

Предельно короткие векторные солитоны в условиях конической рефракции

С. В. Сазонов¹⁾, Н. В. Устинов*

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

*Калининградский филиал Московского государственного университета путей сообщения, 236039 Калининград, Россия

Поступила в редакцию 26 марта 2014 г.

Рассмотрена задача о распространении предельно коротких электромагнитных импульсов в двуосном кристалле в условиях конической рефракции. Выведена система волновых уравнений, учитывающая дисперсионный вклад ионов кристаллической решетки в поляризационный отклик среды и нелинейность электронного поляризационного отклика. Показано, что эта система при определенных условиях сводится к уравнению, интегрируемому методом обратной задачи рассеяния. Найдена соответствующая пара Лакса. Проведен физический анализ стационарного импульсного решения системы волновых уравнений.

DOI: 10.7868/S0370274X14090021

За последние десятилетия оптика предельно коротких импульсов (ПКИ) окончательно выделилась в отдельную ветвь физической науки [1]. К ПКИ относят электромагнитные сигналы, содержащие порядка одного периода колебаний поля. В англоязычной литературе за ними закрепилось название *few cycle pulses* [2]. Абсолютная длительность ПКИ лежит в интервале от пико- до фемтосекунд, захватывая к настоящему времени уже и аттосекундный диапазон [3].

При теоретическом описании взаимодействия ПКИ с веществом неприменимо хорошо зарекомендовавшее себя в оптике квазимонохроматических импульсов приближение медленно меняющихся огибающих [4]. Здесь приходится решать уравнения не для огибающих электрического поля и вызванных ими поляризационных откликов среды, а непосредственно для самих этих величин. Из-за своей малой длительности ПКИ являются широкополосными сигналами, т.е. их спектральная ширина сравнима по величине с центральной частотой спектра. Поэтому взаимодействуя с атомами или молекулами среды, они способны эффективно возбуждать в ней сразу большое число степеней свободы. Вследствие этого материальные уравнения в своем исходном квантово-механическом виде оказываются сложными. Их приходится упрощать, прибегая к разным дополнительным предположениям и физической интуиции [5].

Общепризнанным является тот факт, что нелинейная оптика зарекомендовала себя хорошим “по-

ставщиком” уравнений и систем, заслуживающих особого внимания с точки зрения исследования их математической структуры. Очень большой интерес при этом вызывают вопросы интегрируемости в рамках метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [6, 7] и, как следствие, порождения солитонных решений таких уравнений и систем. Это касается как квази-монохроматических импульсов огибающей [4], так и ПКИ [2], в отношении которых соответствующие исследования приобрели сегодня особую актуальность. В числе прочего это связано с отмеченным выше и постоянно имеющим место стремлением к созданию в лабораторных условиях импульсов все более коротких длительностей. Проявление солитонных свойств способствует использованию электромагнитных импульсов в системах волоконно-оптической связи [8]. Укорочение же их длительности способствует увеличению пропускной способности таких информационных систем.

Сказанное выше полностью относится к нелинейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z \partial \tau} + aE + b \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E^3) = 0, \quad (1)$$

которое описывает распространение ПКИ в оптически изотропном диэлектрике [9–11]. Здесь E – электрическое поле импульса, a и b – положительные постоянные, определяемые свойствами среды. Это уравнение является частным случаем уравнения, полученного в [5], когда не учитывается инерционность электронного поляризационного отклика среды.

Уравнение (1) интегрируемо с помощью МОЗР [12–14] и связано посредством замены переменных

¹⁾e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

с уравнением синус-Гордона, одним из наиболее известных в нелинейной оптике интегрируемых уравнений [6]. Это означает, что оно допускает представление в виде условия совместности переопределенной системы линейных уравнений (пары Лакса) и имеет многосолитонные решения (так называемые пиконы или многопетлевые солитоны).

Настоящая работа посвящена выводу обобщения уравнения (1) на случай анизотропной среды. Здесь будет рассмотрена задача о распространении ПККИ в оптически двуосном кристалле в условиях эффекта конической рефракции. Предложенное нами обобщение включает два аспекта. Во-первых, электрическое поле импульса в анизотропном кристалле, в отличие от изотропной среды, имеет векторный характер. Во-вторых, в изотропной среде низшая степень нелинейности является кубической в силу симметрии по знаку поля, в то время как в анизотропном кристалле она будет квадратичной. Однако несмотря на столь существенные отличия, полученные в такой задаче уравнения тоже принадлежат к классу уравнений, интегрируемых в рамках МОЗР.

