Письма в ЖЭТФ, том 99, вып. 9, с. 623 – 635 © 2014 г. 10 мая

ПО ИТОГАМ ПРОЕКТОВ
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Проект РФФИ # 11-02-00060а

Отклик бозе-эйнштейновского конденсата дипольных экситонов на статические и динамические возмущения

Э. Г. Батыев[+], *В. М. Ковалев*[+×] *А. В. Чаплик*[+*1)]

[+]*Институт физики полупроводников им. Ржанова СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия*
[*]*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[×]*Новосибирский государственный технический университет,*

630095 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 7 апреля 2014 г.

Предлагаемый обзор посвящен взаимодействию бозе-эйнштейновского конденсата двумерных пространственно-непрямых экситонов со статическими полями примесей, поверхностными упругими волнами и элементарными возбуждениями вырожденного электронного газа. Рассматриваются эффекты экранирования заряженных примесей и поглощение поверхностной упругой волны Блюштейна–Гулеява экситонным конденсатом. Изучаются осцилляции Фриделя экситонной плотности в гибридной электрон-экситонной системе, состоящей из пространственно-разнесенных слоев конденсированного экситонного и вырожденного электронного газов. Рассчитаны времена жизни квазичастичных возбуждений (электронов, плазмонов, боголонов) в гибридной системе. Найдены вклады в изучаемые эффекты как конденсатных, так и надконденсатных частиц. Анализируются свойства экситонного диэлектрика в рамках модели Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) со встроенным бездиссипативным током.

DOI: 10.7868/S0370274X14090112

1. Введение. Бозе-эйнштейновская конденсация экситонов – широко изучаемое в настоящее время явление. В нейтральной электрон-дырочной системе имеется возможность широко варьировать концентрацию электронов и дырок, что приводит к различным механизмам их спаривания. При высоких плотностях ($na^3 \gg 1$, где n – плотность экситонов, a – боровский радиус) электрон-дырочной системы экситоны представляют собой сильно перекрывающиеся коррелированные электрон-дырочные пары, механизм спаривания в которых подобен куперовскому спариванию в сверхпроводниках с тем отличием, что взаимодействие электрона и дырки в паре обусловлено кулоновским притяжением, а не фононным механизмом. Впервые такой тип спаривания был рассмотрен в работе Келдыша и Копаева [1]. Было показано, что теория Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) удовлетворительно описывает это состояние. Три года спустя Келдыш и Козлов [2] рассмотрели противоположный предел низких плотностей ($na^3 \ll 1$). Они продемонстрировали, что такая система обладает боголюбовским типом спектра элементарных возбуждений аналогично системе слабо взаимодействующих бозе-частиц. Таким образом, в области малых плотностей электрон-дырочная система представляет собой газ слабо взаимодействующих водородоподобных экситонов Ванье–Мотта, теория которых может строиться с применением техники, разработанной Беляевым [3, 4]. Отметим, что оба типа спаривания теоретически рассматривались для трехмерных систем и экспериментально наблюдались в трехмерных же материалах [5]. С начала 90-х годов интерес переключился на изучение экситонных конденсатов в системах пониженной размерности [6–10]. Было продемонстрировано, что понижение размерности дает ряд преимуществ. В частности, пространственное разделение электронов и дырок в двойных квантовых ямах (ДКЯ) приводит к увеличению реком-

[1)]e-mail: chaplik@isp.nsc.ru

бинационного времени жизни на 3–6 порядков и к уменьшению времени, требующегося на охлаждение экситонного газа. Кроме того, диполь-дипольное отталкивание экситонов в ДКЯ препятствует образованию связанных многоэкситонных комплексов. Для механизма спаривания типа БКШ пространственное разделение сильно подавляет межзонные переходы. Это приводит к отсутствию эффекта фиксации фазы и открывает возможность для наблюдения сверхтекучего движения экситонов [11]. Поэтому в настоящее время экспериментальные исследования бозе-эйнштейновского конденсата (БЭК) экситонов проводятся на системах из двойных или широких одиночных квантовых ям в электрическом поле, ортогональном слоям.

Настоящий обзор посвящен в основном режиму малой плотности. Лишь в заключительном пункте мы обсудим некоторые эффекты в конденсате, описываемом моделью БКШ. В первом пункте мы рассмотрим эффект экранирования примесного потенциала БЭК непрямых дипольных экситонов. С одной стороны, данная задача представляет общефизический интерес. Каков асимптотический вид экранированного потенциала заряженной примеси, если экранирование осуществляется нейтральными, но имеющими дипольный момент частицами, находящимися в режиме БЭК? С другой стороны, при объяснении некоторых экспериментально наблюдаемых эффектов [12] при низких температурах возникает вопрос об экранировании имеющегося в системе случайного потенциала подвижными экситонами.

Во втором пункте мы проанализируем взаимодействие поверхностных звуковых волн с БЭК дипольных экситонов. Акустические методы исследования хорошо зарекомендовали себя при изучении двумерной электронной плазмы (см. обзор ранних теоретических работ [13, 14]). Мы покажем, что необычное поведение коэффициента поглощения ПАВ в зависимости от экситонной плотности (наличие порога поглощения), обусловлено именно наличием конденсата, и может служить альтернативным (к оптическим) методом обнаружения перехода экситонного газа в режим БЭК. В настоящее время нам не известны работы по изучению поглощения поверхностного звука в экситонных конденсатах. Если наличие пороговых особенностей в поглощении звука в режиме большой плотности (в БКШ-режиме) можно предположить, проводя аналогию с поглощением звука в сверхпроводниках (обусловленную наличием щели в спектре одночастичных возбуждений), то наличие пороговых эффектов в режиме малой плотности, описываемой моделью Боголюбова, заранее не очевидно. Отметим, что воздействие ПАВ на конденсаты экситонных поляритонов изучается экспериментально в [15]. Однако там авторы анализируют лишь влияние поля ПАВ на когерентность в системе, исследуя корреляционную функцию первого порядка.

Третий пункт посвящен изучению гибридной системы, состоящей из пространственно-разделенных слоев двумерного электронного газа и газа дипольных экситонов. Такая система представляет собой полупроводниковый аналог раствора ^{3}He в сверхтекучем ^{4}He [16, 17]. Главным вопросом здесь является взаимное влияние электронов и БЭК-экситонов друг на друга. Мы покажем, что наличие электронного слоя приводит к появлению электростатически наведенных фриделевских осцилляций экситонной плотности. Электрон-экситонное взаимодействие приводит к возникновению новых механизмов затухания элементарных возбуждений в обеих подсистемах: к дополнительному (помимо электрон-электронного) затуханию электронов, наличию ненулевого затухания плазмонов (за счет боголюбовских возбуждений экситонного конденсата) в области, где отсутствует затухание Ландау, к новому каналу затухания боголюбовских возбуждений.

В заключительном пункте изучаются свойства экситонного диэлектрика со встроенным током. В рамках модели БКШ анализируется эволюция системы со временем, если в начальный момент имеется встроенный ток, а также реакция системы на внезапные возмущения.

2. Общая теория отклика экситонного конденсата на внешнее возмущение. К настоящему времени как коллективные моды БЭК, так и их затухание хорошо изучены [18–21]. В зависимости от значения $\omega\tau$, где τ – характерное время столкновений, можно различать два режима. В бесстолкновительном пределе ($\omega\tau \gg 1$) взаимодействующий бозе-газ описывается приближением Боголюбова–Хартри–Фока (БХФ) [20, 21], а в противоположном пределе ($\omega\tau \ll 1$) – моделью двухжидкостной гидродинамики. Мы будем рассматривать первый случай, $\omega\tau \gg 1$.

Для описания динамики экситонного газа в ДКЯ мы принимаем следующую модель (см. рис. 1). Электрон, находящийся в одной КЯ, и дырка в другой образуют экситон, дипольный момент которого направлен строго перпендикулярно квантовым ямам. Электрон и дырка находятся на нижних уровнях энергии поперечного квантования, каждый в своей КЯ. Движение экситона будет характеризоваться лишь одним параметром – координатой центра масс. Иными словами, мы пренебрегаем

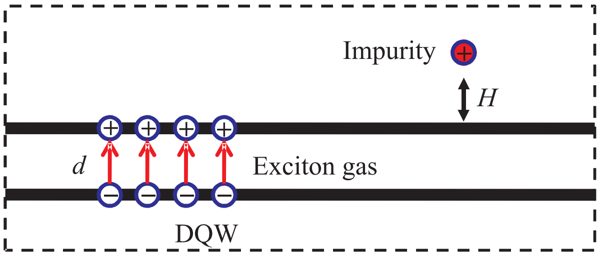

Рис. 1. Экситонный газ в ДКЯ

всеми внутренними движениями частиц. Конечно, в действительности имеются внутренние степени свободы экситона, обусловливающие как движение электрона и дырки в плоскости слоев, так и поперечное их движение внутри КЯ. Однако учет этих движений не приводит к качественному изменению обсуждаемых ниже эффектов и не меняет главной качественной особенности рассматриваемой системы – наличия ненулевого дипольного момента, перпендикулярного КЯ. Такая модель, очевидно, ограничена требованием, чтобы внешние переменные поля, действующие на экситонный газ, не возбуждали внутренних степеней свободы экситона. В рамках данного приближения модель "жестких" диполей адекватно описывает физику происходящих процессов.

