Письма в ЖЭТФ, том 53, вып. 11, стр. 558 — 560 10 июня 1991 г.

ОБ АКУСТИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В.Л.Покровский

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау АН СССР
142432, Черноголовка

Поступила в редакцию 16 мая 1991 г.

Рассмотрена акустическая турбулентность в ситуации, когда имеется две акустические ветви и определяющим является процесс распада фонона одной ветви на два фонона другой ветви в этом случае или процесс черенковского излучения одного фонона другим. Показано, что кроме известного (Колмогоровского) спектра турбулентности и распределения Релея - Джинса, кинетические уравнения допускают еще два степенных решения с $\epsilon_k \sim k^{-1}$ и $\epsilon_k \sim k^3$.

Проблема акустической турбулентности в обычной сжимаемой жидкости была впервые рассмотрена Захаровым и Сагдеевым [1]. Предполагая, что амплитуды звука с разными волновыми векторами статистически независимыми и выполняется предположение Колмогорова о постоянстве потока энергии по длинам волн, авторы [1] провели размерные оценки, давшие для плотности энергии ϵ_k степенную зависимость ($\epsilon_k \sim k^{-3/2}$). Было показано, что тот же результат следует из кинетического уравнения для фононов. Применимость кинетического уравнения и результаты работы [1] были подвергнуты критике Кадомцевым и Петвиашвили [2]. Было указано, что линейная дисперсия звука, приводящая к распаду вдоль прямой, ведет не к хаотизации фаз, а к образованию ударных волн, что, естественно, приводит к совершенно другому виду спектра. Определяющая роль процессов высокого порядка отмечалась в более ранних работах Ландау и Халатникова [3] .

Этой трудности можно избежать если в системе имеется две акустические ветви и разрешенными являются процессы превращения колебаний одной ветви в другую. Примером такой системы является изотропное твердое тело, в котором спектры продольных и поперечных фононов являются нераспадными

$$\omega_{1,t} = S_{1,t}\vec{q}(1 - \gamma_{1,t}q^2); \qquad \gamma_{1,t} > 0,$$

где $\omega_{1,t}$ - частота, $S_{1,t}$ - скорость, $\vec{q}$ - волновый вектор. Возможны кубические ангармонизмы вида $(\mathrm{div}\vec{u})^3$ и $(\mathrm{rot}\vec{u})^2\mathrm{div}\vec{u}$, где $\vec{u}$ - смещение. Первый из них неэффективен, так как распад продольного звука на два продольных запрещен законом сохранения энергии. Второй приводит к разрешенному распаду продольного звука на две поперечных.

Второй пример - взаимодействие продольного звука со спиновыми волнами в изотропном антиферрромагнетике. В этом случае допустимый ангармонизм имеет вид $\mathrm{div}\vec{u}(\nabla l_\alpha)^2$, где l_α - компоненты двумерного вектора поперечной вариации параметр порядка. При этом возможен распад фонона на две спиновых волны, но запрещен процесс черенковского излучения. Несколько более проблематичным представляется пример 2-жидкостной гидродинамики в сверхтекучем гелии. В этом случае в принципе разрешен процесс распада первого звука в два первых, второго в два вторых, а также первого в два вторых и черенковское излучение второго звука первым [1]. Однако, в конкретных режимах определяющую роль играет один из процессов. Можно ожидать, что существует режим, при котором основную роль играет распад первого звука на два вторых [5], а всеми остальными можно пренебречь.

В условиях, о которых говорилось выше, коллинеарность процессов распада не соблюдается. Тогда процессы высшего порядка не существенны, и применимо кинетическое уравнение для фононов различных сортов.

Будет показано, что кроме двух известных решений, соответствующих распределению Рэлея - Джинса и Колмогорова, такие уравнения имеют по крайней мере еще два степенных решения.

Пусть для определенность разрешен лишь распад $1 \to 22$. Обозначим $N(\vec{k})$ и $n(\vec{k})$ числа заполнения фононов сорта 1 и 2. $\Omega(\vec{k}) = s_1 k$ и $\omega(\vec{k}) = s_2 k$ их частоты.