Прежде чем приступить к выводу основных уравнений, поясним физические условия, при которых справедливо уравнение (1). Прежде всего они состоят в том, что поляризационный отклик среды образован электронными переходами и оптическими ветвями колебаний ионов. При этом нелинейность создается главным образом электронной частью $\mathbf{P}^{(e)}$ данного отклика. Связано это с тем, что масса электронных оболочек на три порядка меньше массы ионов. В результате они обладают значительно большей нелинейной восприимчивостью, нежели ионы.

С другой стороны, доминирующий вклад в дисперсию должны вносить колебания ионов. Это допущение имеет место, когда характерные частоты ω спектра ПККИ лежат ниже критической частоты ω_c , разделяющей области положительной ($\omega > \omega_c$) и отрицательной ($\omega < \omega_c$) дисперсии групповой скорости [5]. Действительно, по порядку величины $\omega_c \sim \sqrt{\omega_0 \omega_p}$ [5, 15] и $\omega_i \sim \omega_p$, где ω_0 – характерная частота электронных переходов, ω_p – ионная плазменная частота, ω_i – частота колебаний ионов. Поэтому при $\omega < \omega_c$ спектр ПККИ будет лежать ближе к частоте ионных колебаний ω_i , чем к электронной частоте ω_0 . Следовательно, дисперсия будет обусловлена в основном ионным поляризационным откликом $\mathbf{P}^{(i)}$.

Наконец, обсудим характерную длительность τ_p ПККИ. Взяв типичные значения $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $\omega_i \sim \omega_p \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$ [5, 15], найдем $\omega_c \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Тогда неравенству $\omega < \omega_c$ можно удовлетворить, положив $\omega \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, спектр импульса при-

надлежит ближнему инфракрасному диапазону. Так как ПККИ содержит порядка одного колебания поля, имеем $\tau_p \sim 10^{-14} \text{ с}$. При этом, как легко убедиться, выполняются следующие неравенства [5, 15–17]:

$$\omega_0 \tau_p \gg 1, \quad \omega_i \tau_p \ll 1. \quad (2)$$

Теперь перейдем к выводу волновых уравнений, описывающих распространение ПККИ в двуосном кристалле. Обозначим его диэлектрические оси как X , Y и Z . Без потери общности будем считать, что соответствующие главные показатели преломления n_X , n_Y и n_Z подчиняются условиям $n_X < n_Y < n_Z$. В этом случае оптические оси первого и второго рода лежат в плоскости (XZ) [18, 19].

Пусть волновые нормали компонент электрического поля импульса параллельны оси z , являющейся одной из двух оптических осей второго рода и образующей с осью Z угол φ , такой, что $\tan \varphi = \sqrt{(n_Y^2/n_X^2 - 1)/(1 - n_Y^2/n_Z^2)}$ [18]. В этом случае фазовая скорость компоненты, поляризованной вдоль диэлектрической оси Y , равна фазовой скорости компоненты, поляризованной вдоль оси x , которая образует прямой угол с осью z (см. рис. 1). Обо-

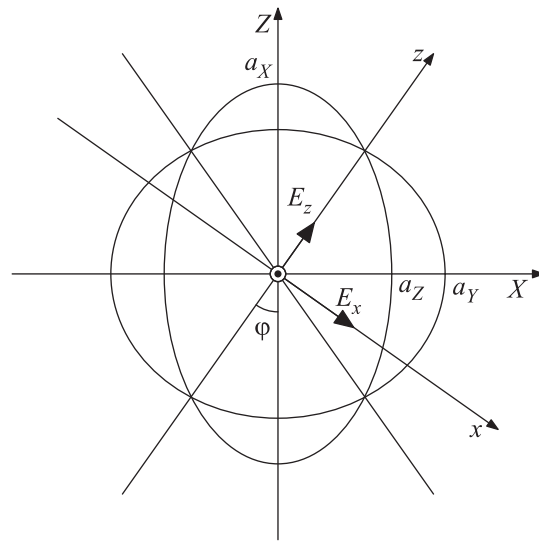


Рис. 1. Сечение поверхности волновых нормалей плоскостью (XZ) . Распространение происходит вдоль оси z , одной из оптических осей второго рода; $a_X = c/n_X$, $a_Y = c/n_Y$, $a_Z = c/n_Z$