Гамильтониан неидеального бозе-газа в потенциальном поле $U(\mathbf{r},t)$ имеет вид

$$H = \int d\mathbf{r}\Psi^{+}(\mathbf{r},t)\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \mu + U(\mathbf{r},t)\right]\Psi(\mathbf{r},t) + \\ + g\int d\mathbf{r}\left[\Psi^{+}(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r},t)\right]^2. \qquad (1)$$

В него входят две характерные постоянные: масса бозона M и постоянная взаимодействия бозонов g. Здесь принята модель контактного взаимодействия бозонов. В нашем случае M – масса экситона, складывающаяся из масс электрона и дырки. Величина g может быть найдена как предельное значение фурье-образа $g(k)$ потенциала экситон-экситонного взаимодействия, моделируемого потенциалом взаимодействия двух диполей:

$$g(\mathbf{r}'-\mathbf{r}) = \frac{2e^2}{\varepsilon|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} - \frac{2e^2}{\varepsilon\sqrt{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|^2+d^2}}, \qquad (2)$$
$$g(k) = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon k}\left(1-e^{-kd}\right),$$

при $kd \ll 1$, т.е. $g \approx 4\pi e^2 d/\varepsilon$. Бозе-поле $\Psi(\mathbf{r},t)$ в уравнении (1) может быть представлено в виде суммы конденсатного ($\varphi(\mathbf{r},t)$) и надконденсатного ($\psi(\mathbf{r},t)$) вкладов: $\Psi(\mathbf{r},t) = \varphi(\mathbf{r},t) + \psi(\mathbf{r},t)$. Для определения уравнений движения каждого из вкладов мы воспользовались схемой теории среднего поля БХФ, в деталях описанной в работах [18, 19]. Опуская громоздкие выкладки (см. нашу работу [22]), получаем

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - H_0 - U & -gm_x \\ -gm_x^* & -i\partial_t - H_0 - U \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_x \\ \varphi_x^*\end{pmatrix} = 0, \qquad (3)$$

где $H_0 = p^2/2M - \mu + g[|\varphi_x|^2 + 2n_x]$, $n_x = \langle\psi^*(x)\psi(x)\rangle$ и $m_x = \langle\psi(x)\psi(x)\rangle$ – нормальная и аномальная плотности надконденсатных частиц. Здесь использовано краткое обозначение $x = (\mathbf{r},t)$. Динамика надконденсатных частиц описывается матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} i\partial_t - H_1 - U & -g[\varphi_x^2 + m_x] \\ -g[\varphi_x^{*2} + m_x^*] & -i\partial_t - H_1 - U \end{pmatrix}\hat{G} = \hat{1}, \qquad (4)$$

в котором $H_1 = p^2/2M - \mu + 2g[|\varphi_x|^2 + n_x]$, а плотности n_x и m_x выражаются через функции Грина $\hat{G}$ посредством равенства

$$\begin{pmatrix} n_x & m_x \\ m_x^* & n_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iG(x,x) & iF(x,x) \\ iF^{+}(x,x) & i\tilde{G}(x,x)\end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Для вычисления отклика БЭК на внешнее поле $U(x) = U_{k,\omega}e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}$ будем считать его слабым. Слабое внешнее поле приводит к малым отклонениям поля конденсата φ_x и надконденсатных плотностей от их стационарных равновесных значений:

$$\varphi_x = \sqrt{n_c} + \delta\varphi_x, \quad |\varphi_x|^2 = n_c + \delta n_c; \qquad (6)$$
$$n_x = n_0 + \delta n_x, \quad m_x = m_0 + \delta m_x,$$

где $\delta n_c = \sqrt{n_c}(\delta\varphi_x^* + \delta\varphi_x)$, n_c – число частиц в конденсате. Линеаризуя уравнения (3), (4) по $\delta n_c, \delta n_x, \delta m_x$, для отклика полной плотности получаем $\delta N = \delta n_c + + \delta n$, где

$$\delta n_c(k,\omega) = P^c_{k\omega}U_{k\omega}, \quad P^c_{k\omega} = n_c\frac{k^2/M}{(\omega+i\delta)^2 - \epsilon_k^2}, \qquad (7)$$
$$\epsilon_k^2 = \frac{k^2}{2M}\left(\frac{k^2}{2M} + 2gn_c\right)$$

и

$$\delta n(k,\omega) = \frac{P^n_{k\omega}[1 + gP^c_{k\omega}]}{1 - 3gP^n_{k\omega}}U_{k\omega}, \qquad (8)$$
$$P^n_{k,i\omega_n} = -\frac{g^2 n_c^2}{2}\times$$
$$\times\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\frac{A(N_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - N_{\mathbf{p}}) + B(1 + N_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + N_{\mathbf{p}})}{\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}\epsilon_{\mathbf{p}}},$$
$$A_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{p}}} - \frac{1}{i\omega_n + \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{p}}},$$
$$B_{\mathbf{p},\mathbf{k}}(i\omega_n) = \frac{1}{i\omega_n + \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{p}}} - \frac{1}{i\omega_n - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{p}}}.$$

Выражения (7) и (8) описывают отклик конденсатных (δn_c) и надконденсатных (δn) частиц на внешнее возмущение $U_{k\omega}$. При этом, как видно из уравнений (3) и (4), вследствие взаимодействия флуктуации конденсатных и надконденсатных частиц оказываются связанными. При не слишком высоких температурах ($0 < T \ll T_c$) и слабом взаимодействии подавляющее число частиц находится в конденсате. В результате при вычислении отклика конденсатных частиц на внешнее поле влиянием надконденсатных частиц можно пренебречь. Это и было сделано в (7) (учет данного влияния приводит к малому затуханию боголонов и для дальнейшего несущественен). Обратное влияние δn_c на флуктуации δn существенно. Поэтому при расчете оно учитывалось (наличие P^c в (8)).

Как известно, мнимые части поляризационных операторов определяют диссипацию энергии внешнего возмущения в системе. Из структуры отклика (7) видно, что $\operatorname{Im} P^c_{k\omega} \sim \delta(\omega^2 - \epsilon_k^2)$, т.е. затухание возмущения $U_{k\omega}$ происходит за счет трансформации кванта ω в боголюбовское возбуждение с энергией $\epsilon_{\mathbf{k}} \approx sk$, где s – скорость боголонов в бозе-газе. Вклад надконденсатных частиц в поглощение кванта ω внешнего переменного поля более сложен. Как видно из (8), существуют два принципиально различных механизма, определяемых структурой полюсов выражений A и B. Вклад A представляет собой затухание Ландау. Он связан с поглощением кванта ω возбуждением $\epsilon_{\mathbf{p}}$ и последующим рождением нового возбуждения $\epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{p}} + \omega$. Структура выражения B описывает распад кванта ω на два новых возбуждения, $\omega = \epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{k}}$, или, другими словами, возбуждение двух квазичастиц из конденсата. Такой механизм известен как механизм Беляева. Очевидно, что механизм Ландау может давать вклад лишь при ненулевых температурах, так как $N_{\mathbf{p}} \neq 0$ при условии $T \neq 0$. Вклад же механизма Беляева существует при любых температурах, так как содержит множитель $1 + N_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} + N_{\mathbf{p}}$. При $T \to 0$ он становится определяющим. Вычисление интеграла в (8) при ненулевых температурах в общем виде невозможно. При $T = 0$ интеграл в (8) (вклад Беляева) может быть точно вычислен в длинноволновом приближении ($\epsilon_{\mathbf{p}} \approx sp$):

$$P^{n(0)}_{k,\omega} = -\frac{g^2 n_c^2}{4s^2}\left[\frac{\theta(s^2k^2 - \omega^2)}{\sqrt{s^2k^2 - \omega^2}} + i\frac{\theta(\omega^2 - s^2k^2)}{\sqrt{\omega^2 - s^2k^2}}\right], \quad (9)$$

где верхний индекс “(0)” отражает тот факт, что $T = 0$. Из (9) видно, что мнимая часть $P^{n(0)}_{k,\omega}$ существует лишь при $|\omega| > sk$, т.е. диссипация энергии происходит пороговым образом. Такое поведение можно качественно понять исходя из структуры полюсов в слагаемом B в выражении (8). Кинематическое условие поглощения кванта ω для беляевского механизма имеет вид $\omega = sp + s|\mathbf{p} + \mathbf{k}|$. Простой анализ показывает, что это уравнение имеет решение при любых $\mathbf{p}$ только при условии $|\omega| > sk$. Если внешнее возмущение представляет собой звуковую волну, то $\omega = ck$ (где c – скорость звука). Таким образом, мы приходим к условию поглощения звука в БЭК, $c > s$, представляющему собой черенковское условие генерации боголонов звуковым квантом. При ненулевых температурах это условие подавляется, поскольку в игру включается механизм Ландау, для которого кинематическое уравнение $\omega = s|\mathbf{p} + \mathbf{k}| - sp$ имеет решение и при $|\omega| < sk$. Эти простые рассуждения подтверждаются прямым расчетом коэффициента поглощения ПАВ, который мы рассмотрим ниже.

