Письма в ЖЭТФ, том 99, вып. 3, с. 141 – 145 © 2014 г. 10 февраля

О медленных течениях слабо стратифицированной релятивистской жидкости в статическом гравитационном поле

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 декабря 2013 г.

После переработки 13 января 2014 г.

Исходя из вариационной формулировки общерелятивистской идеальной гидродинамики выводятся упрощенные уравнения для медленных движений слабо стратифицированной (по энтропии) жидкости внутри либо вблизи массивного астрофизического объекта при условиях, что гравитационное поле в главном порядке является центрально-симметричным и статическим, а влияние магнитного поля пренебрежимо мало. Внутренние волны и вихри в таких системах оказываются мягкими модами по сравнению со звуком. Это позволяет сформулировать "звуконепроницаемую" гамильтонову модель. Последняя является аналогом нерелятивистских гидродинамических "безэластичных моделей" (anelastic models), широко используемых в науке об атмосфере, геофизике и астрофизике при исследованиях внутренних волн и/или конвекции в пространственно-неоднородных сжимаемых средах.

DOI: 10.7868/S0370274X14030035

Введение. Крупномасштабные движения существенно сжимаемой жидкой среды (газа, плазмы, звездной материи) часто происходят на фоне пространственно-неоднородного распределения ее плотности, которое обусловлено наличием гравитационного поля. В качестве физических примеров можно привести распространение внутренних волн и/или конвекцию в атмосферах планет, а также аналогичные процессы внутри звезд. При исследованиях подобных систем весьма существенным оказывается тот факт, что (локальная) скорость распространения звуковых волн обычно многократно превышает характерные скорости течения. При этом плотность жидкого элемента может сильно меняться при его движении, приближенно следуя равновесному статическому профилю $\bar{\rho}(\mathbf{r})$. Наличие (в рамках полных гидродинамических уравнений) "жестких" – акустических – степеней свободы препятствует эффективному численному моделированию динамики "мягких" мод – внутренних волн и вихрей, которые представляют наибольший интерес. Чтобы преодолеть эту трудность, в свое время были предложены различные приближенные модели с "отфильтрованными" акустическими модами (см. [1–6] и ссылки там). Многие из этих "звуконепроницаемых" (soundproof) гидродинамических моделей вместо полного уравнения непрерывности $\rho_t + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0$ используют его усеченный вариант: $\nabla(\bar{\rho}\mathbf{v}) = 0$. Такое приближение называют безэластичным (anelastic). При этом, разумеется, разного рода упрощениям подвергается и правая часть динамического уравнения Навье–Стокса. Поскольку равновесный профиль $\bar{\rho}(\mathbf{r})$ зависит от распределения удельной энтропии s (которая в консервативном случае подчиняется уравнению переноса $s_t + \mathbf{v}\cdot\nabla s = 0$), безэластичные модели могут быть приближенно справедливы лишь при условии относительно слабой стратификации: $|\tilde{s}|/s_0 \ll 1$, где $\tilde{s}(t,\mathbf{r}) = s(t,\mathbf{r}) - s_0$ представляет собой малое отклонение от некоторой постоянной величины s_0 (подразумевается, что энтропия равна нулю при нулевой температуре). Другими словами, должны иметься в виду почти изэнтропические течения. Для случая сильной стратификации были предложены звуконепроницаемые модели с более сложной структурой (обсуждение некоторых вариантов см. в [4–7]).

Большинство опубликованных к настоящему времени работ с применением звуконепроницаемых моделей относится к нерелятивистской гидродинамике (см., например, [8–13] и ссылки там). Только относительно недавно было проведено несколько общерелятивистских исследований, где безэластичное приближение введено и использовано для численного моделирования движения жидкости внутри либо вблизи массивного астрофизического объекта, который сильно искривляет пространство-время [14–16]. В целом свойства звуконепроницаемых моделей в общерелятивистской гидродинамике исследованы пока недостаточно. Например, не выяснен вопрос об их гамильтоновой структуре. Данная работа призвана в некоторой мере исправить эту ситуацию. Ее главной