Кинетические уравнения можно записать в виде

$$\dot{N}(\vec{k}) = \int d^3k_1 W(\vec{k}; \vec{k}_1, \vec{k}_2)\delta(\Omega(k) - \Omega(k_1) - \Omega(k_2))(n_1 n_2 - Nn_1 - Nn_2), \tag{1}$$

$$\dot{n}(\vec{k}) = \int d^3k_1 W(\vec{k}; \vec{k}, \vec{k}_2)\delta(\Omega(k) - \Omega(k_2) - \Omega(k_1))(N_1 n + N_1 n_2 - nn_2), \tag{2}$$

где $\vec{k}_2 = \vec{k} - \vec{k}_1$ и вероятность распада W можно записать в виде

$$W(\vec{k}; \vec{k}_1, \vec{k}_2) = kk_1k_2 f(k; k_1, k_2) \tag{3}$$

и $f(k; k_1, k_2)$ - однородная функция нулевой степени относительно своих аргументов. Будем искать стационарные решения кинетических уравнений степенного вида:

$$N(\vec{k}) = Ak^s; \quad n(\vec{k}) = Bk^s. \tag{4}$$

Тогда условие разрешимости уравнений (1), (2) примут вид

$$ad = bc, \tag{5}$$

где

$$a = \int d^3k_1 W(k; k_1, k_2)\delta(\Omega - \omega_1 - \omega_2)k_1^s k_2^s, \tag{6}$$

$$b = \int d^3k_1 W(k; k_1, k_2)\delta(\Omega - \omega_1 - \omega_2)k^s(k_1^s + k_2^s), \tag{7}$$

$$c = \int d^3k_1 W(k_1; k, k_2)\delta(\omega + \omega_2 - \Omega_1)k^s k_2^s), \tag{8}$$

$$d = \int d^3k_1 W(k_1; k, k_2)\delta(\omega + \omega_2 - \Omega_1)k_1^s(k^s + k_2^s), \tag{9}$$

Применяя преобразование Каца - Конторовича [6] $k_1 \to \frac{k^2}{k_1}$, $k_2 \to \frac{k_2 k}{k_1}$, к интегралам (8), (9), приводим к виду

$$c = \int d^3k_1 W(k; k_1, k_2)\delta(\Omega - \omega_1 - \omega_2)k^{+8+2s}k_1^{-8-2s}k_1^s k_2^s, \tag{10}$$

$$d = \int d^3k_1 W(k; k_1, k_2)\delta(\Omega - \omega_1 - \omega_2)k^{+8+2s}k_1^{-8-2s}(k_1^s + k_2^s), \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11) с (6) и (7), находим четыре корня уравнения (5) $s =$ - 9/2, -4, -1,0. В самом деле, при $s = -9/2$ находим $c = s_1/2s_2 a$; $b = s_1/2s_2 d$. При $s = -4$ имеем $a = c$, $b = d$; при $s = -1$ находим $s_1 a = s_2 b$ и $s_1 c = s_2 d$; наконец при $s = 0$ $2d = b$, $2c = d$. Хотя возникающие при этом интегралы иногда расходятся, но ввиду буквального или почти буквального совпадения подынтегральных выражений интегралы столкновений (1), (2) сходятся при подходящем выборе констант a и b. Новые решения, по-видимому, связаны с дополнительным интегралом кинетических уравнений, каковым является

$$\int (n(k) - 2n(\vec{k}))\, d^3k.$$

Аналогичное рассмотрение годится и для случая, когда единственным процессом является черенковское излучение. Но если оба процесса возможны одновременно, остается лишь колмогоровское решение $s = -9/2$ и распределение Релея - Джинса $s = -1$. Неколмогоровские решения в анизотропной замагниченно плазме были обнаружены ранее Балком и Назаренко 6.

Отметим, что плотность энергии $\epsilon_k \sim n_k k^3 \sim k^{3+s}$. В решение $s = -9/2$ энергия сосредоточена в области малых k, но в решении $s = -4$ энергия логарифмически расходятся и в области малых, и в области больших k. Поток энергии нелокален по масштабам. При $s = 0, -1$, энергия сосредоточена в коротковолновой области. Поток энергии является локальным в пространстве волновых векторов (масштабов) только для решения с $s = -9/2$. Интересно, что в случае $s = 0$ энергия течет от малых масштабов к большим.

Автор благодарен Назаренко С.В. за плодотворное обсуждение.

Литература

1. Захаров В.Е., Сагдеев Р.З. ДАН СССР, 1970, 192, 297.
2. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР 1973, 208, 794.
3. Ландау Л.Д., Халатников И.М. ЖЭТФ, 1949, 19, 637; Халатников И.М. ЖЭТФ, 1950, 20, 243.
4. Покровский В.Л., Халатников И.М. ЖЭТФ, 1976, 71, 1974.
5. Немировский С.Л. ЖЭТФ, 1976, 90, 2023; УФН, 1990, 160, 51.
6. Кац А.В., Конторович В.М. ЖЭТФ, 1973, 64, 153.
7. Балк А.М., Назаренко С.В. ЖЭТФ, 1990, 97, 1827.