3. Эффекты экранирования при $T = 0$. Рассмотрим теперь применение вышеизложенной теории. Начнем с изучения эффектов экранирования электростатического взаимодействия заряженной примеси, расположенной на расстоянии H от экситонного газа (см. рис. 1), и пробного диполя [23]. Потенциальная энергия взаимодействия примеси и пробного диполя имеет вид $U(k) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon k}\left(1 - e^{-kd}\right)e^{-kH}$. Кроме прямого взаимодействия с примесью, пробный диполь взаимодействует с индуцированным потенциалом $W^i(\mathbf{r})$, обусловленным неоднородным распределением экситонной плотности $\delta N(\mathbf{r}')$, который находится из соотношения

$$W^i(\mathbf{r}) = \int g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta N(\mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (10)$$

где $g(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ дается выражением (2). В фурье-представлении полная энергия взаимодействия системы примесь–пробный диполь запишется в виде $W^t(k) = U(k) + g(k)[\delta n_c(k) + \delta n(k)]$. Учитывая формулы (7) и (8) и принимая во внимание, что $W^t(k)$ зависит лишь от модуля вектора k, получаем

$$W^t(\mathbf{r}) = \frac{e^2 d}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{kdke^{-kH}J_0(kr)}{\epsilon(k)}, \quad (11)$$
$$\frac{1}{\epsilon(k)} = \left(1 + gP^c_{k,0}\right)\frac{1 - 2gP^n_{k,0}}{1 - 3gP^n_{k,0}}.$$

Здесь мы учли, что $kd \ll 1$. Рассмотрим вначале случай нулевой температуры. Тогда в (11) $gP^{n(0)}_{k,0} = -1/k\xi_1$, где $\xi_1 = \xi a_B/\pi d$, $\xi = 1/Ms$ – длина залечивания, $a_B = \varepsilon/Me^2$ – боровский радиус. Для экранированного потенциала получаем выражение

$$W^t(\mathbf{r}) = \frac{e^2 d}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{k^2(k+2/\xi_1)e^{-kH}J_0(kr)}{(k^2+4/\xi^2)(k+3/\xi_1)}kdk = \qquad (12)$$
$$= \frac{e^2 d}{\varepsilon}\int_0^\infty \frac{e^{-kH}J_0(kr)}{k^2+4/\xi^2}k^3dk -$$
$$-\frac{e^2 d}{\varepsilon\xi_1}\int_0^\infty \frac{e^{-kH}J_0(kr)}{(k^2+4/\xi^2)(k+3/\xi_1)}k^3dk.$$

Таким образом, в задаче появляются три параметра длины: H, ξ и ξ_1. Рассмотрим две ситуации. Пусть примесь лежит достаточно близко к экситонному газу, т.е. $H \ll \min[\xi,\xi_1]$. В таком случае экспоненту можно заменить единицей. При этом в последнем интеграле следует рассмотреть два случая: $\xi \gg \xi_1$ и $\xi \ll \xi_1$.

При $\xi \gg \xi_1$, вычисляя интегралы в (12), получаем

$$W^t(\mathbf{r}) = \frac{2e^2d}{3\varepsilon r^2}\left[\frac{4r}{\xi}K_1\left(\frac{2r}{\xi}\right) - \frac{4r^2}{\xi^2}K_2\left(\frac{2r}{\xi}\right)\right]. \qquad (13)$$

Если же $\xi \ll \xi_1$, имеем

$$W^t(\mathbf{r}) = \frac{e^2d}{\varepsilon r^2}\left[\frac{4r}{\xi}K_1\left(\frac{2r}{\xi}\right) - \frac{4r^2}{\xi^2}K_2\left(\frac{2r}{\xi}\right)\right] + \qquad (14)$$
$$+\frac{e^2d\xi^2}{4\varepsilon\xi_1}\Delta_r\left\{\frac{1}{r} - \frac{3\pi}{2\xi_1}\left[H_0\left(\frac{3r}{\xi_1}\right) - N_0\left(\frac{3r}{\xi_1}\right)\right]\right\}.$$

Здесь Δ_r – радиальная компонента оператора Лапласа, $K_n(x)$, $H_0(x)$ и $N_0(x)$ – функции Макдональда, Струве и Неймана соответственно. Выражения (13) и (14) дают пространственное поведение экранированного потенциала при произвольном соотношении между r и ξ, ξ_1. На больших расстояниях из (13) и (14) получаются следующие выражения для экранированного потенциала:

$$W^t(\mathbf{r}) \approx -\frac{8e^2d}{3\varepsilon\xi^2}\sqrt{\frac{\pi\xi}{4r}}e^{-2r/\xi} \qquad (15)$$

при $r \gg \xi \gg \xi_1$ и

$$W^t(\mathbf{r}) \approx \frac{e^2\xi_1\xi^2d}{4\varepsilon r^5} \qquad (16)$$

при $r \gg \xi_1 \gg \xi$.

Теперь рассмотрим противоположный случай, когда $H \gg \max[\xi,\xi_1]$. В данной ситуации удобно вернуться к первому интегралу в (12), где можно считать $k \ll \min[1/\xi, 1/\xi_1]$. Вычисляя в этом пределе интеграл, находим

$$W^t(\mathbf{r}) = \frac{e^2d\xi^2}{6\varepsilon}\frac{H(6H-9r^2)}{(H^2+r^2)^{7/2}} \approx -\frac{3e^2d\xi^2H}{2\varepsilon r^5}, \qquad (17)$$

где последнее равенство записано в пределе $r \gg H$.

Общее выражение (12) позволяет рассмотреть и промежуточные случаи, $\min[\xi,\xi_1] \ll H \ll \max[\xi,\xi_1]$.

Однако мы не будем приводить здесь получающиеся выражения.

4. Поглощение ПАВ экситонным конденсатом. Будем рассматривать структуру, состоящую из ДКЯ, расположенной на поверхности пьезоэлектрической подложки, например кристалла $LiNbO_3$, имеющего точечную группу симметрии C_{6v} (см. рис. 2) [24]. Плоскость (xz) является плоскостью раздела

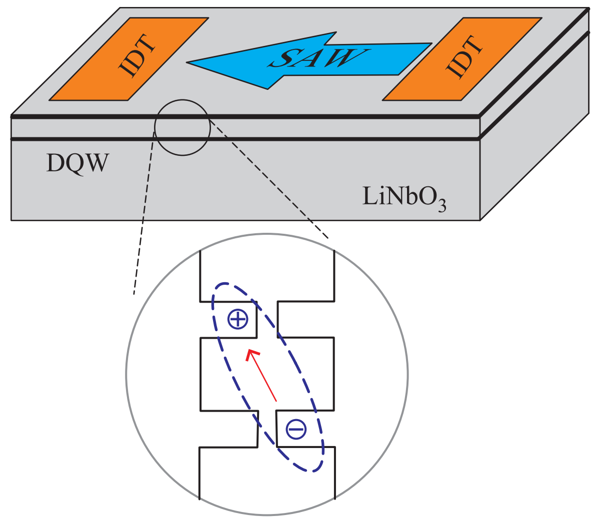

Рис. 2. Взаимодействие ПАВ с экситонным газом в ДКЯ

пьезоподложки и ДКЯ, в которой лежит ось симметрии пьезокристалла (ось z). ПАВ распространяется в направлении оси x. В такой геометрии вектор смещения точек среды имеет z-компоненту $\mathbf{u} = (0,0,u(x,y))$. Скалярный потенциал электрического поля, сопровождающего ПАВ, складывается из двух источников: пьезоэффекта подложки и вариации полной плотности экситонов $\delta N_{k\omega}$. (В равновесии диполи создают стационарное электрическое поле и далее под экситонным вкладом в ϕ мы понимаем флуктуационную добавку к этому полю, обусловленную отклонением плотности экситонов от равновесного значения.)