[1)]e-mail: ruban@itp.ac.ru

целью является вывод гамильтоновой безэластичной модели, пригодной для описания медленных течений жидкой среды в сильном статическом центрально-симметричном гравитационном поле. При этом будет подразумеваться, что полная релятивистская плотность ε энергии жидкости, измеренная в локально сопутствующей системе отсчета, связана определенным уравнением состояния $\varepsilon(n,s)$ с плотностью n числа сохраняющихся частиц и с энтропией s, приходящейся на одну такую частицу [17]. Магнитное поле и тепловое излучение здесь не учитываются. В качестве промежуточного результата будет показано, каким образом, несмотря на предполагаемую медленность течений по сравнению со скоростью света (которая здесь отнормирована на единицу), кривизна пространства-времени модифицирует гамильтониан и уравнения движения жидкости по сравнению с нерелятивистской теорией. Следует заметить, что все диссипативные эффекты окажутся за рамками данного рассмотрения. В случае устойчивой стратификации пренебрежение вязкостью, теплопроводностью и диффузией обычно вполне уместно. Однако для корректного описания конвекции (при неустойчивой стратификации) учет диссипации принципиально важен. В таком случае наша теория неприменима.

Общая структура уравнений. Напомним некоторые сведения из канонической теории жидких сплошных сред (для сравнения см. [18], где исследовался изэнтропический случай). Отметим, что используемый здесь подход позволяет получать гидродинамические уравнения движения непосредственно для физических полей: плотности, скорости и энтропии. Этим он отличается от метода лагранжианов со связями, где уравнения движения содержат вспомогательные поля, являющиеся неопределенными множителями Лагранжа [19–21].

Как известно, полное (так называемое лагранжево) описание течения некоторой сплошной среды можно задавать трехмерным отображением $\mathbf{r} = \mathbf{x}(t,\mathbf{a})$, которое указывает пространственные координаты каждой материальной точки, помеченной маркером $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, в произвольный момент времени t. Маркировку $\mathbf{a}$ всегда можно выбрать таким образом, чтобы количество вещества, приходящееся на малый объем $d^3\mathbf{a}$ в пространстве маркеров, было равно этому объему. Поскольку динамическая система предполагается консервативной, уравнения движения для отображения $\mathbf{x}(t,\mathbf{a})$, а также для имеющихся в системе полей (в нашем случае это будут компоненты метрического тензора $g_{ik}(t,\mathbf{r})$, определяющего элемент интервала в пространстве-времени $d\hat{s}^2 = g_{ik}dx^i dx^k$), следуют из вариационного принципа:

$$\delta I = \delta \int \mathcal{L}\{\mathbf{x}(t,\mathbf{a}), g_{ik}(t,\mathbf{r})\}dt = 0, \tag{1}$$

где лагранжиан $\mathcal{L}$ является функционалом от $\mathbf{x}(t,\mathbf{a})$, $g_{ik}(t,\mathbf{r})$ и их производных, конкретный вид которого для релятивистской гидродинамики будет указан далее. Отметим весьма существенное обстоятельство: мы имеем дело именно с текучей средой. Свойство текучести проявляется в том, что фактически в лагранжиан $\mathcal{L}$ зависимость от $\mathbf{x}(t,\mathbf{a})$ входит лишь посредством трех так называемых эйлеровых полей: поля относительной (“координатной”) плотности $\rho(t,\mathbf{r})$, поля скорости $\mathbf{v}(t,\mathbf{r})$ и поля энтропии $s(t,\mathbf{r})$, т.е. $\mathcal{L} = \mathcal{L}\{\rho, \mathbf{v}, s, g_{ik}\}$, причем

$$\rho(t,\mathbf{r}) = (1/\det\|\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{a}\|)|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}^{-1}(t,\mathbf{r})}, \tag{2}$$

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{r}) = \dot{\mathbf{x}}(t,\mathbf{a})|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}^{-1}(t,\mathbf{r})}, \tag{3}$$

$$s(t,\mathbf{r}) = s_*(\mathbf{a})|_{\mathbf{a}=\mathbf{x}^{-1}(t,\mathbf{r})}. \tag{4}$$

Из этих определений следует, что динамика “плотности” $\rho(t,\mathbf{r})$ подчиняется уравнению непрерывности в его стандартном виде:

$$\rho_t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0, \tag{5}$$

а динамика поля s определяется уравнением переноса:

$$s_t + \mathbf{v}\cdot\nabla s = 0. \tag{6}$$

Как известно, условие равенства нулю вариации действия $I = \int \mathcal{L}dt$ при варьировании по $\delta\mathbf{x}(t,\mathbf{a})$ имеет вид

