1)}} p_f^{-1} dq_f \quad (1a)$$

¹⁾Считая, что $\exp(-2\pi a_i) \ll \exp(-2\pi a_f)$ при $i = 1, \dots, f-1$. В квазиклассическом случае такое условие выполняется всегда (за исключением, быть может, систем со специальными свойствами симметрии).

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi} \text{Im} S_i = \frac{1}{\pi} \int_{q_i^{(1)}}^{q_i^{(2)}} (-p_i^2)^{1/2} dq_i, \quad (16)$$

$$S = \sum_{i=1}^f S_i = \sum_{i=1}^f \int p_i dq_i, \quad p_i = \{2[\alpha E - u_i - \beta_i v_i]\}^{1/2}, \quad (2)$$

S - действие, E - энергия, β_i - константы разделения $\left(\sum_{i=1}^f \beta_i = \text{const}\right)$,

α - константа, которая определяется в процессе разделения переменных ²⁾, T_f - период колебаний классической частицы вдоль q_f , $q_i^{(k)}$ - точки поворота ($k = 0, 1, 2$), а чертой обозначено среднее по квазиклассической волновой функции:

$$\bar{v}_i = \int v_i(q) \psi^2(q) dq \approx \int_{q_i^{(0)}}^{q_i^{(1)}} \frac{v_i(q)}{p_i(q)} dq / \int_{q_i^{(0)}}^{q_i^{(1)}} \frac{dq}{p_i(q)}. \quad (3)$$

При этом $q_i^{(0)} < q_i < q_i^{(1)}$ - классически доступная область движения по координате q_i , а $q_i^{(1)} < q_i < q_i^{(2)}$ - подбарьерная область, где $p_i^2 < 0$ (см. рис.1 в ⁴⁾). Отличие многомерной задачи от одномерной заключается в предэкспоненциальном множителе c , который эффективно учитывает влияние движения по координатам q_i ($i \neq f$) на число ударов частицы о стенку барьера при $q_f = q_f^{(1)}$.

3. Формула (1) сводит вычисление ширины Γ к квадратурам и может иметь различные применения. Здесь мы проиллюстрируем ее на примере эффекта Штарка в атоме водорода.

Квазистационарные состояния в однородном электрическом поле \mathcal{E} характеризуется параболическими квантовыми числами n_1, n_2, m (далее $m \geq 0$, $n = n_1 + n_2 + m + 1$ - главное квантовое число уровня). Величины $E = E_r - i\Gamma/2$ и $\beta_{1,2}$, как функции поля \mathcal{E} , определяются из условий квантования ^{2,5} по переменным ξ и η . В данном случае $f = 2$,

$$u_i(q) = \frac{1}{8} [m^2 q^{-2} - (-1)^i \mathcal{E} q], \quad v_i(q) = -\frac{1}{2q}, \quad \alpha = 1/4, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1, \quad (4)$$

где $q = \xi, \eta$ для $i = 1, 2$. Учитывая, что туннелирование электрона происходит вдоль координаты η , а эффективный потенциал по ξ является удерживающим, получаем из (1):

$$\Gamma^{(n_1 n_2 m)}(\mathcal{E}) = \frac{4}{(1 + \gamma) T_\eta} \exp(-2\pi a_\eta). \quad (5)$$

Здесь

$$a_\eta = \frac{n(-\epsilon)^{3/2}}{2\pi F} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t} (A - Bt + t^2 - t^3)^{1/2},$$

²⁾ Ее значение зависит от конкретной задачи (см., например, ур-ие (4)). В отличие от α , значение β_i определяются лишь вместе с вычислением энергии E (в одномерном случае $\alpha = c = 1$, и (1) переходит в обычную формулу Гамова).

$$T_{\eta} = 4\pi^3 \int_{y_0}^{y_1} dy (\epsilon - \mu^2 y^{-2} + 4\beta_2 y^{-1} + Fy)^{1/2}, \quad (6)$$

$A = \mu^2 F^2 / (-\epsilon)^3$, $B = 4\beta_2 F / \epsilon^2$, t_k , y_k - точки поворота, T_{η} - период колебаний по координате η , $\gamma = \eta^{-1} / \xi^{-1}$, причем средние понимаются в смысле (3); мы используем атомные единицы и приведенные переменные:

$$F = n^4 \mathcal{E}, \quad \epsilon = 2n^2 (E_r - i\Gamma/2), \quad \mu = m/n. \quad (7)$$