Зависимость u и ϕ от времени и координат описывается системой уравнений в среде $(y > 0)$:

$$\rho\ddot{u}_{tt} = \lambda\nabla^2 u - \beta\nabla^2\phi^{(i)}, \qquad (18)$$
$$\varepsilon\nabla^2\phi^{(i)} + 4\pi\beta\nabla^2 u = 0,$$

и вне ее $(\phi = \phi^{(e)},\ y < 0)$:

$$\nabla^2\phi^{(e)} = 0. \qquad (19)$$

Здесь ρ, λ, β, ε – плотность, модуль упругости, пьезоэлектрическая и диэлектрическая постоянные пьезоподложки. Первое уравнение в (18) описывает движение среды в присутствии пьезоэлектрического поля, а второе является уравнением Пуассона [25]. Динамические уравнения требуется дополнить граничными условиями. На механическую часть задачи накладывается условие свободной поверхности: $\sigma_{zy}|_{y=0} = 0$, где σ_{zy} – тензор напряжений. (Здесь мы пренебрегаем влиянием веса ДКЯ на механическое движение пьезоподложки.) Уравнение Пуассона (18) требуется дополнить граничными условиями на вектор электрического смещения $\mathbf{D}$ и электрический потенциал ϕ. С электростатической точки зрения экситонный газ можно рассматривать как двойной электрический слой, граничные условия для которого имеют вид (при $y = 0$)

$$D_y^{(i)} = -\frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial y};\ \ \phi^{(e)} - \phi^{(i)} = 4\pi p\delta N. \tag{20}$$

Здесь $p = ed$ – абсолютное значение дипольного момента экситона. Для применения такой модели требуется выполнение условий $kd \ll 1$ и $k\varrho \ll 1$, где ϱ – пространственный декремент затухания ПАВ в объем подложки. Решая совместно выписанные уравнения с учетом граничных условий, получаем дисперсионное уравнение

$$\sqrt{k^2 - \omega^2/c^2} = \frac{\gamma k}{\epsilon + 1}\frac{1}{1 + b\gamma k P_{k,\omega}}, \tag{21}$$

где $b = 4\pi e^2 d^2/(\epsilon + 1)$, $\gamma = 4\pi\beta^2/\epsilon\rho c^2$ – коэффициент пьезоэлектрической связи. Поглощение ПАВ может быть найдено как мнимая часть волнового вектора $k(\omega) = k_1 + ik_2$ в (21). В отсутствие экситонов ($P_{k,\omega} = 0$) решение (21) имеет только вещественную часть, $k_1 = \omega/\tilde{c}$, где $\tilde{c} = c\sqrt{1 - \gamma^2/(\epsilon + 1)^2}$ – скорость ПАВ, перенормированная за счет пьезоэффекта. При наличии экситонов, считая, что $k_2 \ll k_1$, получаем

$$k_2 = -\frac{b\gamma^3 k_1^2}{(\epsilon + 1)^2}\frac{P_2}{(1 + b\gamma k_1 P_1)^2 + (b\gamma k_1 P_2)^2}, \tag{22}$$

где $P_{k,\omega} = P_1 + iP_2$. В правую часть этого выражения нужно подставить невозмущенное решение $k = k_1 = \omega/\tilde{c}$. Мнимая часть поляризационного оператора экситонного газа P_2 может быть найдена из общих формул пункта 2. Опуская громоздкие вычисления, при низких температурах ($T \ll sk$) получаем следующий результат.

Если $|\tilde{c}^2 - s^2| \gg b\gamma n_c\omega/M\tilde{c}$, то

$$k_2 \sim \frac{\gamma^3\omega}{\sqrt{1 - s^2/\tilde{c}^2}}\left(1 + \frac{16\pi T\tilde{c}}{\omega s}e^{-\frac{\omega(\tilde{c}-s)}{2T\tilde{c}}}\right),\ \ \tilde{c} > s; \tag{23}$$
$$k_2 \sim \frac{\gamma^3\sqrt{\omega T}}{\sqrt{s^2/\tilde{c}^2 - 1}}\left(e^{-\frac{\omega(s-\tilde{c})}{2T\tilde{c}}} - e^{-\frac{\omega(s+\tilde{c})}{2T\tilde{c}}}\right),\ \ \tilde{c} < s.$$

В противоположном пределе, $|\tilde{c}^2 - s^2| \ll b\gamma n_c\omega/M\tilde{c}$, поглощение ПАВ определяется выражениями

$$k_2 \sim \gamma\omega\left(1 - \frac{s^2}{\tilde{c}^2}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{16\pi T\tilde{c}}{\omega s}e^{-\frac{\omega(\tilde{c}-s)}{2T\tilde{c}}}\right),\ \ \tilde{c} > s; \tag{24}$$
$$k_2 \sim \gamma\sqrt{\omega T}\left(\frac{s^2}{\tilde{c}^2} - 1\right)^{3/2}\left(e^{-\frac{\omega(s-\tilde{c})}{2T\tilde{c}}} - e^{-\frac{\omega(s+\tilde{c})}{2T\tilde{c}}}\right),\ \ \tilde{c} < s.$$

В полученных выражениях мы опустили постоянные множители. Из вида этих выражений следует, что при $T = 0$ в обоих случаях $k_2 \sim \omega$ при $s^2 < \tilde{c}^2$ и $k_2 = 0$, если $s^2 > \tilde{c}^2$, т.е. k_2 растет линейно с увеличением частоты ПАВ и имеет пороговую особенность по величине плотности экситонов. Действительно, поглощение ПАВ происходит при условии $\tilde{c}^2 > s^2$, а $s^2 = gn_c/M$. Таким образом, неравенство $s^2 < \tilde{c}^2$ эквивалентно условию $n_c < n_c^0$, где критическая экситонная плотность $n_c^0 = M\tilde{c}^2/g$.

При ненулевой температуре поглощение возможно и при $\tilde{c}^2 < s^2$. Происхождение данного вклада связано с процессами типа затухания Ландау. Тем не менее это поглощение экспоненциально мало при существенно низких температурах T. Выражение (24) также дает зависимость поглощения от концентрации вблизи порога. При $T = 0$ имеем $k_2 \sim \theta(n_c^0 - n_c)(n_c^0 - n_c)^{3/2}$ при $n_c \to n_c^0$.

5. Гибридная электрон-экситонная система. Фриделевские осцилляции экситонов. Одной из типичных проблем физики многочастичных систем является взаимодействие ферми-частиц (квазичастиц) с бозевскими. Круг подобных задач существенно расширился с возникновением и развитием физики низкоразмерных структур. При этом успехи технологии сделали возможным пространственное разделение взаимодействующих фермионов и бозонов. Естественно, что это привело к новым интересным задачам. Одной из них стало взаимодействие двумерного электронного газа с двумерными же экситонами в геометрии параллельных слоев. В таких системах был предсказан ряд интересных эффектов: эффекты увлечения [26, 27], наличие ротонного минимума в законе дисперсии коллективных возбуждений [28], сверхпроводимость электронов, обусловленная экситонным механизмом спаривания [29].

Изучаемая гибридная структура схематически изображена на рис. 3. В настоящем пункте мы рассмотрим наведенные фриделевские осцилляции экситонной плотности, а в следующем – рассеяние квазичастиц. Фурье-образ потенциала электрон-электронного взаимодействия в слое электронов имеет обычный вид: $\upsilon_k = 2\pi e^2/k$. В рамках тео-

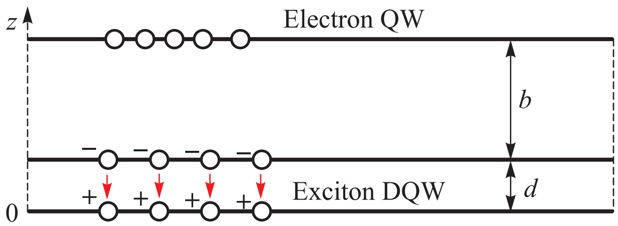

Рис. 3. Гибридная электрон-экситонная система

рии линейного отклика отклонения концентрации электронов (n_k) и экситонов (N_k) от равновесных значений связаны с возмущением посредством соотношений

$$\begin{aligned} n_k &= U_k^e \Pi_k^e; \\ N_k &= U_k^{ex} \Pi_k^{ex}, \end{aligned} \tag{25}$$

где U_k^e – полный потенциал возмущения, действующий на электроны, U_k^{ex} – то же самое для экситонов. В приближении случайных фаз поляризационные операторы имеют вид ($\alpha = e, ex;\ \hbar = 1$)

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{k}}^\alpha &= \sum_{\mathbf{q}} \frac{f_{\mathbf{q}}^\alpha - f_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^\alpha}{E_{\mathbf{q}}^\alpha - E_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^\alpha - i\delta}, \\ E_{\mathbf{q}}^e &= \frac{\mathbf{q}^2}{2m},\ E_{\mathbf{q}}^{ex} = \frac{\mathbf{q}^2}{2M}, \end{aligned} \tag{26}$$

где m – масса электрона, M – масса экситона, $f_{\mathbf{q}}^\alpha$ – функции распределения соответствующих частиц.

