

Экспериментальная проверка теории эффекта “Естественное сильное сужение” линий Мёссбауэра и более общего эффекта “Коллапс СТС” из-за флуктуаций контактного поля Ферми. Роль виртуальных переходов в этих эффектах

С. В. Карягин¹⁾

Отдел строения вещества им. Гольданского, Институт химической физики им. Семенова РАН,
119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 октября 2013 г.

Для проверки теории эффекта “Естественное сильное сужение” (ЕСС) линий Мёссбауэра на долгоживущих изомерах и более общего эффекта “Коллапс сверхтонкой структуры” (КСТС) из-за флуктуаций контактного поля Ферми (С. В. Карягин, Письма в ЖЭТФ **98**(3), 197 (2013)) по данным группы Давыдова (Ю. Д. Баюков, А. В. Давыдов, Ю. Н. Исаев и др., Письма в ЖЭТФ **90**(7), 547 (2009)) выполнен анализ выхода γ -квантов 88.034 кэВ из серебряной пластины с изомером $^{109\text{m}}\text{Ag}$ в двух вариантах: 1) СТС разрешена, выход зависит от угла ψ между волновым вектором кванта и внешним полем \mathbf{H}_{ex} ; 2) выход не зависит от ψ из-за КСТС. Показано, что вариант 2 ближе к истине, т.к. экспериментальные средние числа отсчетов при $\psi = 0$ и $\sim \pi/2$ отличаются лишь на систематическую ошибку, одну и ту же при 4.2 и 295 К, и, кроме того, при исключении резонанса числа отсчета не должны зависеть от ψ , что в варианте 1 сильно нарушено, а в 2 хорошо выполняется. Получено пороговое условие КСТС для поля Ферми с учетом виртуальных переходов. Коллапс СТС осуществим при любых временах жизни уровней ядра на любых переходах не только в гамма, но и в других диапазонах излучения. Он ведет к 100-процентной деполаризации ядер и излучения. Для оценки поля Ферми из опытов необходимо иметь $|\mathbf{H}_{ex}| \sim 10^4$ Гс.

DOI: 10.7868/S0370274X13230112

Чтобы убедиться в существовании эффекта естественного сильного сужения (ЕСС) линий Мёссбауэра на долгоживущих изомерах, потребовалось 30 лет совершенствования опытов и развития идей (см. [1–8] и ссылки там), включая создание Гравитационного Спектрометра [1, 8], значительно повысившего надежность опытов, и объяснение ЕСС [3] модуляцией сверхтонких взаимодействий (СТВ) флуктуациями контактного поля Ферми. Пока только теория [3] дала тот же порядок ширины линии Γ_{line} , что и опыты [1, 4–8]. В [3] было показано, что, по существу, ЕСС – это коллапс сверхтонкой структуры (СТС). Коллапс СТС (КСТС) из-за флуктуаций поля Ферми возможен на большем круге ядер и сред, чем ЕСС.

Анализ опытов [1] выполнен в ней в предположении, что СТС разрешена, когда резонансное сечение поглощения γ -кванта σ_{res} зависит от угла ψ между волновым вектором γ -кванта и магнитным полем [2]. Но так как СТС коллапсирует [3], σ_{res} не должно зависеть от ψ . Чтобы выбрать разрешение СТС или КСТС, в ч. 1 статьи выполнен сравнительный анализ

этих вариантов. Затем ищется полная ширина линии Γ_{line} . Относительная ширина $k_{\text{line}} = \tau\Gamma_{\text{line}}$ сравнивается со вкладом $k_{c\text{line}}$ от поля Ферми по простой модели усреднения СТВ [3] и по более совершенной модели (ч. 2). В обеих моделях усреднение СТВ в верхнем и нижнем состояниях ядра велось на отрезке времени усреднения $\tau_{\text{av}} = \tau p$, где τ – время жизни того уровня γ -перехода, который живет короче, $p \geq 1$ [9]. Вместе с тем в новой модели ядро много раз виртуально меняет состояние еще до наступления реального перехода. При этом базовая модель модуляции СТВ полем Ферми остается той же, что и в [3]. Коллапс СТС в обновленной таким образом теории осуществим при любом τ на любых переходах не только в гамма, но и в других диапазонах излучения. В ч. 3 дан ряд формул и понятий, используемых в ч. 1.

1. Сравнительный анализ эксперимента [1] в вариантах разрешения СТС и коллапса КСТС. Опыты [1] были выбраны для проверки теории ЕСС–КСТС [3] по двум причинам. Во-первых, постоянство температуры в опытах [1, 8] избавляет от вариаций геометрии опыта при больших измене-

¹⁾e-mail: akaryagina@gmail.com

Таблица 1

Опыты [1] при 4.2 К в фазе А (с током в кольцах Гельмгольца, $\psi = 0^\circ$ *)

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
θ_i, K	+7	+3	+1	+0.67	+0.33	0	-0.33	-0.67	-1	-3	-7
N_{aLi}	112834	112788	112813	112646	112735	112737	112690	112808	112742	112906	112919
n_{aLi}	24	26	27	26	26	51	26	25	24	24	19
σ_{aLi}	69	66	65	66	66	47	66	68	69	69	78

*) n_{aLi} – число измерений в фазе А при угле θ_i ; N_{aLi} – среднее число отсчетов на измерение в фазе А при угле θ_i ; $\sigma_{Li} = (N_{aLi}/n_{aLi})^{1/2}$ – теоретическая среднеквадратичная ошибка для N_{aLi} .

Таблица 2

Опыты [1] при $T = 4.2 \text{ К}$ в фазе В (без тока в кольцах Гельмгольца, $\psi_i = 83^\circ - \theta_i$ *)

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
N_{bLi}	112576	112732	112829	112834	112771	112711	112670	112770	112759	112826	112817
n_{bLi}	24	26	26	26	26	51	26	26	24	24	19
σ_{bLi}	69	66	66	66	66	47	66	66	69	69	76

*) n_{bLi} – число измерений в фазе В при угле θ_i ; N_{bLi} – среднее число отсчетов на одно измерение в фазе В при угле θ_i ; $\sigma_{bLi} = (N_{bLi}/n_{bLi})^{1/2}$ – теоретическая ср.кв. ошибка для N_{bLi} .

