

Динамика решеточного газа¹⁾

Л. Д. Сон²⁾

Уральский федеральный университет им. Ельцина, 620002 Екатеринбург, Россия

Поступила в редакцию 4 февраля 2014 г.

После переработки 8 апреля 2014 г.

Рассматривается стохастическая модель, в эргодическом варианте совпадающая с моделью Изинга. На динамику накладываются ограничения, учитывающие закон сохранения на микроскопическом уровне (модель решеточного газа). Получено управляющее уравнение на динамическую корреляционную функцию. Показано, что для исходного микродисперсного состояния кривая расслоения на диаграмме плотность – температура проходит ниже, чем предсказывает статистика Гиббса. Кроме того, возможно изменение не только положения, но и вида всей кривой: вместо куполообразной она приобретает форму раздвоенного горба.

DOI: 10.7868/S0370274X14120042

1. Введение. Модель решеточного газа и изоморфная ей модель Изинга эффективно используются для понимания физики конденсированных систем. Они адекватно описывают точку Кюри, переход жидкость–пар, расслоение в бинарных смесях. С точки зрения статистики эти модели совпадают: наборы возможных микроскопических состояний для них имеют однозначное соответствие. При этом энергии соответствующих состояний одинаковы. Однако динамическое поведение указанных моделей может существенно различаться, что мы и собираемся показать.

Традиционный способ описания динамики решеточных моделей заключается в следующем. Сначала для решеточных переменных $\{n(r)\}$ задается эффективный гамильтониан:

$$H\{n\} = -\frac{1}{2} \sum_{r,r'} n(r)J(r-r')n(r') - \sum_r \mu(r)n(r), \quad (1)$$

где $n(r) = \overline{0,1}$ (решеточный газ) или $n = \overline{-1,1}$ (модель Изинга). Основное отличие эффективного гамильтониана (1) от настоящего заключается в том, что он служит лишь для вычисления веса в статистике Гиббса, но не определяет динамического поведения системы. При выполнении эргодической гипотезы статистика и термодинамика описываются че-

рез статистическую сумму Z и термодинамический потенциал G :

$$Z = \sum_{\{n\}} \exp \left[-\frac{H\{n\}}{T} \right], \quad G = -T \ln Z. \quad (2)$$

Для вычисления статсуммы обычно используется переход к вспомогательному решеточному полю $x(r)$ (преобразование Хаббарда–Стратоновича):

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{n\}} \int Dx \exp [F\{n, x\}], \\ F &= -\frac{T}{2} \sum_{r,r'} x(r)J^{-1}(r-r')x(r') + \\ &+ \sum_r n(r)[x(r) + \mu(r)]. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом член, содержащий переменные $n(r)$, становится локальным и суммирование по ним можно выполнить:

$$\begin{aligned} Z &= \int Dx \exp [F\{x\}], \\ F\{x\} &= -\frac{T}{2} \sum_{r,r'} x(r)J^{-1}(r-r')x(r') + \\ &+ \sum_r \ln \sum_{n(r)} \exp \{n(r)[x(r) + \mu(r)]\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вспомогательное же поле x является произвольным и не имеет ограничений, накладываемых на числа $n(r)$. Поэтому можно пользоваться стандартной схемой анализа функциональных интегралов. Сначала находится наивероятная конфигурацию

$$\frac{\delta F}{\delta x(r)} = 0 \Rightarrow x_0(r), \quad (5)$$

¹⁾См. доп. материалы к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru. том 99, вып. 12.

²⁾e-mail: ldson@yandex.ru

что соответствует приближению среднего поля (в континуальном пределе этот первый шаг дает теорию Ландау). Затем изучаются флуктуации вблизи x_0 , и т.д. Динамика модели обычно описывается в рамках феноменологического подхода:

$$\frac{\partial x(r)}{\partial t} = \sum_{r'} \Gamma(r, r') \frac{\delta F}{\delta x(r')}, \quad (6)$$

где Γ – матрица феноменологических кинетических коэффициентов. При этом нет разницы между решеточным газом и моделью Изинга. Все дело лишь в величине Γ .