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{x}(\mathbf{a})} - \frac{d}{dt}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a})} = 0, \tag{7}$$

где $d/dt = (\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)$ — производная по времени при фиксированном $\mathbf{a}$ (субстанциональная производная). С учетом соотношений между вариациями:

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = -\nabla(\rho\cdot\delta\mathbf{x}), \tag{8}$$

$$\delta\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \delta\dot{\mathbf{x}} - (\delta\mathbf{x}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \tag{9}$$

$$\delta s(\mathbf{r}) = -\delta\mathbf{x}\cdot\nabla s, \tag{10}$$

уравнение (7) может быть записано в эйлеровом представлении следующим образом (обобщенное уравнение Эйлера):

$$(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{v}}\right) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v^\alpha}\right)\nabla v^\alpha = \\ = \nabla\left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\rho}\right) - \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta s}\right)\frac{\nabla s}{\rho}. \tag{11}$$

Вместе с условиями $\delta I/\delta g_{ik} = 0$ уравнения (5), (6) и (11) полностью определяют эволюцию гидродинамической системы. Важно, что для моделей рассматриваемого типа справедлива (обобщенная) теорема

Эртеля [17, 21]. Эта теорема утверждает сохранение циркуляции вектора канонического импульса

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{a})} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\mathbf{v}} \qquad (12)$$

вдоль произвольного замкнутого жидкого контура, лежащего на вмороженной в жидкость поверхности $s(\mathbf{r},t) = \mathrm{const}$. Равносильным является утверждение о переносе (псевдо-)скаляра $f = (\nabla s\cdot \mathrm{curl}\,\mathbf{p})/\rho$, т.е. $f_t + \mathbf{v}\cdot\nabla f = 0$. В частности, существует класс течений, для которых $f\equiv 0$. Такие течения характеризуются всего четырьмя скалярными функциями координат и времени, а не пятью, как в общем случае (ρ, s и три компоненты поля скорости). Уравнения движения для этого класса легче всего получить с помощью уже упоминавшегося метода добавления в лагранжиан кинематических связей [21]:

$$\mathcal{L}^{[\phi,\theta]} = \mathcal{L}\{\rho,\mathbf{v},s\} + \int\big\{\phi[\rho_t + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})] - \theta[s_t + \mathbf{v}\cdot\nabla s]\big\}d\mathbf{r}. \qquad (13)$$

Варьирование данного лагранжиана по $\delta\mathbf{v}$ приводит к соотношению $\delta\mathcal{L}/\delta\mathbf{v} = \rho\nabla\phi + \theta\nabla s$, которое в принципе позволяет исключить поле скорости и представить лагранжиан в каноническом виде:

$$\mathcal{L}^{[\phi,\theta]}_{\mathrm{can}} = \int(\phi\rho_t + s\theta_t)d\mathbf{r} - \mathcal{H}^{[\phi,\theta]}_{\mathrm{can}}\{\rho,\phi;\theta,s\}. \qquad (14)$$

В случае устойчивой стратификации две пары канонически сопряженных полей, (ρ,ϕ) и (θ,s), дают описание звуковых и внутренних волн, взаимодействующих между собой.

Лагранжиан релятивистской гидродинамики. Обратимся теперь к релятивистской гидродинамике и рассмотрим соответствующее релятивистски инвариантное выражение для действия I [19, 20, 22]:

$$I = -\int\sqrt{-g}\Big(\varepsilon(n,s) + \frac{1}{16\pi}R[g_{ik}]\Big)d\mathbf{r}dt. \qquad (15)$$

Здесь $\varepsilon(n,s)$ – заданное уравнение состояния жидкости, $g = \det\|g_{ik}\|$ – определитель метрического тензора, $R[g_{ik}]$ – скалярная кривизна пространства-времени, построенная по g_{ik} [22]. В этом выражении, однако, скаляр n должен быть выражен через динамические переменные $\{\rho,\mathbf{v},g_{ik}\}$. Сравнивая уравнение непрерывности (5) с уравнением сохранения количества вещества [17]:

$$n^i_{;i} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}n\frac{dx^i}{d\hat{s}}\right) = 0, \qquad (16)$$

нетрудно убедиться в том, что $\rho = \sqrt{-g}n(dt/d\hat{s})$. Отсюда имеем соотношение

$$n = \frac{\rho}{\sqrt{-g}}\sqrt{g_{00} + (g_{0\alpha} + g_{\alpha 0})v^\alpha + g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta}, \qquad (17)$$

которое должно быть подставлено в выражение (15). Затем по формулам (5), (6), (11) и $\delta I/\delta g_{ik} = 0$ получаются уравнения движения.