ниях температуры ΔT , характерных для ранних работ [4–7]. При $\Delta T \sim 100 \text{ К}$ малозаметные изгибы и кручения в системе источник–криостат–детектор, меняя геометрию опыта, могут имитировать ЕСС. Во-вторых, измерения в [1] более стабильны и надежны, нежели в [8].

1.1. Независимость усредненных данных опытов [1] от направления магнитного поля. Данные таблиц 1, 2, 3, 4, предоставленные проф. Давыдовым в 2010 г., соответствуют графикам в [1]. Число γ -квантов, регистрируемых на интервале измерения 750 с, называется числом отсчетов N в измерении. На рис. 2 статьи [1] единице ординаты соответствует 24674.2 отсчета за 750 с. Все числа отсчета N первичных измерений поделены на временные факторы распада ^{109}Cd , приводящие их к единому моменту измерения. Приведенные числа N не требуют учета распада материнского изотопа ^{109}Cd . Числа отсчетов N в таблицах являются арифметическими средними по n первичным измерениям, приведенным к одному началу. Вместе с тем единые моменты для измерений при 4.2 и 295 К отличаются на $\sim 109 \text{ дн} \sim 9.4 \cdot 10^6 \text{ с}$. Числа отсчетов N снабжены индексами условий измерения: a – фаза А, т.е. магнитное поле вдоль оси наблюдения (ось центр пластины–центр входного окна детектора); b – фаза В, т.е. поле почти нормально к оси наблюдения ($\psi_i = 83^\circ - \theta_i$); L – температура пластины 4.2 К; R – температура пластины 295 К; i – номер угла наклона θ_i оси наблюдения к горизонтальной плоскости; соответствие i и θ_i указано в

сносках к табл. 1 и 3. Так, $N_{aL-5} = 112834$ получено усреднением по $n_{aL-5} = 24$ приведенным числам первичных измерений при $\psi = 0^\circ$, $T = T_L = 4.2 \text{ К}$, $\theta = \theta_{-5} = +7^\circ$. Результаты сравнения фаз А и В помещены в табл. 5 и 6.

Определим средневзвешенные (ср.вз.) числа $N_{aL} = \sum_i N_{aLi} w_{ai}$ и $N_{bL} = \sum_i N_{bLi} w_{bi}$ с весами $w_{ai} = \sigma_{aLi}^{-2} / \sum_i \sigma_{aLi}^{-2} \cong n_{aLi} / \sum_i n_{aLi}$ и $w_{bi} = \sigma_{bLi}^{-2} / \sum_i \sigma_{bLi}^{-2} \cong n_{bLi} / \sum_i n_{bLi}$ при $i = -4, -3, \dots, +4, +5$, т.е. с числом учтенных в усреднении точек $m = 10$. Тогда $N_{aLw} = \mathbf{112778}$, $N_{bLw} = \mathbf{112765}$. В точке $bL-5$ имеем явный выброс числа отсчетов, т.к. $N_{bL-5} - N_{bLw} = 189 \cong 2.7\sigma_{bL-5}$. Поэтому при усреднениях в обеих фазах, А и В, точка $i = -5$ отбрасывается.

Сравнение чисел отсчета в фазах А и В при 4.2 К дано в табл. 5, содержащей девиации $D_{abLi} = N_{aLi} - N_{bLi}$. Их среднеквадратические (ср.кв.) ошибки $\sigma_{abLi} = (\sigma_{aLi}^2 + \sigma_{bLi}^2)^{1/2}$. Их разбросы $\delta_{abLi} = D_{abLi} - D_{abL}$. Средневзвешенная девиация $D_{abL} = N_{aL} - N_{bL} = 13$ со ср.кв. ошибкой $\varepsilon D_{abL} = [\sum_i \sigma_{abLi}^2 / m(m-1)]^{1/2} \sim 32$, т.е. $D_{abL} \ll \varepsilon D_{abL}$. При этом $|\delta_{abLi}| < \sigma_{abLi}$ всюду, кроме точек $i = -5$ и -2 . Отметим, что усреднение по 11 точкам (отмечено штрихом) $i = -5, -4, \dots, +4, +5$ дает втрое большую величину ср.вз. девиации, $D'_{abL} = N'_{aL} - N'_{bL} = 33.4 \sim 3D_{abL}$.

Тот факт, что D_{abL} и D'_{abL} отличаются от нуля, не может объясняться различием резонансного поглощения в фазах А и В. Действительно, согласно [1, 2]

Таблица 3

Опыты [1] при $T = T_R = 295$ К ($R \equiv \text{Room}$) с током в кольцах Гельмгольца (фаза А, $\psi = 0^\circ$ *)

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
θ_i , К	+7	+3	+1	+0.67	+0.33	0	-0.33	-0.67	-1	-3	-7
N_{aRi}	95770	95815	95797	95856	95930	95932	95909	95922	95949	95933	95763
n_{aRi}	22	22	23	23	22	22	22	22	20	20	20
σ_{aRi}	67	67	65	65	67	67	67	67	70	70	70

*) N_{aRi} – среднее число отсчетов на одно измерение А; n_{aRi} – число измерений типа А при $\theta = \theta_i$.

Таблица 4

Опыты [1] при 295 К без тока в кольцах Гельмгольца ($\psi_i = 83^\circ - \theta_i$)

i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
N_{bRi}	95772	95695	95752	95938	95891	95954	95829	95829	95835	96029	95721
n_{bRi}	21	23	21	21	21	21	21	21	20	20	20
σ_{bRi}	67	65	68	68	67	67	67	68	70	70	70

резонансное поглощение в фазе А в 2.06 раза больше, чем в фазе В. Значит, должно выполняться неравенство $D_{abL}, D'_{abL} < 0$. В то же время опыты [1] дают прямо противоположный результат: $D_{abL}, D'_{abL} > 0$. С другой стороны, согласно теории ЕСС [3] должно выполняться равенство $D_{abL}, D'_{abL} = 0$, что явно не так. Такое противоречие результатов $D_{abL} = 13$, $D'_{abL} = 33.4$ обеим теориям можно объяснить либо различием выборок А и В, либо(и) систематической ошибкой. Например, в фазе В ток выключен, электрическая цепь разомкнута и поэтому слабее заземлена. Значит, наводки на аппаратуре (в том числе на детекторе) усиливаются при переходе от фазы А к фазе В, что может привести к небольшому (на $13/112748 \sim 10^{-4} = 0.01\%$) уменьшению числа отсчетов в фазе В. Наводки могут быть разной природы, включая радиоволны и статическое электричество, создаваемое, например, трением потоков (в том числе конвективных) воздуха и других сред об элементы установки. Ожидание систематической ошибки в фазе В (дефектность выборки в фазе В) подкрепляется наличием в ней трехкратного выброса для N при $i = -5$, когда $D_{abL-5} = 258$. Усредненная по всем $m = 11$ точкам ср.вз. девиация $D'_{abL} \sim 33.4$ при 4.2 К ближе к ср.вз. девиации $D'_{abL} = 30.0$ при 295 К, чем ср.вз. девиация $D_{abL} \sim 13$ при 4.2 К, вычисленная по $m = 10$ точкам.