значим эти компоненты электрического поля как E_y и E_x , а его продольную составляющую как E_z . Тогда для поперечных компонент справедливы волновые уравнения

$$\frac{\partial^2 E_{y,x}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{y,x}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P_{y,x}^{(e)} + P_{y,x}^{(i)}), \quad (3)$$

где c – скорость света в вакууме. Выражение же для продольной составляющей E_z следует из условия

равенства нулю продольной компоненты электрической индукции [18]:

$$E_z = -4\pi \left(P_z^{(e)} + P_z^{(i)} \right). \quad (4)$$

Здесь $P_y^{(e)}$, $P_x^{(e)}$ и $P_z^{(e)}$ – соответствующие декартовы компоненты электронного поляризованного отклика, а $P_y^{(i)}$, $P_x^{(i)}$ и $P_z^{(i)}$ – ионные поляризационные компоненты.

Первое неравенство в (2) позволяет пренебречь инерционностью электронного отклика. Так как обычно продольная компонента E_z много меньше поперечных компонент E_y и E_x , будем учитывать ее только в линейном приближении. Приняв также во внимание симметрию при отражении в плоскости (xz) , соответствующую инвариантности относительно преобразования $E_y \rightarrow -E_y$, запишем плотность энергии взаимодействия поля с электронными переходами в виде

$$H = -\frac{\chi_{yy}E_y^2 + \chi_{xx}E_x^2 + \chi_{zz}E_z^2}{2} - \chi_{xz}E_xE_z - \frac{\chi_{xxx}E_x^3}{3} - \chi_{xyy}E_y^2E_x, \quad (5)$$

где χ_{yy} , χ_{xx} , χ_{zz} , χ_{xz} и χ_{xxx} , χ_{xyy} – компоненты тензоров линейной и нелинейной безынерционных восприимчивостей соответственно. Тогда из соотношения $\mathbf{P}^{(e)} = -\partial H / \partial \mathbf{E}$ [20] находим выражения для компонент электронной поляризации:

$$P_x^{(e)} = \chi_{xx}E_x + \chi_{xz}E_z + \chi_{xxx}^{(2)}E_x^2 + \chi_{xyy}^{(2)}E_y^2, \quad (6)$$

$$P_y^{(e)} = \chi_{yy}E_y + 2\chi_{xyy}^{(2)}E_xE_y, \quad (7)$$

$$P_z^{(e)} = \chi_{zz}E_z + \chi_{xz}E_x. \quad (8)$$

Из-за массивности ионов пренебрежем нелинейностью их поляризованного отклика на электрическое поле импульса. По этой же причине кристаллическая анизотропия практически не влияет на их колебания относительно положения равновесия в узлах решетки. Поэтому запишем

$$\frac{\partial^2 P_{x,y,z}^{(i)}}{\partial t^2} + \omega_i^2 P_{x,y,z}^{(i)} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{x,y,z}.$$

В силу второго неравенства в (2) пренебрежем вторыми слагаемыми в левых частях этих уравнений:

$$\frac{\partial^2 P_{x,y,z}^{(i)}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E_{x,y,z}. \quad (9)$$

Таким образом, ионный отклик является слабо дисперсионным и $P_z^{(i)} \sim (\omega_p \tau_p)^2 E_z / 4\pi \sim (\omega_i \tau_p)^2 E_z / 4\pi$. Учитывая, что $\chi_{zz} \sim 0.1$, а также

принимая во внимание второе неравенство в (2), имеем $P_z^{(i)} \ll P_z^{(e)}$. Это позволяет пренебречь вторым слагаемым в скобках правой части уравнения (4). Тогда с использованием (8) и (6) находим

$$E_z = -\frac{4\pi\chi_{xz}}{1 + 4\pi\chi_{xz}} E_x, \quad (10)$$

$$P_x^{(e)} = \frac{\chi_{xx} + 4\pi\|\chi\|}{1 + 4\pi\chi_{xz}} E_x + \chi_{xxx}^{(2)} E_x^2 + \chi_{xyy}^{(2)} E_y^2, \quad (11)$$

где $\|\chi\| = \chi_{xx}\chi_{zz} - \chi_{xz}^2$.