Полные потенциалы, действующие на электроны и экситоны, даются выражениями

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{k}}^e &= V_{\mathbf{k}}^e + \upsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + L_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}, \\ U_{\mathbf{k}}^{ex} &= V_{\mathbf{k}}^{ex} + g_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} + L_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$V_{\mathbf{k}}^e = \frac{2\pi e Q}{k}\, e^{-k|b-z_0|} \tag{28}$$

есть потенциал в слое электронов $z = b$ (см. рис. 3), созданный примесью с зарядом Q, находящейся в точке $(0, 0, z_0)$, а

$$V_{\mathbf{k}}^{ex} = \frac{2\pi e Q}{k} \left(e^{-k|z_0-d|} - e^{-k|z_0|} \right) \tag{29}$$

определяет потенциал взаимодействия экситонов с той же примесью. В выражениях (27) вторые слагаемые представляют собой индуцированную часть полного потенциала, созданного "своими" частицами в "своем" слое, а третьи – индуцированный потенциал, созданный электронами в слое экситонов, и наоборот. Множитель $L_{\mathbf{k}}$ представляет собой потенциал электрон-экситонного взаимодействия:

$$L_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi e^2}{k}\, e^{-kb} \left(e^{kd} - 1 \right). \tag{30}$$

Совместное решение системы уравнений (25) и (27) позволяет выразить $n_{\mathbf{k}}, N_{\mathbf{k}}$ через $V_{\mathbf{k}}^e, V_{\mathbf{k}}^{ex}$:

$$\begin{aligned} n_k &= \Pi_k^e \frac{V_k^e (1 - g_k \Pi_k^{ex}) + V_k^{ex} L_k \Pi_k^{ex}}{(1 - \upsilon_k \Pi_k^e)(1 - g_k \Pi_k^{ex}) - L_k^2 \Pi_k^e \Pi_k^{ex}}, \\ N_k &= \Pi_k^{ex} \frac{V_k^{ex} (1 - \upsilon_k \Pi_k^e) + V_k^e L_k \Pi_k^e}{(1 - \upsilon_k \Pi_k^e)(1 - g_k \Pi_k^{ex}) - L_k^2 \Pi_k^e \Pi_k^{ex}}. \end{aligned} \tag{31}$$

Поляризационный оператор электронов в (31) имеет вид [30]

$$\Pi_k^e = -\frac{m}{\pi} \left[1 - \theta \left(1 - \frac{4p_0^2}{k^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4p_0^2}{k^2}} \right]. \tag{32}$$

Здесь $\theta(x)$ – функция Хевисайда, p_0 – импульс Ферми электронного газа. Рассмотрим поведение экситонной плотности как функции координат:

$$N(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty N_k\, J_0(k\rho) k dk, \tag{33}$$

где N_k определяется выражением (31). Асимптотика $N(\rho)$ при $\rho \to \infty$ содержит как монотонную часть, так и осцилляции, обусловленные наличием Π_k^e в (31). Здесь мы ограничимся рассмотрением фриделевских осцилляций плотности экситонов, которые возникают вследствие наличия в выражении (31) поляризационного оператора электронов Π_k^e. Как видно из (32), особенность Π_k^e имеет при $k = 2p_0$ корневой характер. Вблизи этой особенности радикал мал. Поэтому можно разложить подынтегральное выражение в (33) по малому параметру $\gamma_k = \theta(1 - 4p_0^2/k^2)\sqrt{1 - 4p_0^2/k^2}$, а коэффициент при γ_k вынести из-под знака интеграла, взяв его в точке $k = 2p_0$. Удерживая первый неисчезающий вклад по γ_k и вычисляя интеграл, для осциллирующей поправки $\tilde{N}(\rho)$ к плотности экситонов получаем

$$\tilde{N}(\rho) = -\frac{A}{2\pi\sqrt{2}} \frac{\sin(2p_0\rho)}{\rho^2}. \tag{34}$$

В (34) амплитуда осцилляций

$$A = -L_k \Pi_k^e\, \Pi_k^{ex} \left[\frac{V_k^e (1 - g_k \Pi_k^{ex}) + L_k V_k^{ex} \Pi_k^{ex}}{\Delta_k^2} \right], \tag{35}$$

$$\Delta_k = (1 - g_k \Pi_k^{ex})(1 - \upsilon_k \Pi_k^e) - L_k^2 \Pi_k^{ex} \Pi_0^e,\ k = 2p_0.$$

Из этого выражения видно, что осцилляции экситонной плотности имеют наведенный характер: в отсутствие связи между электронами и экситонами, т.е. при $L_k = 0$, амплитуда осцилляций обращается в нуль. В наиболее типичной экспериментальной ситуации, когда $N_0 \ll n_0$, для амплитуды осцилляций получаем оценку

$$A \approx -\frac{Q}{e}\frac{mMe^4}{p_0^2}\frac{N_0}{n_0}\,e^{-2p_0(b+|b-z_0|)}\left[e^{2p_0 d}-1\right],$$

где N_0 – равновесная концентрация экситонов, а n_0 – электронов.

Приведенные вычисления относились к случаю отсутствия конденсата экситонов. При наличии конденсата, как было показано в нашей работе [31], результаты не изменяются. Действительно, наличие осцилляций обусловлено особенностью поляризационного оператора электронов при $k = 2p_0$. Наличие конденсата приводит к особенностям в отклике экситонов при $k \to 0$, что никак не сказывается на поведении фриделевских осцилляций.

6. Гибридная электрон-экситонная система. Времена жизни квазичастиц. В настоящем пункте мы рассмотрим влияние электрон-экситонного взаимодействия на время жизни коллективных и одночастичных возбуждений в гибридной системе, схематически показанной на рис. 3 [32]. Как отмечалось во введении, при малых концентрациях экситонную подсистему можно рассматривать как слабонеидеальный бозе-газ. При абсолютном нуле температур экситоны находятся в конденсированной фазе. Низкоэнергетическими возбуждениями в ней являются квазичастицы Боголюбова, закон дисперсии которых (в модели слабонеидеального бозе-газа) имеет вид (7). Для простоты мы ограничимся случаем $T = 0$. Закон дисперсии одночастичных возбуждений в электронном слое имеет вид $E^e_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}^2/2m$, где m – эффективная масса электрона. Как известно, ферми-жидкостные эффекты приводят к перенормировке массы и конечному времени жизни электрона. Кроме ферми-возбуждений, взаимодействующий электронный газ обладает и бозевской ветвью возбуждений (плазмоны), которой в 2D-системе соответствует корневой закон дисперсии. Электрон-экситонное взаимодействие приводит к поправкам к указанным спектрам.

Кроме электрон-экситонного взаимодействия, в затухание электронов дает вклад и взаимодействие электронов между собой. Для двумерного электронного газа этот вклад был вычислен в работе [33]. Затухание боголюбовского звука в БЭК атомов в бесконечной 2D- и 3D-системах, обусловленное распадным характером спектра боголонов, рассматривалось в ряде работ (см. обзор [21]). Представляет интерес сравнить вклад в затухание, вызванный экситон-электронным взаимодействием, с собственным затуханием возбуждений в каждой подсистеме.

Начнем с рассмотрения времени жизни одночастичных возбуждений электронного газа.

Время жизни электронов. Мы не будем интересоваться процессами, ответственными за перенормировку массы, а остановимся лишь на вычислении времени жизни квазичастиц. Время жизни электрона определяется мнимой частью массового оператора электрона $\operatorname{Im}\Sigma(\varepsilon,p)$ вблизи импульса Ферми $p \approx p_0$ и на массовой поверхности $\varepsilon = \xi_{\mathbf{p}}$, где энергия электрона $\xi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m - \mu$ отсчитывается от уровня Ферми $\mu = p_0^2/2m$. Вклады второго порядка по величине электрон-экситонного взаимодействия, $L_{\mathbf{k}} = 2\pi e^2 e^{-kb}(1-e^{-kd})/\varepsilon k$, дающие конечное затухание электрона, показаны на рис. 4. Надконденсатные

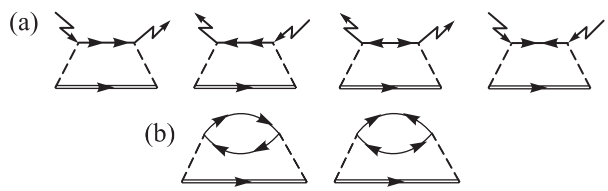

Рис. 4. Массовый оператор электронов. Двойная сплошная линия обозначает функцию Грина электрона. Тонкие сплошные линии – функции Грина надконденсатных частиц. Штриховая линия – электрон-экситонное взаимодействие. Сплошные ломаные линии – линии конденсатных частиц

функции Грина имеют вид

$$G(\omega,\mathbf{p}) = \frac{\omega + p^2/2M + gn_c}{\omega^2 - \epsilon_{\mathbf{p}}^2 + i\delta};\qquad F(\omega,\mathbf{p}) = \frac{-gn_c}{\omega^2 - \epsilon_{\mathbf{p}}^2 + i\delta}. \qquad (36)$$