Рассмотрим теперь табл. 3 и 4 для контрольных опытов при 295 К. От конца опытов при 4.2 К до начала опытов при 295 К прошло ~ 109 дн. $\sim 9.4 \cdot 10^6$ с, что составило заметную долю от времени распада материнского изотопа $\tau_{109\text{Cd}} = 5.8 \cdot 10^7$ с. Это объясняет сильное уменьшение чисел отсчета в табл. 3 и 4 в сравнении с табл. 1 и 2.

По аналогии с табл. 5 строим табл. 6, введя девиации $D_{abRi} = N_{aRi} - N_{bRi}$. Их ср.кв. ошибки $\sigma_{abRi} = (\sigma_{aRi}^2 + \sigma_{bRi}^2)^{1/2}$, веса $w_{aRi} = n_{aRi}/\Sigma_i n_{aRi}$, $w_{bRi} = n_{bRi}/\Sigma_i n_{bRi}$, ср.вз. числа отсчетов $N'_{aR} = \Sigma_i N_{aRi} w_{aRi} = 95870$, $N'_{bR} = \Sigma_i N_{bRi} w_{bRi} = 95840$, ср.вз. девиация $D'_{abR} = N'_{aR} - N'_{bR} = 30$, разбросы девиации $\delta_{abRi} = D_{abRi} - D'_{abR}$, ср.кв. ошибка в ср.вз. девиации $\varepsilon D'_{abR} = [\Sigma_i \sigma_{abRi}^2 / m(m-1)]^{1/2} = 32$, т.е. $D'_{abR} \sim \varepsilon D'_{abR}$. Явных выбросов в табл. 3 и 4 нет. Поэтому все усреднения при 295 К ведутся по $m = 11$ точкам $i = -5, -4, \dots, +4, +5$, что отмечается штрихом: $D'_{abR}, N'_{aR}, N'_{bR}$, и т.д.

Тот факт, что D'_{abR} заметно больше нуля, не может объясняться зависимостью резонансного сечения от направления магнитного поля, так как при 295 К факторы Мёссбауэра f, f' равны нулю и резонанса нет. Однако $D'_{abR} = 30$ можно объяснить систематической ошибкой так же, как это было сделано выше при 4.2 К. Хотя $D_{abL} = 13$ при 4.2 К и $D'_{abR} = 30$ при 295 К лишь примерно одинаковы, имеем (см. текст под табл. 5) $D'_{abL} = 33.2 \cong D'_{abR}$. Это указывает на общую природу сдвигов при 4.2 и 295 К как одной и той же систематической ошибки $D_{\text{sys}} = 13 \pm 30$.

Итак, усредненные по углам θ_i числа отсчета с точностью до систематической ошибки ~ 30 не зависят от выбора фазы А или В, что является одним из признаков КСТС. Дефектной (содержащей систематическую ошибку) является, скорее всего, выборка в фазе В.

Рассмотрим теперь более сильные аргументы в пользу КСТС. Для этого сравним результаты анализа данных табл. 1 и 2 при разрешенности СТС, принятой в [1] (см. ниже п. 1.2 и табл. 7), с резуль-

Таблица 5

Сравнение фаз А и В при 4.2 К

<i>i</i>	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D_{abLi}	258	56	-16	-188	-36	26	20	38	13	81	102
σ_{abLi}	98	93	93	93	93	68	93	95	98	98	102
δ_{abLi}	229	27	-45	-217	-65	-3	-9	9	-16	52	73

Таблица 6

Сравнение чисел отсчета в фазах А и В при 295 К

<i>i</i>	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
D_{abRi}	-2	120	45	-82	39	-22	80	93	114	-96	4
σ_{abRi}	94	93	94	94	94	94	94	95	99	99	99
δ_{abRi}	-32	90	15	-122	9	-52	50	63	84	-126	-26

татами анализа при КСТС [3] (см. п. 1.3 и табл. 8). Результаты анализа развернуты в табл. 7 и 8 по относительной ширине $k = \Gamma\tau$, где Γ – полная ширина линии, τ – время жизни изомера ^{109m}Ag . Основные данные табл. 7 и 8 включают критерии χ^2 на степень свободы [10] и (главная новинка настоящей работы) числа отсчета, скорректированные к условиям без γ -резонанса (если, например, $f, f' = 0$ или $k = \infty$). В настоящей работе в отличие от [1] выход квантов усреднен по углам их вылета, ограниченным пластиной и входным окном детектора (ч. 3). Исправлены также (ч. 3) неточности и опечатки в формулах для выходов квантов, замеченные в статье [1].

1.2. Результаты анализа при разрешенной СТС (см. табл. 7).

1. Критерии χ^2 на степень свободы. Согласно [1, 2] для перехода $^{109m}\text{Ag} \rightarrow ^{109}\text{Ag}$ сечения γ -резонансного поглощения составляют $\sigma_a = \sigma_0 \cdot 17/64$ в фазе А, $\sigma_b = \sigma_a/2.06$ в фазе В и σ_0 при КСТС. Определенные χ_a^2 и χ_b^2 будет дано в ч. 3 статьи. Индексы “а” и “b” соответствуют фазам А и В. В минимумах χ^2 имеем $k_{a\min} = 5.17$, $\chi_{a\min}^2 = 0.71$ и $k_{b\min} = 6.67$, $\chi_{b\min}^2 = 0.68$ в отличие от [1], где $k_{a\min} \sim k_{b\min} \sim 7$, $\chi_{a\min}^2 = 0.62$, $\chi_{b\min}^2 = 0.64$. Таким образом, различие χ^2 -результатов между табл. 7 и [1] невелико. Уменьшение ширины k_{\min} , ожидаемое в [1] при усреднении выхода квантов по углам их вылета, заметно лишь в фазе А.