Подставим (7), (11) и (9) в волновые уравнения (3). В случае конической рефракции, когда импульсы распространяются вдоль оптических осей второго рода, скорости v_y и v_x компонент E_y и E_x , которые в нашем случае определяются выражениями

$$\frac{1}{v_y} = \frac{1}{a_Y} = \frac{n_Y}{c}, \quad \frac{1}{v_x} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + 4\pi \frac{\chi_{xx} + 4\pi\|\chi\|}{1 + 4\pi\chi_{zz}}},$$

где $n_Y = \sqrt{1 + 4\pi\chi_{yy}}$, совпадают. Тогда после использования приближения однонаправленного распространения [6] получим

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial \tau} + \sigma E_y + 2\alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_x E_y) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial \tau} + \sigma E_x + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (\alpha E_y^2 + \beta E_x^2) = 0. \quad (13)$$

Здесь “локальное” время $\tau = t - n_Y z / c$, $\sigma = \omega_p^2 / 2cn_Y$, $\alpha = 2\pi\chi_{xyy}^{(2)} / cn_Y$, $\beta = 2\pi\chi_{xxx}^{(2)} / cn_Y$. Система (12), (13) описывает нелинейную динамику двухкомпонентных ПКИ в анизотропной среде.

Из уравнений (12), (13) видно, что если на входе в кристалл компонента E_y отсутствует, то она не будет порождена и в дальнейшем. Положив $E_y = 0$, будем иметь скалярный случай:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial \tau} + \sigma E_x + \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_x^2) = 0. \quad (14)$$

Отличие этого уравнения от уравнения (1) состоит в степени нелинейности третьего слагаемого в левой части. Анизотропной среде соответствует не кубическая, а квадратичная нелинейность из-за отсутствия симметрии по знаку поля.

Волновые уравнения вида (14) возникают также в векторном случае. При выполнении условия $\chi_{xxx}^{(2)} = \chi_{xyy}^{(2)}$ (или $\beta = \alpha$) можно ввести новые переменные, $E_{\pm} = E_x \pm E_y$. Тогда система (12), (13) распадется на два волновых уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_{\pm}}{\partial z \partial \tau} + \sigma E_{\pm} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_{\pm}^2) = 0.$$

В работе [21] было показано, что уравнение, отличающееся от (14) только обозначениями, описывает распространение поверхностных волн малой амплитуды на глубокой воде. Оно связано с помощью замены переменных с уравнением Цицейки [22], иногда называемым уравнением Додда–Буллофа. Последнее уравнение является интегрируемым в рамках МОЗР [23–25]. Это означает, что уравнение (14) тоже интегрируемо.

Хотя данный вопрос оставался до сих пор открытым, уравнение (14) должно иметь пару Лакса матричной размерности 3×3 . Действительно, определим операторы $\hat{L}(\lambda)$ и $\hat{A}(\lambda)$ следующим образом:

$$\hat{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} -2\beta \frac{\partial E_x}{\partial \tau} & \frac{\sigma \lambda}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma \lambda}{3} \\ \lambda & 0 & 2\beta \frac{\partial E_x}{\partial \tau} \end{pmatrix} - 2\beta E_x \hat{A}(\lambda), \quad (15)$$

$$\hat{A}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\beta \frac{\partial^2 E_x}{\partial \tau^2} + \frac{\sigma}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где λ – спектральный параметр. Тогда условием совместности пары Лакса

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \hat{L}(\lambda) \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \hat{A}(\lambda) \psi, \end{cases} \quad (17)$$

где $\psi = \psi(z, \tau, \lambda)$ – ее матричное решение, является уравнение

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial \tau} + \sigma E_x + \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (E_x^2) = f(z).$$

Здесь в правой части стоит некоторая функция от z . Приравняв ее к нулю, приходим к уравнению (14).