Здесь мы, как и выше, считаем взаимодействие экситонов контактным, $g = g_{k=0} = 4\pi e^2 d/\varepsilon$, т.е. полагаем $kd \ll 1$. В этом же приближении $L_k = 2\pi e^2 d e^{-kb}/\varepsilon$. Диаграммы рис. 4a описывают вклад в $\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p})$, обусловленный виртуальными процессами, в которых электрон переводит частицу из конденсата в надконденсатное состояние. Обозначим этот вклад как $\Sigma_{cn}(\varepsilon,\mathbf{p})$. Диаграммы рис. 4b дают вклад $\Sigma_{nn}(\varepsilon,\mathbf{p})$, описывающий поляризацию надконденсатной части, вызванную движущимся электроном, $\Sigma(\varepsilon,\mathbf{p}) = \Sigma_{cn}(\varepsilon,\mathbf{p}) + \Sigma_{nn}(\varepsilon,\mathbf{p})$. Согласно рис. 4a $\operatorname{Im}\Sigma_{cn}(\varepsilon,\mathbf{p})$ определяется выражением

$$\operatorname{Im}\Sigma_{cn}(\varepsilon,\mathbf{p}) = n_c\int\frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^3}L_k^2\operatorname{Im}G_e(\varepsilon-\omega,\mathbf{p}-\mathbf{k})\operatorname{Im}[G(\omega,\mathbf{k}) + G(-\omega,-\mathbf{k}) + F(\omega,\mathbf{k}) + F(-\omega,-\mathbf{k})], \qquad (37)$$

где мнимая часть функции Грина электрона $\mathrm{Im}\, G_e(\varepsilon, \mathbf{p}) = -\pi \mathrm{sign}(\xi_{\mathbf{p}})\delta(\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}})$. Вычисляя интегралы в (37) при $p \approx p_0$ и малых ξ ($\xi b/s \ll 1$), получаем

$$\mathrm{Im}\, \Sigma_{cn}(\xi) = 2\pi^2 (n_c d^2) \frac{v_0}{s} \left(\frac{e^2}{\varepsilon v_0}\right)^2 \frac{\xi|\xi|}{Ms^2}. \qquad (38)$$

В этом выражении $v_0 = p_0/m$ – скорость электронов на уровне Ферми. Выражение (38) дает квадратичную по энергии зависимость затухания электронных возбуждений за счет рассеяния на экситонах, находящихся в конденсате. Укажем для сравнения, что в аналогичной 3D-системе фермионов и бозонов соответствующий вклад в затухание фермиона пропорционален $|\xi|\xi^2$ [34].

Для вычисления $\mathrm{Im}\, \Sigma_{nn}(\varepsilon, \mathbf{p})$ требуется знать поляризационный оператор (петли на рис. 4b), который дается выражением (9). Опуская вычисления, приведем результат:

$$\mathrm{Im}\, \Sigma_{nn}(\xi) = \frac{\pi v_0}{4s} (Msd)^2 \left(\frac{e^2}{\varepsilon v_0}\right)^2 \xi. \qquad (39)$$

Это выражение получено при малых $\xi d/s \ll 1$, $\xi b/s \ll 1$, и $L_k \approx 2\pi e^2 d/\varepsilon$. Таким образом, процессы рассеяния электрона на надконденсатных частицах дают линейную зависимость от ξ обратного времени жизни электрона, т.е. главный вклад при $\xi \to 0$ по сравнению с (38).

Время жизни коллективных возбуждений. Изучим вопрос о затухании коллективных возбуждений, т.е. флуктуаций плотности электронного (плазмоны) и экситонного газов. Для этого требуется получить дисперсионное уравнение, описывающее закон дисперсии коллективных мод. Несложные вычисления в рамках теории линейного отклика дают

$$1 - \frac{2\pi e^2}{k}\Pi(\mathbf{k}, \omega) - L_k^2 \Pi(\mathbf{k}, \omega)[P_{cn}(\mathbf{k}, \omega) + P_{nn}(\mathbf{k}, \omega)] = 0, \qquad (40)$$

где поляризационный оператор электронов ($k \ll p_0$)

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{m}{\pi}\left[1 - \frac{|\omega|\theta[\omega^2 - v_0^2 k^2]}{\sqrt{\omega^2 - v_0^2 k^2}} - i\frac{|\omega|\theta[v_0^2 k^2 - \omega^2]}{\sqrt{v_0^2 k^2 - \omega^2}}\right]. \qquad (41)$$

Исходя из дисперсионного уравнения (40) находим затухание плазмонов ($\omega \gg k v_0$) при $kb \ll 1$:

$$\mathrm{Im}\, \omega = -\frac{\pi M s^2}{4}\frac{d}{a_{ex}} kd, \qquad (42)$$

а также боголюбовских возбуждений $\omega \sim sk \ll kv_0$ при $ka \ll 1$, $s \ll v_0$:

$$\mathrm{Im}\, \omega = \frac{m}{M}\frac{L_k^2 n_c}{8\pi v_0} k(ka)^2, \qquad (43)$$

где $a_{ex} = (Me^2)^{-1}$, $a = (me^2)^{-1}$. Выражение (42) представляет затухание плазмонов, обусловленное взаимодействием с экситонами. Поскольку для 2D-плазмонов $\mathrm{Re}\,\omega \sim \sqrt{k}$, имеем $\mathrm{Im}\,\omega/\mathrm{Re}\,\omega \to 0$ при $k \to 0$, т.е. плазмоны остаются “хорошими” квазичастицами. Выражение (43) описывает затухание боголюбовского звука, обусловленное электронами. Такую же k^3-зависимость имеет собственное (беляевское) затухание боголонов, обусловленное процессами конденсат-надконденсатного рассеяния в 2D-бозе-конденсате [21]. В наших обозначениях это затухание имеет вид

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}s}{32\pi n_c} k^3. \qquad (44)$$

Для оценки, как и выше, примем $L_k \approx 2\pi e^2 d/\varepsilon$. Тогда

$$\frac{\mathrm{Im}\,\omega}{\gamma} = \frac{16\pi^2}{\sqrt{3}}\frac{m}{M}\frac{v_0}{s}\left(\frac{e^2}{\varepsilon\hbar v_0}\right)^2 (adn_c)^2 \sim 2\cdot 10^{-4}, \qquad (45)$$

где использованы значения $n_c \sim 10^9\,\text{см}^{-2}$, $a \sim 10^{-6}\,\text{см}$, $d \sim 10^{-6}\,\text{см}$, $s \sim 4\cdot 10^5\,\text{см/с}$, $v_0 \sim 4\cdot 10^7\,\text{см/с}$. При этом как в отсутствие, так и при наличии электронного слоя при $k \to 0$ выполняется соотношение $(\mathrm{Im}\,\omega; \gamma) \ll sk$, т.е. боголоны, как и плазмоны, остаются долгоживущими квазичастицами.

Таким образом, мы показали, что в гибридной системе рассеяние электронов на экситонах существенно уменьшает время жизни электронных возбуждений. При указанных выше параметрах линейная по ξ часть затухания электронов (39) практически сравнивается с энергией квазичастиц: $\mathrm{Im}\,\Sigma_{nn}(\xi) \sim 0.6\xi$. Что касается коллективных возбуждений, то влияние экситон-электронного взаимодействия на затухание боголонов значительно меньше их собственного затухания (44). В то же время у плазмонов даже при $T = 0$, когда затухание Ландау отсутствует, появляется линейное по k затухание (42), которое в длинноволновом пределе все же мало по сравнению с частотой плазмона.

7. Экситонный диэлектрик в сверхпроводящем состоянии. В работе [1] было показано, что в системе электронов и дырок возможен эффект Купера из-за кулоновского притяжения между электронами и дырками и образования конденсата куперовских пар, что приводит к упорядоченному состоянию типа сверхпроводящего. Сверхтекучее движение в такой системе достижимо (если нет так называемой фиксации фазы), но для нейтральной системы (число электронов равно числу дырок) оно не сопровождается электрическим током. Поэтому говорят не о сверхпроводнике, а об экситонном диэлектрике (*excitonic insulator*), в котором электрический ток может возникнуть только при наличии возбуждений. Вместе с тем сверхтекучесть все же может быть использована для получения двухпроводной сверхпроводящей линии, если рассмотреть систему пространственно разделенных электронов и дырок [11].

Интерес к такого рода системам, в которых решающим является кулоновское притяжение, обусловлен тем, что для них температурный интервал упорядоченного состояния может быть больше, чем, например, в сверхпроводниках. Последнее особенно важно в ситуации с двухпроводной сверхпроводящей линией [11].

Взаимодействие зарядов в экситонном диэлектрике, как и в обычном диэлектрике, описывается при помощи диэлектрической постоянной [35] (которая оказывается большой). Так же обстоит дело и с откликом на переменное электрическое поле [36]. Складывается впечатление, что в этих проявлениях электрон-дырочная система в упорядоченной фазе ведет себя как обычный диэлектрик. Однако оказывается, что имеются и существенные их отличия: возможно новое состояние с встроенным током [37, 38].

Стационарный случай. Пусть образец находится в цепи с током выше температуры перехода в упорядоченное состояние. При понижении температуры происходит переход в упорядоченное состояние, но только с заданным током. Найдем это состояние.