2. Числа отсчетов, скорректированные к отсутствию резонанса. Если бы резонансное поглощение исчезло, то числа N_{ai} , N_{bi} заменились бы числами

$$N_{aCr i} = N_{ai}Y(\infty)/Y_{ai}(k), N_{bCr i} = N_{bi}Y(\infty)/Y_{bi}(k), \tag{1}$$

которые мы назовем скорректированными ($Cr = \text{corrected}$). Здесь $Y(\infty) = Y_{el}$ – выход квантов в отсутствие резонанса, когда резонансная прозрачность $T_r = 1$ (см. (12)), т.е. при $k = \infty$ или (и) при $f = 0$. Выход $Y(\infty)$ не зависит от θ_i и ψ , т.е. от i и фаз А, В. Согласно (12) $Y(\infty)$ есть электронная прозрачность T_e , усредненная по углам φ , φ_1 отклонения волнового вектора от линии наблюдения. С точностью до машинного нуля $Y(\infty) = Y_{el} = 0.503\,534\,701\,081\,222$, при условии задания всех исходных параметров с такой точностью. Введем критерий совершенства, не зависящий от критерия минимума χ^2 и состоящий в том, что при верном выборе модели ЕСС, точном расчете выходов $Y_{ai}(k)$, $Y_{bi}(k)$, Y_{el} , отсутствии случайных и систематических ошибок и ширине k , соответствующей реальности, числа $N_{aCr i}$ и $N_{bCr i}$ не должны зависеть ни от угла θ_i , ни от выбора фаз А, В. Иными словами, в идеальных условиях должно выполняться $N_{aCr i} - N_{aCr i'} = N_{bCr i} - N_{bCr i'} = N_{aCr i} - N_{bCr i'} = 0$ при любых i, i' . Для подавления случайных ошибок введем ср.вз. числа N'_{aCr} , N_{bCr} :

$$\begin{aligned} N'_{aCr} &= \sum_i w_{ai} N_{aCr i} \quad (i = -5, -4, \dots, 4, 5), \\ N_{bCr} &= \sum_{i'} w_{bi'} N_{bCr i'} \quad (i' = -4, -3, \dots, 4, 5), \end{aligned} \tag{2}$$

где веса $w_{ai} = \sigma_{aLi}^{-2}/(\sum_i \sigma_{aLi}^{-2})$, $w_{bi'} = \sigma_{bLi'}^{-2}/(\sum_{i'} \sigma_{bLi'}^{-2})$ нормированы на 1: $\sum_i w_{ai} = \sum_{i'} w_{bi'} = 1$. Тогда при достаточно больших выборках А, В числа N'_{aCr} и N_{bCr} должны совпасть с хорошей точностью при удачной модели ЕСС, верности $Y_{ai}(k)$, $Y_{bi}(k)$, Y_{el} , отсутствии систематических ошибок и верном значении k . Поэтому отличие ср.вз. девиации $D_{abCr} = N'_{aCr} - N_{bCr}$ от нуля может быть связано с система-

Анализ в случае разрешенной СТС, когда выход γ -квантов зависит от направления магнитного поля

k	1	2	3	4	5.17	6.67	10	15	25	50	∞
χ_a^2	4.70	1.80	1.01	0.77	0.71	0.75	0.93	1.13	1.32	1.44	1.49
χ_b^2	1.82	1.03	0.80	0.72	0.69	0.68	0.69	0.72	0.75	0.76	0.77
N'_{aCr}	113181	113079	113023	112986	112956	112929	112891	112860	112831	112806	112778
N_{bCr}	112981	112924	112893	112873	112857	112843	112823	112807	112792	112779	112765
D_{abCr}	200	155	130	113	99	86	68	53	39	27	13
d_{abCr}	4.0	4.6	4.8	4.6	4.2	3.6	2.7	2.0	1.4	0.9	0.4
εD_{abCr}	50.6	33.4	26.8	24.4	23.6	23.9	25.3	27.0	28.5	29.4	29.7
$\varepsilon N'_{aCr}$	42.5	26.7	19.7	17.2	16.5	17.0	18.8	20.7	22.4	23.5	23.8
εN_{bCr}	27.4	20.6	18.2	17.3	16.9	16.8	16.9	17.2	17.5	17.7	17.8
Комментарии					$\chi_a^2 \min$	$\chi_b^2 \min$					$D_{abCr} = 0$

*) Данные в χ^2 -минимумах выделены жирным шрифтом.

тической ошибкой, малостью выборок А, В, неверным расчетом выходов $Y_{ai}(k)$, $Y_{bi}(k)$, Y_{el} , неудачностью модели ЕСС и с несоответствием пробной ширины k реальности. Относительная ср.вз. девиация $d_{abCr} = D_{abCr}/\varepsilon D_{abCr}$ – качественная мера дефектов анализа. Здесь $\varepsilon D_{abCr} = (\varepsilon_{N'_{aCr}}^2 + \varepsilon_{N_{bCr}}^2)^{1/2}$ – ср.кв. ошибка в D_{abCr} , $\varepsilon_{N_{aCr}} = \sigma_{N'_{aCr}}/m_a^{1/2}$ – ср.кв. неточность в определении числа N'_{aCr} , $\sigma_{N'_{aCr}} = [\sum_i w_{ai}(N_{aCr i} - N_{aCr})^2]^{1/2} [m_a/(m_a - 1)]^{1/2}$ – ср.кв. разброс отклонений $N_{aCr i}$ от N'_{aCr} , $m_a = 11$ – число членов в сумме. В фазе В $\varepsilon_{N_{bCr}} = \sigma_{N_{bCr}}/m_b^{1/2}$, $\sigma_{N_{bCr}} = [\sum_i w_{bi}(N_{bCr i} - N_{bCr})^2]^{1/2} [m_b/(m_b - 1)]^{1/2}$, $m_b = 10$. Из табл. 7 и 8 видно, что при $k \sim 1$ ср.вз. девиации наиболее высоки: $D_{abCr} = 200$, $D_{ABCr} = -71$, а при $k = \infty$ имеем $D_{abCr} = D_{ABCr} = D_{abL} \sim D'_{abR} \sim \sim D'_{abL} = 13 \pm 30$ (ср. с выводами п/п. 1.1). Последнее связано с тем, что из определения (1) при $k = \infty$ следует $N_{aCr i} = N_{ai}$, $N_{bCr i} = N_{bi}$.