Равновесное состояние. Далее мы будем рассматривать медленные течения на фоне почти статического профиля плотности. Такие движения жидкости практически не возмущают метрику. Поэтому нас интересует самосогласованное равновесное центрально-симметричное гравитационное поле. Для компактности последующих формул удобно использовать так называемые изотропные координаты [23], в которых элемент интервала есть

$$(d\hat{s}^2)^{stat} = A(r)dt^2 - B(r)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (18)$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Соответствующие данной метрике уравнения Эйнштейна в терминах $\nu = \log A$ и $\mu = \log B$ имеют следующий вид (штрихами обозначены производные по r):

$$8\pi p = e^{-\mu}\Big(\frac{\mu'^2}{4} + \frac{\mu'\nu'}{2} + \frac{\mu'+\nu'}{r}\Big), \qquad (19)$$

$$8\pi p = e^{-\mu}\Big(\frac{\mu''}{2} + \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\mu'+\nu'}{2r}\Big), \qquad (20)$$

$$8\pi\varepsilon = -e^{-\mu}\Big(\mu'' + \frac{\mu'^2}{4} + \frac{2\mu'}{r}\Big), \qquad (21)$$

где $p = [n(\partial\varepsilon/\partial n) - \varepsilon]$ есть давление жидкости. Поиск решений этой системы представляет собой отдельную задачу с долгой историей (см., например, [24–31] и ссылки там). Важно отметить, что между функциями μ' и ν' имеется не зависящее от уравнения состояния дифференциальное соотношение типа уравнения Риккати. Оно следует из равенства правых частей первых двух уравнений и выражает условие изотропии давления. В данной работе мы будем полагать, что функции $A(r)$, $B(r)$, $\bar{n}(r)$ и $\bar{s}(r)$, описывающие равновесное состояние, нам каким-либо образом известны, и сосредоточимся на вопросах гидродинамики.

В уравнениях Эйнштейна содержится условие гидростатического равновесия [17]: $(\varepsilon + p)\nabla(\sqrt{A}) + \sqrt{A}\nabla p = 0$, которое можно переписать также в виде

$$\nabla\left(\sqrt{A}w\,(n,s)\right) - \sqrt{A}T(n,s)\nabla s = 0, \qquad (22)$$

где $w(n,s) = (\varepsilon + p)/n = \partial\varepsilon(n,s)/\partial n$ – релятивистская энтальпия, приходящаяся на одну частицу, $T = [\partial\varepsilon(n,s)/\partial s]/n$ – температура. При $s = s_0$ из (22) следует соотношение $\sqrt{A}w(\bar{\rho}/\sqrt{B^3}, s_0) = \lambda_0 = \mathrm{const}$. В общем же случае $\sqrt{A}w(\bar{\rho}/\sqrt{B^3},\bar{s}) = \lambda(r)$.

Предел малых скоростей. При фиксированной статической центрально-симметричной метрике (18) лагранжиан релятивистской гидродинамики принимает вид

$$\mathcal{L}_{\rm GRHD}\{\rho,\mathbf{v},s\} = -\int \sqrt{AB^3}\ \varepsilon\Big(\frac{\rho\sqrt{A-B\mathbf{v}^2}}{\sqrt{AB^3}}, s\Big)d\mathbf{r}, \tag{23}$$

где скалярный квадрат $\mathbf{v}^2$ понимается в евклидовом смысле: $\mathbf{v}^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Можно указать физическую ситуацию, когда $\mathcal{L}_{\rm GRHD}$ применим вплоть до скоростей порядка скорости света. Так, если астрофизический объект состоит из небольшого массивного ядра и относительно легкой оболочки, то в главном порядке метрика пространства-времени вне ядра определяется только массой ядра M_*, причем $A(r)$ и $B(r)$ имеют вид [22]

$$A(r) = [1 - M_*/(2r)]^2[1 + M_*/(2r)]^{-2}, \tag{24}$$

$$B(r) = [1 + M_*/(2r)]^4. \tag{25}$$

В этом случае гидродинамика жидкости, составляющей оболочку, корректно описывается лагранжианом (23) при произвольных скоростях.