Пусть имеются один тип электронов (операторы рождения и уничтожения $a^+_{\mathbf{p}}$ и $a_{\mathbf{p}}$) и один тип дырок (операторы рождения и уничтожения $b^+_{\mathbf{p}}$ и $b_{\mathbf{p}}$) с одинаковыми (изотропными) дисперсией и концентрацией ($m_e = m_h = m,\ n_e = n_h = n$). Гамильтониан системы имеет вид

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} \xi_0(\mathbf{p}) \Big\{ a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^+_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} \Big\} + \\ + \frac{1}{V} \sum W(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4) a^+_1 b^+_2 b_3 a_4 + H_{e-e} + H_{h-h}. \quad (46)$$

Здесь оператор H_{e-e} описывает взаимодействие электронов друг с другом, а H_{h-h} – дырок; $\xi_0(\mathbf{p})$ – энергия частицы, отсчитанная от соответствующей энергии Ферми.

Упростим гамильтониан (46) (отбрасывая части H_{e-e} и H_{h-h}) и наложим дополнительное условие движения каждой из подсистем со своей скоростью. В результате с учетом дополнительного условия надо вместо гамильтониана (46) рассматривать оператор

$$H(\mathbf{v}_{e,h}) = \sum_{\mathbf{p}} \Big\{ \xi_e(\mathbf{p}) a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + \xi_h(\mathbf{p}) b^+_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}} \Big\} + \\ + \frac{1}{V} \sum W(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_4) a^+_1 b^+_2 b_3 a_4, \quad (47)$$

$$\xi_{e,h}(\mathbf{p}) = \xi_0(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{v}_{e,h} + \frac{m\mathrm{v}^2_{e,h}}{2} = \xi_0(\mathbf{p} - m\mathbf{v}_{e,h})\ .$$

Здесь $\mathbf{p}$ – импульс частицы в лабораторной системе отсчета (при нулевой температуре заполнены состояния с отрицательными энергиями), $\mathbf{v}_{e,h}$ – скорость соответствующей подсистемы, отсчет энергий частиц проводится от фермиевских энергий покоящихся подсистем. Такие энергии $\xi_{e,h}$ получаются, если накладывать дополнительное условие, фиксирующее импульс подсистемы, например добавляя к гамильтониану слагаемое $-\mathbf{v}_e \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}\ a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}$ для электронов (аналогично для дырок), что и подразумевается. Слагаемые $m\mathrm{v}^2_{e,h}/2$ появляются из-за химических потенциалов движущихся подсистем. Благодаря этому числа частиц оказываются равными исходным значениям.

Если брать произвольные скорости $\mathbf{v}_{e,h}$, то бозе-конденсат куперовских пар образуется с ненулевым импульсом. Если же $m\mathbf{v}_e = -m\mathbf{v}_h \equiv \mathbf{p}_0$, то по симметрии этот импульс заведомо нулевой. Далее будем рассматривать именно такой случай. Энергия электрона с импульсом $\mathbf{p}$ (частица типа a) и энергия дырки с импульсом $-\mathbf{p}$ (частица типа b) совпадают

$$\xi_e(\mathbf{p}) = \xi_h(-\mathbf{p}) = \xi_0(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \equiv \xi(\mathbf{p}). \quad (48)$$

В результате мы имеем в точности ту же задачу, что и для сверхпроводника, только здесь частицы отличаются знаком заряда, а не спином. Поэтому далее мы используем модель того же типа, что и в работе Бардина–Купера–Шриффера [39]: из всего взаимодействия оставляем только часть, соответствующую образованию куперовских пар с нулевым импульсом. После этого вместо гамильтониана (47) с учетом (48) имеем

$$H(\mathbf{v}_{e,h}) \to H = \sum_{\mathbf{p}} \xi(\mathbf{p}) \Big\{ a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^+_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} \Big\} + \\ + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W(\mathbf{p} - \mathbf{p}') a^+_{\mathbf{p}} b^+_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'}. \quad (49)$$

Оператор H и есть модельный гамильтониан нашей задачи с дополнительным условием.

Для этого гамильтониана идеально подходит приближение самосогласованного поля, для которого оператор взаимодействия H_i (последняя часть (49)) представляется в виде

$$H_i \to \sum_{\mathbf{p}} \Big\{ a^+_{\mathbf{p}} b^+_{-\mathbf{p}} \Delta(\mathbf{p}) + \text{h.c.} \Big\} - \\ - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \langle a^+_{\mathbf{p}} b^+_{-\mathbf{p}} \rangle \langle b_{-\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'} \rangle,$$

$$\Delta(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \langle b_{-\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'} \rangle, \quad (50)$$

где треугольные скобки означают усреднение по состоянию системы.

Произведем диагонализацию гамильтониана (47) преобразованиями Боголюбова. В результате получаем спектр элементарных возбуждений E и уравнение для параметра порядка Δ при нулевой температуре:

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi^2(\mathbf{p}) + \Delta^2(\mathbf{p})};$$

$$\Delta(\mathbf{p}) = -\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \frac{\Delta(\mathbf{p}')}{2\,E(\mathbf{p}')}. \quad (51)$$

Параметр порядка $\Delta(\mathbf{p})$ выражается через значение $\Delta_0(\mathbf{p})$ для покоящихся подсистем (т. е. при $\mathbf{p}_0 = 0$). То же самое справедливо для энергии квазичастиц. Таким образом, имеем

$$\Delta(\mathbf{p}) = \Delta_0(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)\,, \qquad E(\mathbf{p}) = E_0(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)\,. \quad (52)$$

Эволюция во времени. Состояние со встроенным током возникает под влиянием внешних условий (ток в цепи, в которую входит наш образец). Это состояние (без внешнего воздействия) не является стационарным, поскольку разность импульсов подсистем не является квантовым числом. Поэтому интересно выяснить, что будет с системой, если в качестве начального состояния взять состояние с током в отсутствие внешнего воздействия. Кроме того, рассмотрим влияние на систему (с током или без) внезапного возмущения (векторный потенциал изменяется скачком).

Для этого можно использовать подход Андерсона [40]. В данном подходе вводятся псевдоспины 1/2 и соответствующие операторы (вместо операторов пары частиц)

$$a^+_{\mathbf{p}} b^+_{-\mathbf{p}} \to S^+(\mathbf{p}) = S_x(\mathbf{p}) + iS_y(\mathbf{p}), \\ b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} \to S^-(\mathbf{p}) = S_x(\mathbf{p}) - iS_y(\mathbf{p}), \\ a^+_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} + b^+_{-\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} \to 1 + 2S_z(\mathbf{p}). \quad (53)$$

Тогда гамильтониан H_0 (см. (49) без дополнительного условия) с учетом однородного переменного поля $\mathbf{A}(t)$ ($\mathbf{A}(t)$ – векторный потенциал) запишется в виде

$$H_0 \to \sum_{\mathbf{p}} \Big\{ \xi_0(\mathbf{p}) - \frac{e}{mc}(\mathbf{pA}) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 \Big\} \times \\ \times \Big[1 + 2S_z(\mathbf{p})\Big] + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') S^+(\mathbf{p}) S^-(\mathbf{p}'). \quad (54)$$

Таким образом, нас будут интересовать нестационарные задачи в однородном случае. Для решения таких задач необходимо иметь нестационарные уравнения.

В приближении самосогласованного поля для взаимодействия H_i по аналогии с (50) имеем

$$H_i \to \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') S^+(\mathbf{p}) \langle S^-(\mathbf{p}') \rangle + \\ + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \langle S^+(\mathbf{p}) \rangle S^-(\mathbf{p}') - \\ - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \langle S^+(\mathbf{p}) \rangle \langle S^-(\mathbf{p}') \rangle. \quad (55)$$

В результате можно записать

$$H_0 = \sum_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}) - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \langle S^+(\mathbf{p}) \rangle \langle S^-(\mathbf{p}') \rangle;$$

$$H(\mathbf{p}) = \Big\{ \xi_0(\mathbf{p}) - \frac{e}{mc}(\mathbf{pA}) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 \Big\} \times \\ \times \Big[1 + 2S_z(\mathbf{p})\Big] + \widetilde{\Delta}(\mathbf{p}) S^+(\mathbf{p}) + \widetilde{\Delta}^*(\mathbf{p}) S^-(\mathbf{p});$$

$$\widetilde{\Delta}(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \langle S^-(\mathbf{p}') \rangle. \quad (56)$$

Соответствующая оператору $H(\mathbf{p})$ волновая функция $\Psi(\mathbf{p})$ есть двухкомпонентная величина (спинор). Выпишем для нее уравнение Шредингера:

$$\Psi(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \tilde{v}(\mathbf{p}) \\ \tilde{u}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}; \qquad H(\mathbf{p})\Psi(\mathbf{p}) = i\frac{d}{dt}\Psi(\mathbf{p}). \quad (57)$$