Вернемся к системе (12), (13). Найдем ее решение, которое описывает стационарное распространение импульса.

Пусть $\beta < 2\alpha$. Тогда можно положить $E_x = E$, $E_y = \pm \sqrt{2 - \beta/\alpha} E$, где функция $E = E(\zeta)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial E}{\partial \zeta} = \pm \frac{E \sqrt{v\sigma\Theta}}{4v\alpha E - 1}, \quad (18)$$

в котором $\Theta = 1 - 8v\alpha E/3$, $\zeta = \tau - z/v$, v – вещественный параметр. Его интегрирование дает равенство

$$2 \operatorname{arctanh} \sqrt{\Theta} - 3\sqrt{\Theta} = \pm \sqrt{v\sigma}(\zeta - \zeta_0), \quad (19)$$

неявно задающее искомое стационарное решение. Здесь ζ_0 – вещественная постоянная, определяющая начальное положение ПКИ.

Так как в импульсном режиме $\Theta \geq 0$, из (19) следует, что $|E| \leq |E_m|$, где $E_m = 3/(8v\alpha)$, и знак v должен совпадать со знаком коэффициента σ . Скорость v_p ПКИ в лабораторной системе координат равна

$$v_p = \left(\frac{n_Y}{c} + \frac{1}{v} \right)^{-1}$$

и всегда меньше линейной скорости c/n_Y , поскольку $\sigma > 0$.

Из уравнения (18) видно, что первая производная E по ζ становится неограниченной при $E = E_c$, где $E_c = 1/(4v\alpha)$. Так как $|E_c| < |E_m|$, решение, задаваемое равенством (19), неоднозначно и имеет форму петли (см. рис. 2).

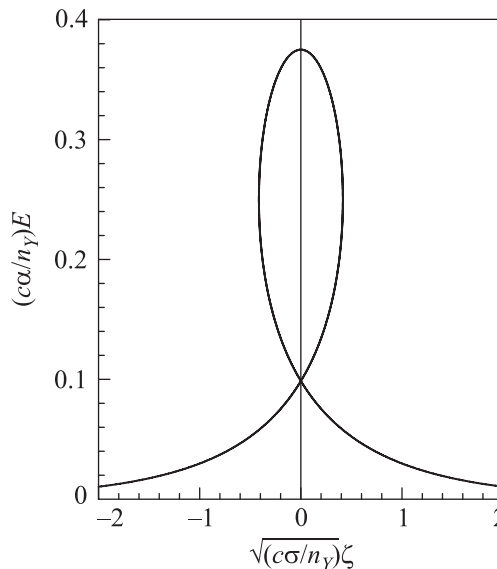


Рис. 2. График стационарного решения для $v = c/n_Y$, $\zeta_0 = 0$

Стационарное решение уравнения (1) тоже имеет форму петли [14, 26]. Из-за симметрии по знаку поля при этом существуют два его значения, противоположные по знаку, в которых производная становится неограниченной. Понятно, что в таких областях, строго говоря, необходим учет дисперсии более высоких порядков, выражаемой, например, временной нелокальностью электронного отклика [5, 15]. Однако в таком случае анализ резко усложняется и вряд ли можно вести речь об интегрируемости, порождающей солитоны в строгом смысле этого слова.

Длительность импульса τ_p удобно определить как интервал между значениями ζ , в которых первая производная неограничена. Подставив $E = E_c$ в (19) при разных знаках в правой части, получим

$$\tau_p = \frac{2}{\sqrt{v\sigma}} \left(\sqrt{3} - 2 \operatorname{arctanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{0.830}{\sqrt{v\sigma}}.$$

Заметим, что $E_c \sim E_m \sim \tau_p^2$. Таким образом, амплитуды обеих компонент поля ПКИ пропорциональны квадрату их длительности, т.е. растут с увеличением длительности. Скорость v_p при этом уменьшается. Это принципиально отличает рассматриваемый солитон от солитонов большинства других задач, у которых увеличение длительности сопровождается уменьшением как их скорости, так и амплитуды.