Согласно табл. 7 $D_{abCr} = 99$, $d_{abCr} = 4.19$ в минимуме χ_a^2 фазы А ($k_{a \min} = 5.17$) и $D_{abCr} = 86$, $d_{abCr} = 3.61$ в минимуме χ_b^2 фазы В ($k_{b \min} = 6.67$), а d_{abCr} не обращается в нуль ни при каких k .

1.3. Результаты анализа при КСТС (см. табл. 8). При КСТС логика построения таб. 8 та же, что и табл. 7. Однако поскольку сечения резонансного поглощения в обеих фазах, А и В, при КСТС равны ($\sigma_A = \sigma_B = \sigma_0$), выходы в фазах А и В (см. (12)) тоже равны: $Y_{Ai}(k) = Y_{Bi}(k)$. Но так как $N_{ai} \neq N_{bi}$, χ^2 -критерии в фазах А и В не совпадают: $\chi_A^2(k) \neq \chi_B^2(k)$. Скорректированные числа отсчета также не равны: $N_{ACr i} = N_{ai} Y(\infty)/Y_{Ai}(k) \neq N_{BCr i} = N_{bi} Y(\infty)/Y_{Bi}(k)$. При КСТС ширины $k_{A \min} = 15.27$, $k_{B \min} = 25.69$ во много раз больше ширины $k_{a \min} = 5.17$, $k_{b \min} = 6.67$ при разрешенности СТС. В χ^2 -минимумах d -мера дефектов анализа

на порядок ниже при КСТС, чем при разрешенной СТС: $d_{ABCr} = 0.10$ при $k_{A \min} = 15.27$, $d_{ABCr} = 0.31$ при $k_{B \min} = 25.69$, в то время как $d_{abCr} = 4.2$ при $k_{a \min} = 5.17$, $d_{abCr} = 3.6$ при $k_{b \min} = 6.67$ (см. табл. 7). При $k = 12.78$ мера дефектов d_{ABCr} равна нулю. Таким образом, мера дефектов анализа снижается на порядок при переходе от гипотезы разрешенности СТС, принятой в [1], к теории КСТС [3]. Вместе с результатами п/п. 1.1 это подтверждает существование КСТС, теоретически предсказанное в [3]. Напомним, что с точностью до систематической ошибки ~ 30 в п/п. 1.1 доказана независимость от фаз А, В чисел отсчета, усредненных по θ_i .

Из двух χ^2 -минимумов более достоверен минимум $k_{A \min} = 15.27$, поскольку: конкурирующая выборка фазы В дефектна (см. выводы в п/п. 1.1); отсчитываемая от $\chi^2(\infty)$ глубина минимума больше для χ_A^2 , т.к. $\chi_A^2(\infty) - \chi_{A \min}^2 = 0.71 > \chi_B^2(\infty) - \chi_{B \min}^2 = 0.09$; мера дефектов d_{ABCr} равна нулю вблизи $k_{A \min}$. Значит, экспериментальная ширина линии должна составлять $k_{\text{exp}} = k_{A \min} \sim 15.3$, что в ~ 2 раза больше, чем дал анализ [1], основанный на гипотезе о разрешенности СТС. Основной вклад в k_{exp} должно дать уширение монополюсного сдвига, не подавляемое флуктуациями поля Ферми [9]. Это не согласуется с минимальной шириной $k_{c \text{ line}} \sim 15.6$, полученной в [3] без учета виртуальных переходов. Их учет в ч. 2 дает минимальное пороговое уширение контактным полем Ферми $3.47/p < k_{c \text{ line thr}} < < 5.66/p$, где $p > 1$. Это намного ниже, чем $k_{\text{exp}} \sim 15.3$. Так и должно быть, поскольку ширина k_{exp} связана в основном с уширением монополюсного сдвига.

2. Учет виртуальных переходов. Первая оценка $k_{c \text{ line}}$, согласующаяся с опытом по порядку

Таблица 8

Анализ при КСТС [3], когда направление поля не влияет на резонансное поглощение

k	1	4	7	10	12.78	15.27	25.69	50	200	∞
χ_A^2	59.9	9.34	2.72	1.20	0.84	0.78	1.01	1.34	1.48	1.49
χ_B^2	55.1	9.69	3.32	1.61	1.06	0.85	0.68	0.73	0.77	0.77
$N'_{A Cr}$	114065	113508	113301	113188	113120	113077	112972	112885	112806	112778
$N_{B Cr}$	114136	113535	113313	113193	113120	113074	112964	112873	112793	112765
$D_{AB Cr}$	-71	-27	-12	-5	0	3	8	12	13	13
$d_{AB Cr}$	-0.33	-0.31	-0.24	-0.13	0	0.10	0.31	0.40	0.43	0.43
$\varepsilon D_{AB Cr}$	215	87.4	49.2	33.6	27.6	25.5	25.9	28.5	29.7	29.7
$\varepsilon_{N' A Cr}$	152.3	60.0	32.3	21.5	18.0	17.3	19.7	22.6	23.8	23.8
$\varepsilon_{NB Cr}$	151.8	63.5	37.1	25.8	20.9	18.7	16.8	17.4	17.8	17.8
Комментарии					$d_{AB Cr} = 0$	$\chi_A^2 = \min$	$\chi_B^2 = \min$			

величины, была получена в [3] в простой модели усреднения СТВ на верхнем (“+”) и нижнем (“-”) уровнях ядра при времени усреднения $\tau_{av} \sim \tau$, где τ – время жизни того уровня, который живет меньше (например, уровня “+” в переходе $^{109m}\text{Ag} - ^{109}\text{Ag}$). Виртуальные переходы с “+” на “-” и обратно сильно меняют $k_{c \text{ line}}$. Виртуальные фотоны уходят от ядра не далее чем на длину волны $\lambda \sim 10^{-9}$ см, так как при большем удалении начинается волновая зона реальных фотонов. Поэтому время жизни виртуального состояния $\langle - \rangle$ есть $\tau_- \sim \lambda/c = \hbar/E_\gamma \sim 10^{-20}$ с, где $E_\gamma \sim 88$ кэВ для ^{109}Ag . Поскольку на виртуальные переходы не существует жестких ограничений (например, поперечность волны, сохранение импульса), виртуальный переход более вероятен, чем реальный переход с вылетом γ -кванта или электрона конверсии. Поэтому время жизни τ_+ виртуального состояния $\langle + \rangle$ много меньше наблюдаемого времени жизни τ уровня “+” и, значит,