Отсюда

$$i\,\frac{d\tilde{v}_{\mathbf{p}}}{dt} = 2\Big\{ \xi_0(\mathbf{p}) - \frac{e}{mc}(\mathbf{pA}) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 \Big\} \tilde{v}_{\mathbf{p}} + \\ + \widetilde{\Delta}(\mathbf{p})\,\tilde{u}_{\mathbf{p}}; \quad (58)$$

$$i\,\frac{d\tilde{u}_{\mathbf{p}}}{dt} = \widetilde{\Delta}^*(\mathbf{p})\tilde{v}_{\mathbf{p}}; \qquad \widetilde{\Delta}(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'} W(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \tilde{u}^*_{\mathbf{p}'} \tilde{v}_{\mathbf{p}'}.$$

Приведем результаты для тока, которые получаются из анализа выписанных выше уравнений. Для начала рассмотрим задачу при отсутствии внешнего поля ($\mathbf{A} = 0$), но с током $\mathbf{j}(0)$ в начальный момент времени. Для плотности тока имеем

$$\mathbf{j}(t) = \frac{2e}{m} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} |\tilde{v}_{\mathbf{p}}|^2 \approx \\ \approx \mathbf{j}(0) + \frac{e}{m} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \frac{(\mathbf{pp}_0)}{m} \frac{\Delta^2}{E_0^2 E} \Big\{ \cos(2E_0 t) - 1 \Big\}; \quad (59)$$

$$\mathbf{j}(0) = \frac{2e}{m}\mathbf{p}_0 n.$$

Напомним, что n есть концентрация электронов (или дырок). В пределе малых скоростей ($v_{\mathrm{F}} p_0 \ll \Delta$) постоянная часть добавки к току в точности компенсирует исходное значение тока $\mathbf{j}(0)$.

В пределе $t\Delta \gg 1$ остается постоянная составляющая, для которой

$$\mathbf{j}(t \to \infty) = G(\alpha)\mathbf{j}(0) \qquad \left(\alpha \equiv \frac{v_F p_0}{\Delta}\right). \tag{60}$$

В двумерном случае

$$G(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\frac{\cos^2\varphi}{x^2+1} \times \\ \times \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha\cos\varphi)^2+1}}\right\}. \tag{61}$$

При $\alpha \ll 1$ получаем $G(\alpha) \approx \alpha^2/30$.

Таким образом, оказывается в конце концов ток остается, но меньше исходного (осциллирующие части стремятся к нулю). Хотя состояние системы не является стационарным, усредненные характеристики в пределе оказываются постоянными.

Теперь рассмотрим случай внезапного возмущения, когда векторный потенциал скачком изменяется от нуля до постоянного конечного значения:

$$\mathbf{A}(t<0) = 0, \qquad \mathbf{A}(t>0) = \mathbf{A}_0.$$

(Внезапность означает, что всё происходит быстро по сравнению с характерным временем $1/\Delta$.)

В результате в начальный момент ($t \to +0$) имеем

$$\mathbf{j}_A(0) = \frac{2e}{m}\left(\mathbf{p}_0 - \frac{e}{c}\mathbf{A}_0\right)n, \tag{62}$$

а для полного тока получим

$$\mathbf{j}_A(t) = \mathbf{j}_A(0) - \\ - \frac{e^2}{m^2 c}\,\frac{1}{V}\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{A}_0)\,\frac{\Delta^2}{\widetilde{E}_0^2 E}\left\{\cos(2\widetilde{E}_0 t) - 1\right\}. \tag{63}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\widetilde{E}_0 \equiv \sqrt{\tilde{\xi}_0^2 + \Delta^2},$$

$$\tilde{\xi}_0 \equiv \xi + \tilde{\xi}_1\ , \qquad \tilde{\xi}_1 \equiv -\frac{e}{mc}(\mathbf{p}\mathbf{A}_0) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}_0^2.$$

В пределе больших времен можно воспользоваться результатами, приведенными выше, а именно

$$\mathbf{j}_A(t \to \infty) = \mathbf{j}(0) - \left\{\frac{2e^2}{mc}\mathbf{A}_0 n\right\} G(\beta), \tag{64}$$

где $\beta = v_{\mathrm{F}}|e|A_0/c\Delta$. Напомним, что $\mathbf{j}(0)$ есть встроенный ток (при $t<0$). Если его нет (основное состояние экситонного диэлектрика), то в (64) остается только второе слагаемое.

Подчеркнем, что в случае конечного скачка векторного потенциала поведение экситонного диэлектрика отличается от поведения обычного диэлектрика: в нем остается постоянная составляющая тока (или дополнительный ток, если изначально был встроенный).

Итак, найден отклик экситонного диэлектрика на внезапное возмущение (вектор-потенциал меняется скачком). Показано, что при больших временах в системе остается постоянная составляющая электрического тока. Если же изначально в системе присутствовал встроенный ток, то он изменяется. Кроме того, если в отсутствие внешнего воздействия в системе в начальный момент времени имелся встроенный ток, то он уменьшается, но не до нуля.

Настоящий обзор написан по результатам работ [23], [24], [31, 32, 37, 38], выполненных при поддержке РФФИ (грант # 11-02-00060-а).

1. Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, ФТТ **6**, 2791 (1964).
2. Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов, Письма в ЖЭТФ **5**, 238 (1967).
3. С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 417 (1958).
4. С. Т. Беляев, ЖЭТФ **34**, 433 (1958).
5. D. W. Snoke, J. P. Wolfe, and A. Mysyrowicz, Phys. Rev. Lett. **59**, 827 (1987).
6. L. V. Butov, Solid State Comm. **127**, 89 (2003).
7. L. V. Butov, J. Phys.: Condens. Matter **16**, R1577 (2004).
8. L. V. Butov, J. Phys.: Condens. Matter **19**, 295202 (2007).
9. А. В. Ларионов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **73**, 342 (2001).
10. А. В. Горбунов, В. Б. Тимофеев, Письма в ЖЭТФ **96**, 145 (2012).
11. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, Письма в ЖЭТФ **22**, 556 (1975).
12. A. A. High, A. K. Thomas, G. Grosso, M. Remeika, A. T. Hammack, A. D. Meyertholen, M. M. Fogler, L. V. Butov, M. Hanson, and A. C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **103**, 087403 (2009).
13. A. V. Chaplik and M. V. Krasheninnikov, Surface Science **98**, 533 (1980).
14. В. И. Пустовойт, УФН **97**, 257 (1969).
15. E. A. Cerda-Mendez, D. N. Krizhanovskii, M. Wouters, R. Bradley, K. Biermann, K. Guda, R. Hey, P. V. Santos, D. Sarkar, and M. S. Skolnick, Phys. Rev. Lett. **105**, 116402 (2010).
16. Е. П. Башкин, А. Э. Мейерович, УФН **130**, 279 (1980).
17. М. Ю. Каган, УФН **164**, 77 (1994).

18. S. Giorgini, Phys. Rev. A **57**, 2949 (1998).
19. S. Giorgini, Phys. Rev. A **61**, 063615 (2000).
20. A. Griffin, T. Nikuni, and E. Zaremba, *Bose-Condensed Gases at Finite Temperatures*, Cambridge University Press (2009).
21. M. Chung and A. Bhattacherjee, New J. Phys. **11**, 123012 (2009).
22. V. M. Kovalev and A.V. Chaplik, arXiv:1310.8394.
23. В. М. Ковалев, А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **92**, 208 (2010).
24. В. М. Ковалев, А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **96**, 865 (2012).
25. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика, Т. 7, Электродинамика сплошных сред*, Наука, М. (1982).
26. Ю. Е. Лозовик, М. В. Никитков, ЖЭТФ **111**, 1107 (1997).
27. Ю. Е. Лозовик, М. В. Никитков, ЖЭТФ **116**, 1440 (1999).
28. I. A. Shelykh, T. Taylor, and A. Kavokin, Phys. Rev. Lett. **105**, 140402 (2010).
29. F. P. Laussy, A. Kavokin, and I. A. Shelykh, Phys. Rev. Lett. **104**, 106402 (2010).
30. F. Stern, Phys. Rev. Lett. **18**, 546 (1967).
31. В. М. Ковалев, А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **94**, 601 (2011).
32. В. М. Ковалев, А. В. Чаплик, Письма в ЖЭТФ **98**, 371 (2013).
33. А. В. Чаплик, ЖЭТФ **60**, 1845 (1971).
34. Т. И. Могилюк, ЖЭТФ **140**, 835 (2011).
35. Е. В. Бакланов, А. В. Чаплик, ФТТ **7**, 2768 (1965).
36. Э. Г. Батыев, В. А. Борисюк, ЖЭТФ **80**, 262 (1981).
37. E. G. Batyev, Mod. Phys. Lett. B **22**, 1703 (2008).
38. Э. Г. Батыев, ЖЭТФ **141**, 151 (2012).
39. J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
40. P. Anderson, Phys. Rev. **112**, 1900 (1959).