Наличие продольной компоненты E_z (см. (10)) у электрического поля ПКИ приводит к несонаправленности векторов волновой (\mathbf{n}) и лучевой (\mathbf{s}) нормалей, что имеет место в условиях конической рефракции [18]. Угол γ между этими векторами определяется равенством $\tan \gamma = |E_z| / \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$. При этом вектор \mathbf{n} параллелен оси z , а \mathbf{s} перпендикулярен вектору \mathbf{E} электрического поля импульса. В случае рассмотренного выше стационарного ПКИ имеем

$$\tan \gamma = \frac{4\pi\chi_{xz}}{(1 + 4\pi\chi_{xz})\sqrt{3 - \chi_{xxx}^{(2)}/\chi_{xyy}^{(2)}}}.$$

Значит, γ не зависит от амплитуд или длительностей составляющих импульса, но зависит от компонент тензора нелинейной восприимчивости второго порядка. В силу того что поперечная составляющая импульса из-за синхронной динамики ее компонент E_x и E_y обладает в случае стационарного решения линейной поляризацией, конус с образующей, описываемой вращением вектора \mathbf{s} вокруг \mathbf{n} , вырождается в плоский треугольник с углом γ между указанными векторами. Таким образом, в рассмотренном случае коническая рефракция носит вырожденный характер. Очевидно, что это не будет иметь места для более сложных решений системы (12), (13), например для многопетлевых решений (пиконов) ее интегрируемого случая с $\beta = \alpha$, который мы предполагаем рассмотреть отдельно, отталкиваясь от пары Лакса (15)–(17).

Таким образом, в ходе проведенного в настоящей работе исследования получена система нелинейных волновых уравнений, описывающая распространение ПКИ в анизотропной среде, и рассмотрено ее стационарное решение. Частный случай полученной системы, соответствующий $\beta = \alpha$, является интегрируемым в рамках МОЗР. Найдена пара Лакса (15)–(17), соответствующая данному частному случаю, матричной размерности 3×3 . Это позволит в дальнейшем для построения многопетлевых и других решений использовать и развивать алгебраические методы теории солитонов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 13-02-00199а).

1. А. И. Маймистов, Квант. электрон. **30**, 287 (2000).
2. H. Leblond and D. Mihalache, Phys. Rep. **523**, 61 (2013).
3. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
4. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Основы оптики фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, М. (1978).
5. С. А. Козлов, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **111**, 404 (1997).
6. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М. (1988) [R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, Inc., London–Tokyo (1982)].
7. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М. (1980).
8. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агарвал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов*, Физматлит, М. (2005).
9. Д. В. Карташов, А. В. Ким, С. А. Скобелев, Письма в ЖЭТФ **78**, 722 (2003).
10. T. Schäfer and C. E. Wayne, Physica D **196**, 90 (2004).
11. Y. Chung, C. K. R. T. Jones, T. Schäfer, and C. E. Wayne, Nonlinearity **18**, 1351 (2005).
12. M. L. Rabelo, Stud. Appl. Math. **81**, 221 (1989).
13. R. Beals, M. Rabelo, and K. Tenenblat, Stud. Appl. Math. **81**, 125 (1989).
14. A. Sakovich and S. Sakovich, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 239 (2005); J. Phys. A.: Math. Gen. **39**, L361 (2006).
15. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, ЖЭТФ **123**, 1160 (2003).
16. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
17. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Уцаповский, ЖЭТФ **100**, 762 (1991).
18. Д. В. Сивухин, *Общий курс физики, т. 4. Оптика*, Наука, М. (1980).
19. М. В. Волькенштейн, *Молекулярная оптика*, Гостехиздат, Л. (1951).
20. Д. Н. Клышко, *Физические основы квантовой электроники*, Наука, М. (1986).
21. R. A. Kraenkel, H. Leblond, and M. A. Manna, J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 025208 (17pp) (2014).
22. G. Tzitzéca and C. R. Acad. Sci. Paris **144**, 1257 (1907).
23. R. K. Dodd and R. K. Bullough, Proc. Roy. Soc. London A **351**, 499 (1976).
24. А. В. Жиббер, А. Б. Шабат, ДАН СССР **247**, 1103 (1979).
25. А. В. Михайлов, Письма в ЖЭТФ **30**, 443 (1979).
26. Y. Matsuno, J. Math. Phys. **52**, 123702 (2011).