Между тем принципиальная разница между решеточным газом и моделью Изинга заключается именно в динамике. Поскольку переменные в модели Изинга соответствуют двум возможным направлениям спинов на решетке, за время, достаточное для переворота одного спина, любая конфигурация может превратиться в любую другую. Вероятность такого превращения определяется статистикой Гиббса и гамильтонианом (1). Переменные решеточного газа принято связывать с числами заполнения узлов пространственной решетки определенного вида частицами. Последние не могут телепортироваться, а движутся “обычным образом”. Для решеточной модели это означает, что они способны перескакивать с места на место и существует время, за которое частица может переместиться не дальше чем на соседний узел (это время мы примем за единицу). По сравнению с моделью Изинга это существенное ограничение, которое естественно назвать микроскопическим законом сохранения (МЗС). Известно, что накладываемые на систему ограничения способны существенно влиять на термодинамику системы. В частности, стекольные состояния могут проявляться как термодинамически равновесные [1, 2]. Целью настоящей работы является исследование такого влияния в случае МЗС.

Управляющее уравнение. Гамильтониан типа (1) – эффективный. Он не может служить для вывода динамических уравнений. Единственный способ описания – стохастический. Нужно задавать конфигурации системы и статистический вес перехода между ними в единицу времени. Для получения же динамических уравнений необходимо проводить усреднение (различных величин) по реализациям случайного процесса смены конфигураций.

Модель решеточного газа подразумевает наличие пространственной решетки, узлы r которой могут быть заняты частицами двух типов: А (для определенности назовем их частицами черного цвета) и В (частицы белого цвета). Конфигурация $n\{r\}$ задает-

ся с помощью чисел заполнения: $n(r) = 1$ соответствует частице А на узле r , $n(r) = 0$ – частице В. Энергия конфигурации

$$H\{n(r)\} = -\frac{1}{2} \sum_{r, r'} n(r) J(r, r') n(r') - \sum_r \mu n(r), \quad (7)$$

где первое суммирование осуществляется по всем парам несовпадающих узлов, а второе – по всем узлам решетки. Динамика модели ограничивается МЗС, т.е. за единицу времени частица может переместиться не далее чем до ближайшего узла. Наша задача состоит в получении управляющего уравнения для средних, характеризующих систему.

Начнем с определения статистического веса перехода из конфигурации $\{n_1(r)\}$ в конфигурацию $\{n_2(r)\}$ за единицу времени. Будем изображать прыжки черных частиц черными стрелками, а прыжки белых – белыми. Рассмотрим разницу

$$s(r) = n_2(r) - n_1(r). \quad (8)$$

Эта величина может принимать значения $-1, 0, +1$. В первом случае узел r служит началом для линии, составленной из черных стрелок, и концом для линии из белых стрелок (из узла ушла черная частица, а на ее место пришла белая). В третьем случае дело обстоит с точностью до наоборот (ушла белая частица, а пришла черная). Во втором случае линия на узле оборваться не может. Черные линии могут проходить только по таким узлам, где $n_1(r) = 1$, а белые – по таким, где $n_1(r) = 0$. Рассмотрим сумму по всевозможным конфигурациям этих линий. Подчеркнем, что среди них есть такие, которые не имеют начала и конца, т.е. одноцветные замкнутые петли, а также то, что запрещены пересечения и самопересечения. Каждой черной стрелке сопоставим множитель D_b , а белой – D_w (вероятности прыжков соответствующих частиц). Такая сумма представляет собой статистический вес $\mathbf{C}[\{n_1(r)\} \rightarrow \{n_2(r)\}, t = 1]$ перехода из одной конфигурации в другую за единицу времени.

Для подобных сумм по линиям хорошо развиты методы их представления в виде функциональных интегралов по вспомогательным скалярным решеточным полям (см., например, [3–5]). Напомним, что для системы, находящейся в термостате, кроме конфигурационного веса \mathbf{C} , существует еще гиббсовский фактор:

$$E[\{n_1\} \rightarrow \{n_2\}] = \exp\left(\frac{H\{n_1\} - H\{n_2\}}{T}\right). \quad (9)$$

Рассмотрим динамический процесс, задаваемый переменными $\{n(r, t)\}$ на 4-мерной пространственно-

временной решетке. Для правильного учета статистического веса нам потребуются следующие решеточные поля:

$$1) n(r, t) = \begin{cases} 1, & \text{черная частица в точке } (r, t); \\ 0, & \text{белая;} \end{cases}$$

2) $b(r, t)$ – вспомогательное поле для черных линий;

3) $w(r, t)$ – вспомогательное поле для белых линий.