Однако сейчас нас интересуют медленные течения со слабой стратификацией. Поэтому мы вправе произвести разложение $\mathcal{L}_{\rm GRHD}$ до первого порядка по степеням квадрата скорости $\mathbf{v}^2$ и отклонения энтропии $\tilde{s} = s - s_0$. В результате получим приближенный лагранжиан

$$\mathcal{L}_* = \int\Big[w_0\Big(\frac{\rho}{\sqrt{B^3}}\Big)\frac{\rho B}{\sqrt{A}}\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \sqrt{AB^3}\varepsilon_0\Big(\frac{\rho}{\sqrt{B^3}}\Big) - \sqrt{A}\tilde{s}\rho T_0\Big(\frac{\rho}{\sqrt{B^3}}\Big)\Big]d\mathbf{r}, \tag{26}$$

где $w_0(n)$, $\varepsilon_0(n)$ и $T_0(n)$ – энтальпия, плотность энергии и температура, взятые при $s = s_0$. Именно на лагранжиане $\mathcal{L}_*$ будет основано дальнейшее рассмотрение. Поскольку $\mathcal{L}_*$, по сути, представляет собой разность кинетической и потенциальной энергий, динамическая система, которая им описывается, принадлежит классу так называемых натуральных лагранжевых систем. Наиболее важное отличие рассматриваемой модели от обычной эйлеровской гидродинамики – присутствие в кинетической части множителя $w_0B/\sqrt{A}$. Уравнения медленного сжимаемого движения представляют собой два стандартных кинематических уравнения (5) и (6) (с заменой $s \to \tilde{s}$), а также динамическое уравнение, построенное по схеме (11):

$$(\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\frac{w_0B}{\sqrt{A}}\mathbf{v}\right) + \frac{w_0B}{\sqrt{A}}\nabla\frac{\mathbf{v}^2}{2} = \sqrt{A}T_0\nabla\tilde{s} + \nabla\Big(\Big[\frac{w_0B}{\sqrt{A}} + \frac{\rho w_0'}{\sqrt{AB}}\Big]\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \sqrt{A}\Big[w_0 + \tilde{s}T_0 + \frac{\tilde{s}\rho T_0'}{\sqrt{B^3}}\Big]\Big). \tag{27}$$

Очевидно прослеживается родственная связь этого уравнения с обычным уравнением Эйлера.

Попутно заметим, что специальный класс течений (13), (14) описывается каноническими уравнениями с гамильтонианом

$$\mathcal{H}^{[\phi,\theta]}_{*\rm can}\{\rho,\phi;\theta,\tilde{s}\} = \int\frac{\sqrt{A}\rho[\nabla\phi + \theta\nabla\tilde{s}/\rho]^2}{2Bw_0(\rho/\sqrt{B^3})}d\mathbf{r} + \int\Big[\sqrt{AB^3}\varepsilon_0\Big(\frac{\rho}{\sqrt{B^3}}\Big) + \sqrt{A}\tilde{s}\rho T_0\Big(\frac{\rho}{\sqrt{B^3}}\Big)\Big]d\mathbf{r}. \tag{28}$$

Лагранжиан (26), несомненно, заслуживает внимания уже и в таком виде. Однако мы пойдем еще дальше по пути упрощения и выведем из него безэластичную модель.

Безэластичное приближение. Следуя общей схеме [18], введем поле канонического импульса $\mathbf{p}$ по формуле (12) и поле обобщенной завихренности $\mathbf{\Omega} = \mathrm{curl}\,\mathbf{p}$. В нашем случае $\mathbf{p} = (w_0B/\sqrt{A})\mathbf{v}$. Определим функционал Гамильтона (гамильтониан) как преобразование Лежандра:

$$\mathcal{H}_*\{\rho,\mathbf{p},\tilde{s}\} = \int\Big(\frac{\delta\mathcal{L}_*}{\delta\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\Big)d\mathbf{r} - \mathcal{L}_* = \int\Big[\frac{\sqrt{A}}{w_0B}\cdot\frac{\rho\mathbf{p}^2}{2} + \sqrt{AB^3}\varepsilon_0 + \sqrt{A}\tilde{s}\rho T_0\Big]d\mathbf{r}. \tag{29}$$