$$\tau_- \sim \lambda/c = \hbar/E_\gamma \leq \tau_+ \ll \tau. \quad (3)$$

Частота виртуальных переходов $\nu_v \sim 1/(\tau_+ + \tau_-)$ может быть выше частоты флуктуаций поля Ферми ν_F , т.е. $\nu_v \gg \nu_F$. Так, если $\tau_+ \sim \tau_-$, то $\nu_v \sim 10^{20}$ Гц $\gg \nu_F \sim 10^{16}$ Гц. Введем квантовое среднее момента ядра $\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle$. Если единичный вектор $\mathbf{u} = \langle \hat{\mathbf{I}} \rangle / |\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle|$ (см. текст под формулой (7) в [3]) в момент виртуального перехода не меняется, то вектор \mathbf{u} вращается вокруг поля \mathbf{H}_{Rf} с эффективной частотой Лармора (см. текст под формулой (8) в [3])

$$\Omega_{ef} = (\mu/I)_{ef} \mu_N H_{Rf} / \hbar, \quad (4)$$

где $(\mu/I)_{ef} = (\tau_+ \mu_+ / I_+ + \tau_- \mu_- / I_-) / (\tau_+ + \tau_-)$, μ_+ , μ_- и I_+ , I_- – магнитный момент μ и спин ядра I для уровней “+”, “-”, μ_N – ядерный магнетон. Так как для ^{109}Ag $\mu_+ / I_+ \sim 8/7$,

$\mu_- / I_- \sim 0.26$, имеем $(\mu/I)_{ef} = 0.7$, если $\tau_+ = \tau_-$, и $(\mu/I)_{ef} = 1.14$, если $\tau_+ \gg \tau_-$. Пороговые условия (10) из [3], $\tau_{av} (\mu_+ \mu_N H_{ce-} / I_+ \hbar)^2 / 4\nu_F \geq 1$ для “+” и $\tau_{av} (\mu_- \mu_N H_{ce-} / I_- \hbar)^2 / 4\nu_F > 1$ для “-”, заменяются единым для обоих уровней пороговым условием

$$\tau_{av} \Omega_{ef\varepsilon}^2 / 4\nu_F \geq 1, \quad (5)$$

где $\Omega_{ef\varepsilon} = (\mu/I)_{ef} \mu_N H_{ce} / \hbar$ – среднеквадратичная эффективная угловая скорость Ω_{ef} за время τ_{av} . Скорость $\Omega_{ef\varepsilon}$ отличается от Ω_{ef} использованием ср.кв. поля $H_{Rf\varepsilon} \sim H_{ce}$, где H_{ce} – ср.кв. флуктуация поля Ферми, $\tau_{av} \sim \tau p \sim 60 p$ с, $\nu_F \sim 5 \cdot 10^{16}$ Гц. Из (3) получаем порог поля Ферми:

$$H_{ce} \geq (\hbar / \mu_N) (4\nu_F / \tau_{av})^{1/2} / (\mu/I)_{ef} = H_{ce \text{ thr}}, \quad (6)$$

где $\hbar / \mu_N = 2.105 \cdot 10^{-4}$ с·Гс. Для ^{109}Ag в среднем по кристаллу $|\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle_{cr} / I|_+ = 6/7$, $|\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle_{cr} / I|_- = 1$ и

$$1.07 \cdot 10^4 p^{-1/2} \text{ Гс} \leq H_{ce \text{ thr}} \leq 1.74 \cdot 10^4 p^{-1/2} \text{ Гс}, \quad (7)$$

где число 1.07 относится к случаю $\tau_+ \gg \tau_-$, а число 1.74 – к случаю $\tau_+ = \tau_-$. В силу (6) эти числа необходимо заменить меньшими, если реально $\nu_F < 5 \cdot 10^{16}$ Гц. Несохранение \mathbf{u} в момент виртуального перехода ведет к более мягким, чем (5)–(7), пороговым условиям [9]. Из (19) в [3] получаем пороговые вклады $k_{c \text{ thr}} = \tau \Gamma_{c \text{ thr}}$ от поля Ферми в уширения уровней. Например, $k_{c+} > k_{c \text{ thr}+} = \tau \omega_{1\varepsilon \text{ thr}+} |\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle_{cr} / I|_+ / (3\tau_{av} \nu_F)^{1/2} = \tau H_{ce \text{ thr}} |\mu_+ \mu_N / \hbar| |\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle_{cr} / I|_+ / (3\tau_{av} \nu_F)^{1/2} = \tau [(\hbar / \mu_N) \times (4\nu_F / \tau_{av})^{1/2} / (\mu/I)_{ef}] |\mu_+ \mu_N / \hbar| |\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle_{cr} / I|_+ / (3\tau_{av} \nu_F)^{1/2}$, т.е. имеем

$$\begin{aligned} k_{c \text{ thr}+} &= (\tau / \tau_{av}) (4/3)^{1/2} |\mu_+| |\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle_{cr} / I|_+ / (\mu/I)_{ef}; \\ k_{c \text{ min}-} &= (\tau / \tau_{av}) (4/3)^{1/2} |\mu_-| |\langle \hat{\mathbf{I}} \rangle_{cr} / I|_- / (\mu/I)_{ef}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
k_{\text{cline}} &\geq k_{\text{cline thr}} = k_{\text{cline thr}+}^2 + k_{\text{cline thr}-}^2)^{1/2} = \\
&= (\tau/\tau_{av})(4/3)^{1/2} [(|\mu_+| |(\hat{\mathbf{I}})_{\text{cr}}/I|_+)^2 + \\
&\quad + (|\mu_-| |(\hat{\mathbf{I}})_{\text{cr}}/I|_-)^2]^{1/2} / (\mu/I)_{\text{ef}}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Видно, что $k_{\text{cline thr}}$ не зависит от ν_F , а при $\tau_{av} = \tau p$ (см. [3]) не зависит и от τ . Для ^{109}Ag $|\mu_+| \sim 4$, $|(\hat{\mathbf{I}})_{\text{cr}}/I|_+ \sim 6/7$, $|\mu_-| \sim 0.13$, $|(\hat{\mathbf{I}})_{\text{cr}}/I|_- = 1$. Тогда для ЕСС-КСТС на изотопе ^{109}Ag имеем