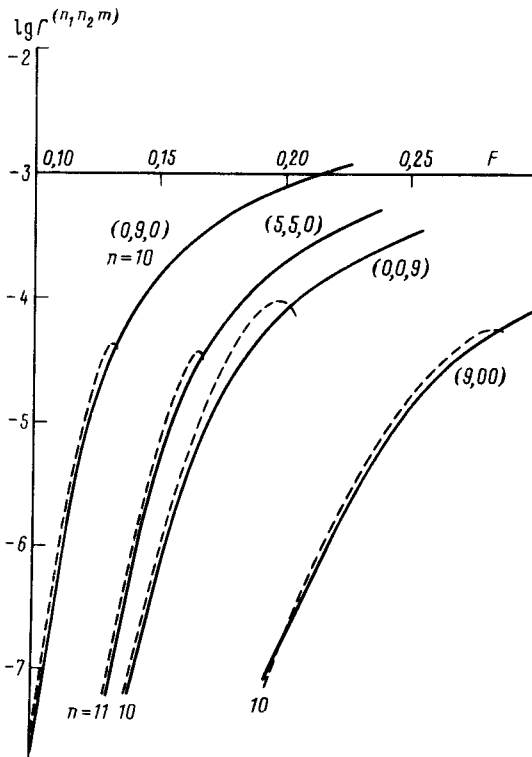


Рис. 1. Зависимость ширины уровней атома водорода от приведенного поля F ($\lambda = \epsilon = m_e = 1$). У кривых указаны параболические квантовые числа n_1, n_2, m , а также значения n

При $m = 0$, а также для состояний $(0, 0, n - 1)$ с $n \gg 1$ все величины в (5) вычисляются аналитически. Результаты расчета см. на рис.1: сплошные кривые отвечают методу АПЭ³⁾, пунктирные - квазиклассической формуле (5), которая имеет высокую точность, если параметр $a_{\eta} > 1$. Множитель c , связанный с многомерностью задачи, как правило, заметно отличается от единицы (см. рис.2), поэтому различие между (1), (5) и одномерной формулой Гамова весьма существенно.

4. Если $E \Rightarrow U_m$, то $a \Rightarrow 0$ и период колебаний T логарифмически расходится, поэтому приближение (1) теряет смысл. Как следует из рис.1, точка максимума ($a = a_m$) пунктирной кривой служит естественной границей области применимости формулы (1), что приводит к условию:

³⁾Т.е. вычислены с помощью суммирования расходящихся рядов теории возмущений (по степеням \mathcal{E}) методом аппроксимант Паде-Эрмита; подробности см. в работах^{5,6}. В пределах точности рисунка АПЭ совпадают с точным решением задачи

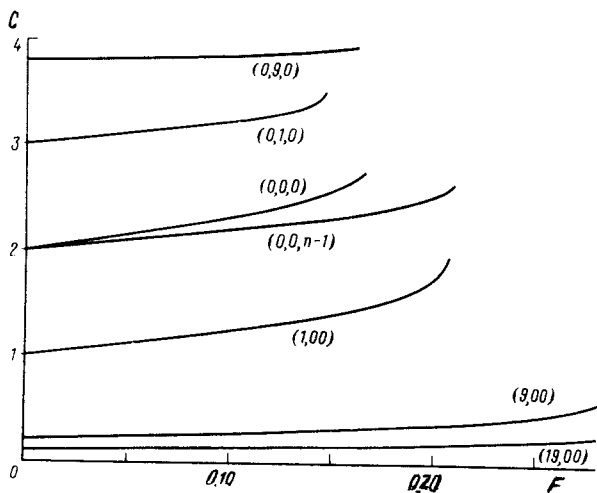


Рис. 2. Предэкспоненциальный множитель c , см. формулу (1), для некоторых состояний (n_1, n_2, m)

$$a > a_m = [2\pi(\ln n_0 + b)]^{-1}. \quad (8)$$

Здесь n_0 - число состояний с энергией $E < U_m$, a b - вычисляемая константа (зависящая от рассматриваемой задачи). Так, в случае эффекта Штарка $b = 2,16$, а вместо n_0 надо подставить $n_2 + 1/2$. Параметр a_m численно мал (благодаря множителю $1/2\pi$) даже при $n_0 \sim 1$. Таким образом, формула Гамова, так же как и ее обобщение (1), теряют применимость лишь в узкой области энергий вблизи вершины барьера.

Литература

1. Gamow G. Zeits. Phys., 1928, 51, 204.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М: Наука, 1989.
3. Connor J.N.L. Molec. Phys., 1973, 25, 1469.
4. Мур В.Д., Попов В.С. Препринт ИТЭФ 93-89, М., 1989; Письма в ЖЭТФ, 1990, 51, 499.
5. Вайнберг В.М. и др. ЖЭТФ, 1987, 93, 450.
6. Popov V.S., Mur V.D. et al. Preprint IC/89/320. Trieste, 1989; Phys. Lett. A, 1990, 149, 418, 425.