Согласно известным правилам пересчета производных имеют место соотношения

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\mathbf{p}}, \quad \frac{\mathbf{v}}{\rho}\frac{\delta\mathcal{L}_*}{\delta\mathbf{v}} - \frac{\delta\mathcal{L}_*}{\delta\rho} = \frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\rho}, \quad \frac{\delta\mathcal{L}_*}{\delta\tilde{s}} = -\frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\tilde{s}}. \tag{30}$$

Тогда система гидродинамических уравнений перепишется в неканонической гамильтоновой форме:

$$\rho_t = -\nabla\cdot\Big(\frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\mathbf{p}}\Big), \tag{31}$$

$$\tilde{s}_t = -\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\mathbf{p}}\Big)\cdot\nabla\tilde{s}, \tag{32}$$

$$\mathbf{p}_t = \Big[\frac{1}{\rho}\Big(\frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\mathbf{p}}\Big)\times\mathrm{curl}\,\mathbf{p}\Big] - \nabla\frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\rho} + \frac{\delta\mathcal{H}_*}{\delta\tilde{s}}\frac{\nabla\tilde{s}}{\rho}. \tag{33}$$

Теперь введем безэластичное приближение, принудительно полагая $\rho = \bar{\rho}(r)$, что эквивалентно условию

$$\nabla\cdot\Big(\frac{A\bar{\rho}}{\lambda B}\mathbf{p}\Big) = 0, \tag{34}$$

где $\lambda = \lambda_0 = \mathrm{const}$. В результате этого условия

$$\delta\mathcal{H}_*/\delta\mathbf{p} \to \mathrm{curl}\,(\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{\Omega}), \tag{35}$$

причем гамильтониан безэластичной модели равен

$$\mathcal{H} = \int\Big[\frac{A\bar{\rho}}{\lambda B}\frac{\mathbf{p}^2}{2} + \sqrt{A}\tilde{s}\bar{\rho}T_0\Big(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{B^3}}\Big)\Big]d\mathbf{r}. \tag{36}$$

При этом подразумевается, что $\mathbf{p} = \mathrm{curl}^{-1}\mathbf{\Omega} + \nabla\varphi$, а потенциал φ должен находиться из условия (34).

Затем берем ротор от уравнения (33) и приходим к системе уравнений, имеющей следующую неканоническую гамильтонову структуру:

$$\tilde{s}_t = -\frac{\nabla\tilde{s}}{\bar{\rho}}\mathrm{curl}\Big(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{\Omega}}\Big), \tag{37}$$

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathrm{curl}\left[\mathrm{curl}\Big(\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathbf{\Omega}}\Big)\times\frac{\mathbf{\Omega}}{\bar{\rho}}\right] + \nabla\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\tilde{s}}\right)\times\nabla\tilde{s}. \tag{38}$$

Теперь мы в состоянии выписать в явном виде полную систему уравнений безэластичной модели, которая представляет собой главный результат данной работы:

$$\nabla\cdot(\bar{\rho}\mathbf{v}) = 0, \tag{39}$$

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{curl}\Big(\frac{\lambda B}{A}\mathbf{v}\Big), \tag{40}$$

$$\tilde{s}_t = -\mathbf{v}\cdot\nabla\tilde{s}, \tag{41}$$

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathrm{curl}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega}] + [\nabla(\sqrt{A}T_0)\times\nabla\tilde{s}]. \tag{42}$$

Подчеркнем, что зависящие от r коэффициенты этой системы должны находиться путем решения общерелятивистской задачи о равновесном распределении жидкости с заданным уравнением состояния в самосогласованном гравитационном поле.