$$3.47/p \leq k_{\text{cline thr}} \leq 5.66/p, \quad (10)$$

где 3.47 относится к случаю $\tau_+ \gg \tau_-$, а 5.66 – к случаю $\tau_+ = \tau_-$. При переходе от ^{109}Ag к другим ядрам-кандидатам на ЕСС-КСТС ограничение на $k_{\text{cline thr}}$ типа $A/p \leq k_{\text{cline thr}} \leq B/p$ не будет сильно отличаться от (10). И так как $k_{\text{cline thr}}$ не зависит от ν_F и τ , в рассмотренной здесь модели виртуальных переходов следует ожидать расширения круга ядер для КСТС на любые времена жизни, в отличие от простой модели усреднения, использованной в [3]. При этом основная идея модуляции СТВ флуктуациями поля Ферми одна и та же как здесь, так и в [3]. Оценки (7) для $H_{\text{ce thr}}$ и (10) для $k_{\text{cline thr}}$ намного ниже оценок $H_{\text{ce thr}} \sim 4.8 \cdot 10^4 p^{-1/2}$ Гс и $k_{\text{cline thr}} \sim 15.6/p$, сделанных в рамках простой модели усреднения СТВ в [3]. Не исключено также наличие ядер, для которых формула (10) даст $k_{\text{cline thr}} \sim 1/p$. Более мягкие оценки см. в [9].

3. Методы и формулы. Критерий $\chi^2(k)$ на степень свободы [10] и минимум $\chi^2(k)$ по k имеют вид

$$\begin{aligned}
\chi^2(k) &= \min_C \sum_i \{ [N_i - CY_i(k)] / \sigma_i \}^2 / F, \quad \min_k \chi^2(k) = \\
&= \min_k \min_C \sum_i \{ [N_i - CY_i(k)] / \sigma_i \}^2 / F, \quad (11)
\end{aligned}$$

где $Y_i(k) = Y(k, \theta_i, \psi) = Y_{k,i,\psi}$ и $CY_i(k)$ – выход квантов из пластины и теоретическое число отсчетов в точке θ_i , C – подгоночный параметр, $F = m - l$ – число степеней свободы, m – число членов в сумме, l – число связей. Минимизация по C дает $C = (\sum_i N_i Y_i / \sigma_i^2) / \sum_i (Y_i / \sigma_i)^2$. Это уравнение накладывает одну связь. Поэтому $F = m - 1$. Вместо ψ будем ставить индекс фазы А ($\psi = 0$) или В ($\psi = 83^\circ - \theta_i$). Выходы также зависят от ряда неварьируемых параметров (толщины пластины $d = 0.074$ см, ее высоты $d_1 = 1.6$ см и ширины $d_2 = 2.4$ см, тех же размеров d_1, d_2 у входного окна детектора, отстоящего от пластины на расстояние $d_3 = 24.0$ см). Введем оси Декарта OZ (по нормали к пластине), OX (вдоль ее ширины) и OY (вдоль высоты). Начало O поместим в центре пластины. Пучок γ -лучей, задаваемых двугранными углами φ, δ (с вершинной осью OX) и φ_1, δ_1 (с вершинной осью OY), ограничен условиями

$-\varphi_0 - \delta < \varphi < \varphi_0 - \delta, -\varphi_{10} - \delta_1 < \varphi_1 < \varphi_{10} - \delta_1$, где $\varphi_0 = d_1/2d_3 = 0.033$ рад, $\varphi_{10} = d_2/2d_3 = 0.05$ рад. Вершинная ось двугранного угла есть аналог вершины обычного плоского угла. Углы δ, δ_1 дают отклонение реального положения нормали к пластине от предполагаемого. Обычно полагают, что ось наблюдения и нормаль совпадают. При $|\delta|, |\delta_1|, \varphi_0, \varphi_{10} \ll 1$ усреднение Y по z, φ, φ_1 имеет вид

$$\begin{aligned}
Y(k, \theta_i, \psi) &= Y_{k,i,\psi} = \\
&= \int_{-\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 - \delta} (d\varphi/2\varphi_0) \int_{-\varphi_{10} - \delta_1}^{\varphi_{10} - \delta_1} (d\varphi_1/2\varphi_{10}) \int_0^d dz \rho_p T_e T_r, \quad (12)
\end{aligned}$$

где ρ_p – распределение родительского (parent) изотопа ^{109}Cd в пластине по ее глубине z , T_e – электронный фактор прозрачности для квантов 88.03 кэВ, T_r – гамма-резонансный фактор прозрачности, z – текущая координата вдоль нормали к пластине OZ . На стороне пластины, обращенной к детектору, $z = d$. На обратной ее стороне $z = 0$. Факторы ρ_p, T_e, T_r имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho_p &= \{ \exp[-b(d-z)^2] + \\
&+ \exp(-bz^2) \} / \int_0^d \{ \exp[-b(d-z')^2] + \exp(-bz'^2) \} dz', \\
b &= 636 \text{ см}^{-2}, \\
T_e &= \exp[-\mu_e(d-z)U],
\end{aligned}$$

$$U = [1 + \tan^2(\varphi + \delta) + \tan^2(\varphi_1 + \delta_1)]^{1/2},$$

$$\mu_e = 21.5 \text{ см}^{-1}, \quad T_r = 1 - f + f \exp(-UQ'), \quad Q' = Q/f,$$

где f – фактор Мёссбауэра, $1 - f$ – доля нерезонансного излучения, $f \exp(-UQ')$ – доля резонансного излучения, вышедшего из пластины. В [1] T_r дается менее строгим выражением, e^{-UQ} . Однако числовое различие между T_r и e^{-UQ} мало, так как $T_r \sim 1 - fUQ' = 1 - UQ \sim e^{-UQ} Q' = [D'/\sin(\theta + \varphi + \delta)] \arctan\{ [G(d-z)\sin(\theta + \varphi + \delta)]/k \}$, $G = 1/h_0 = 0.826897 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, $h_0 = c^2 \hbar / (E_\gamma g \tau)$ – перепад высот, на котором сдвиг частоты γ -кванта из-за гравитации равен $1/\tau$, c – скорость света, \hbar – константа Планка, g – ускорение свободного падения, $D' = \xi(\sigma_w/2)[1/(1+\alpha_t)] f h_0 \nu_{109}$, ν_{109} – плотность ядер ^{109}Ag в серебряной пластине, ξ – магнитный фактор, $\xi = \xi_A = 17/64$ в фазе **A** и $\xi = \xi_B = \xi_A/2.06$ в фазе **B**, без магнитного поля $\xi = \xi_0 = 1$, $D' = D'_A = 5.963923 \cdot 10^{-5}/f'$ в фазе **A** и $D' = D'_A/2.06$ в фазе **B**, без магнитного поля $D' = D'_0 = D'_A \cdot 64/17$,

$\sigma_w = [(2I_e + 1)/(2I_g + 1)]\lambda^2/2\pi$ – волновое сечение в максимуме резонанса, I_e и I_g – спины ядра ^{109}Ag в изомерном и основном состояниях, λ – длина волны, α_t – полный коэффициент внутренней электронной конверсии. Все перечисленные величины даны в [1]. В настоящей работе считается, что для детектора # 1 $\delta = \delta_1 = 0$. Расчеты с ненулевыми δ, δ_1 позволили бы использовать опыты при сбитой шкале углов θ , такой, например, как для детектора # 2 в [1, 8]. При $\delta, \delta_1, \varphi_0, \varphi_{10} = 0$ формула (12) примет вид

$$Y(k, \theta_i, \psi) = \int_0^d \rho(z) \exp[-\mu_e(d-z)](1-f + fe^{-P/f}) dz,$$

$$P = (D/\sin \theta) \arctan[(G/k)(d-z) \sin \theta], \quad (13)$$

при $P/f \ll 1$ практически совпадающий с формулой

$$Y(k, \theta_i, \psi) = \int_0^d \rho(z) \exp[-\mu_e(d-z)] e^{-P} dz,$$

принятой в [1], где $G = 0.826897 \text{ см}^{-1}$, $D = 5.963923 \cdot 10^{-5}$ для фазы А, а для фазы В параметр D взят в 2.06 раза меньше. Однако из формул (2), (3) статьи [1] этого не видно, так как фактор, зависящий от ψ , в них отсутствует, что, скорее всего, является опечаткой. Обозначив этот фактор буквой ξ , имеем $\xi_A/\xi_B = 2.06$ (ср. с текстом под формулой (12)). Распределение плотности $\rho(z)$ для ядер ^{109}Cd вдоль оси Z , нормальной к пластине, определено в [1] из эксперимента.

4. Перспективы уточнения, ускорения и расширения исследований по ЕСС–КСТС. Итак, теория ЕСС–КСТС (см. [3] и ч. 2 настоящей статьи) находится в согласии с первичными экспериментальными данными работы [1], но не с ее рабочей гипотезой о разрешенности СТС и, как следствие, о зависимости резонансного поглощения от угла ψ между волновым вектором и внешним магнитным полем \mathbf{H}_{ex} . Поэтому можно пренебречь магнитным полем Земли, что в несколько раз ускорит накопление данных. Вместе с тем использование полей выше 10^4 Гс, портящих ЕСС–КСТС, позволит оценить флуктуации поля Ферми. Итоги п/п. 1.1 помогут выявить и устранить систематические ошибки, в том числе дадут возможность использовать второй детектор с другой стороны пластины. Результаты ч. 2 расширяют область ядер и сред с ЕСС–КСТС, очерченную в [3]. Метод скорректированных чисел N_{CT} и ч. 3 полезны в анализе ЕСС–КСТС. Эффекты КСТС–ЕСС можно

наблюдать не только по сужению линии. Например, они ведут к 100-процентной деполяризации ядер и излучения. Исследования ЕСС–КСТС возможны не только в γ -резонансе, но и в других областях спектроскопии.

Автор глубоко признателен за помощь, оказанную в разное время: массивы числовых данных работы [1] были любезно предоставлены ее руководителем проф. А.В. Давыдовым (ИТЭФ, Москва); обработка этих массивов и получение результатов ч. 1 настоящей статьи были бы невозможны без консультаций по Фортрану у проф. В.Л. Бугаенко (ИТЭФ, Москва); недостающее звено в объяснении ЕСС было обнаружено в монографии [11]²⁾, рекомендованной автору 30 лет назад в качестве настольной книги Ю.А. Изюмовым (академик РАН, Институт физики металлов, Екатеринбург). Автор благодарит коллектив Отдела строения вещества им. Гольданского за многолетнюю поддержку.

1. Ю. Д. Баюков, А. В. Давыдов, Ю. Н. Исаев, Г. Р. Карташов, М. М. Коротков, В. В. Мигачев, Письма в ЖЭТФ **90**(7), 547 (2009).
2. А. В. Давыдов, Ю. Н. Исаев, В. М. Самойлов, Изв. РАН, сер. физ. **61**, 2221 (1997).
3. С. В. Карягин, Письма в ЖЭТФ **98**(3), 197 (2013).
4. W. Wildner and U. Gonser, J. de Phys. Coll. Suppl. **40**, 2 (1979).
5. S. Rezaie-Serej, G. R. Hoy, and R. D. Taylor, Laser Physics **5**, 240 (1995).
6. V. G. Alpatov, Yu. D. Bayukov, V. M. Gelis, A. V. Davydov, Yu. N. Isaev, G. R. Kartashov, M. M. Kоротков, V. V. Milyutin, and V. M. Samoilov, Laser Physics **10**, 952 (2000).
7. V. G. Alpatov, Yu. D. Bayukov, A. V. Davydov, Yu. N. Isaev, G. R. Kartashov, M. M. Kоротков, and D. V. L'vov, Laser Physics **15**, 1680 (2005).
8. V. G. Alpatov, Yu. D. Bayukov, A. V. Davydov, Yu. N. Isaev, G. R. Kartashov, M. M. Kоротков, and V. V. Migachev, Laser Physics **17**, 1067 (2007).
9. С. В. Карягин, Статья направляется в ЖЭТФ.
10. Дж. Тейлор, *Введение в теорию ошибок*, М., Мир (1985).
11. Н. Ашкрофт, Н. Мермин, *Физика твердого тела*, пер. А. С. Михайлова, под ред. М. И. Каганова, М., Мир (1979).
12. N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, HRW, Philadelphia (1976).

²⁾Важную роль в рождении объяснения ЕСС [3] сыграли примечания в русском переводе [11] монографии [12].