Выведенные уравнения (39)–(42) описывают взаимодействие внутренних волн и вихрей. Вихревые степени свободы в данном случае представляют собой псевдоскалярное поле $f = (\nabla\tilde{s}\cdot\mathbf{\Omega})/\bar{\rho}$, вмороженное в жидкость. Если $f \equiv 0$, то в системе остаются только внутренние волны. Лагранжиан со связями для этого случая имеет вид

$$\mathcal{L}_{\mathrm{IW}} = \int\big[\phi\nabla\cdot(\bar{\rho}\mathbf{v}) - \theta(\tilde{s}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\tilde{s})\big]d\mathbf{r} + \\ + \int\Big[\frac{\lambda B}{A}\frac{\bar{\rho}\mathbf{v}^2}{2} - \sqrt{A}\tilde{s}\bar{\rho}T_0\Big(\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{B^3}}\Big)\Big]d\mathbf{r}. \tag{43}$$

Если исключить отсюда поля $\mathbf{v}$ и ϕ с помощью соотношений

$$\lambda B\bar{\rho}\mathbf{v}/A = \bar{\rho}\nabla\phi + \theta\nabla\tilde{s}, \qquad \nabla\cdot(\bar{\rho}\mathbf{v}) = 0, \tag{44}$$

то останется только одна пара канонически сопряженных переменных: θ и $\tilde{s}$.

В заключение скажем следующее. Обычно принято считать, что общерелятивистская гидродинамика намного сложнее для исследования, чем эйлеровская. В данной работе показано, что это не всегда так. Для вполне физически интересного случая медленных течений жидкости на неоднородном фоне в сильном гравитационном поле оказывается возможным представить уравнения движения в достаточно компактном виде, если использовать гамильтонов формализм. Более подробный анализ выведенных уравнений выходит за рамки короткой статьи.

1. Y. Ogura and N. A. Phillips, J. Atmos. Sci. **19**, 173 (1962).
2. D. R. Durran, J. Atmos. Sci. **46**, 1453 (1989).
3. P. R. Bannon, J. Atmos. Sci. **53**, 3618 (1996).
4. D. R. Durran, J. Fluid Mech. **601**, 365 (2008).
5. A. S. Almgren, J. B. Bell, C. A. Rendleman, and M. Zingale, Astrophys. J. **637**, 922 (2006).
6. U. Achatz, R. Klein, and F. Senf, J. Fluid Mech. **663**, 120 (2010).
7. B. P. Brown, G. M. Vasil, and E. G. Zweibel, Astrophys. J. **756**, 109 (2012).
8. G. A. Glatzmaier and P. H. Roberts, Physica D **97**, 81 (1996).
9. P. H. Roberts and G. A. Glatzmaier, Rev. Mod. Phys. **72**, 1081 (2000).
10. T. S. Lund and D. C. Fritts, J. Geophys. Res. **117**, D21105 (2012).
11. T. M. Rogers and G. A. Glatzmaier, Astrophys. J. **620**, 432 (2005).
12. T. M. Rogers and G. A. Glatzmaier, Mon. Not. R. Astron. Soc. **364**, 1135 (2005).
13. M. K. Browning, Astrophys. J. **676**, 1262 (2008).
14. L. Villain, S. Bonazzola, and P. Haensel, Phys. Rev. D **71**, 083001 (2005).
15. S. Bonazzola, L. Villain, and M. Bejger, Class. Quantum Grav. **24**, 221 (2007).
16. P. Cerda-Duran, N. Stergioulas, and J. A. Font, Mon. Not. R. Astron. Soc. **397**, 1607 (2009).
17. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, N.Y. [Russian original, Nauka, M. (1988)].
18. V. P. Ruban, Phys. Rev. D **62**, 127504 (2000).
19. J. R. Ray, J. Math. Phys. **13**, 1451 (1972).
20. J. D. Brown, Class. Quantum Grav. **10**, 1579 (1993).
21. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Усп. Физ. Наук **167**, 1137 (1997).
22. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1980).
23. R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*, Oxford Univ. Press, N.Y. (1934).
24. S. S. Bayin, Phys. Rev. D **18**, 2745 (1978).
25. E. N. Glass and S. P. Goldman, J. Math. Phys. **19**, 856 (1978).
26. J. Hajj-Boutros, J. Math. Phys. **27**, 1363 (1986).
27. S. Rahman and M. Visser, Class. Quantum Grav. **19**, 935 (2002).
28. K. Lake, Phys. Rev. D **67**, 104015 (2003).
29. J. Loranger and K. Lake, Phys. Rev. D **78**, 127501 (2008).
30. N. Pant, R. N. Mehta, and M. J. Pant, Astrophys. Space Sci. **330**, 353 (2010).
31. N. Pant, P. Fuloria, and B. C. Tewari, Astrophys. Space Sci. **340**, 407 (2012).