Поля 2 и 3 – комплексные гауссовы дельта – коррелированные поля, которые генерируют суммы по соответствующим линиям посредством спаривания по теореме Вика.

Кроме того, нам потребуются комбинации:

4) $s(r, t) = n(r, t+1) - n(r, t)$. Эта величина равна +1, если в момент t на узле r черная частица уступает место белой, -1 – в противоположном случае, 0 – если частица на узле r в момент t остается на своем месте;

5) удобно использовать комбинации $s_b^+ = s_w^- = \frac{1}{2}(s^2 - s)$; $s_b^- = s_w^+ = \frac{1}{2}(s^2 + s)$ – источники и стоки для вспомогательных полей.

Рассмотрим функциональный интеграл

$$\begin{aligned} \Omega \{n(r, t)\} &= \exp \left[\frac{H \{n_1(r)\} - H \{n_2(r)\}}{T} \right] \times \\ &\times \int \prod_{r,t} (1 + s_b^- b) (1 + s_w^- w) \times \\ &\times \left\{ 1 + [s_b^+ + (n - s_b^+)b] \sum_d D_b(r, d) b^*(d) \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + [s_w^+ + (1 - n - s_w^+)w] \sum_d D_w(r, d) w^*(d) \right\} \times \\ &\times dw(r, t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} w w^* \right\} db(r, t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} b b^* \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

где n_1, n_2 – начальная и конечная конфигурации. Анализ, основанный на раскрытии скобок и применении теоремы Вика, показывает, что этот интеграл в точности дает статистический вес для процесса $\{n(r, t)\}$. В (10) суммирование по d означает суммирование по ближайшим соседям узла r , а $D_{w,b}(r, r')$ – вероятность для белой или черной (в соответствии с нижним индексом) частицы переместиться из r в r' за единицу времени. Последняя отлична от нуля только для ближайших соседей:

$$\begin{aligned} D_{b,w}(r, r') &= \\ &= \begin{cases} D_{b,w}, & \text{если } r, r' \text{ – ближайшие соседи;} \\ 0, & \text{если нет.} \end{cases} \quad (11) \end{aligned}$$

Для произвольных r, r', t вероятность $D_{b,w}(r, r', t)$ есть динамическая корреляционная функция. Мы получим для нее управляющее уравнение (*master equation*), т.е. способ вычисления $D_{b,w}(r, r', t+1)$, если известна $D_{b,w}(r, r', t)$. Мы сделаем это для квазибинарной системы, которая состоит из частиц одного сорта, но при этом частицы могут формировать два различных типа локального порядка, отличающихся по плотности ($\rho_A > \rho_B$). К квазибинарным системам можно отнести вещество вблизи критической точки жидкость–газ. Особый интерес представляют компьютерные модели [6, 7], которые также являются квазибинарными. В такой системе нет ограничений на “пространственные перемещения” локальных кластеров с меньшей плотностью. Они могут возникать в любой точке в “толще” обширной области с высокой плотностью. Для этого высокоплотная материя должна “потесниться” вдоль некоторой линии, соединяющей данную точку с поверхностью области. Тогда в (10) можно положить $w = 0$ и не интегрировать по этому полю. Нижний индекс “ w ” теперь отсутствует и поэтому мы положим $D_b = D$. Соответствующий подробный вывод приведен в [8]. Он основан на рассмотрении трех моментов времени: $0, t, t+1$. Для процесса $\{n(r, 0)\} \rightarrow \{n(r, t)\} \rightarrow \{n(r, t+1)\}$ записывается функциональный интеграл (10), причем на первом временном шаге, $0 \rightarrow t$, все узлы рассматриваются как ближайшие соседи, а вместо коэффициента диффузии D используется динамический коррелятор $D(r, r', t)$. Вычисление и усреднение этого интеграла по конфигурациям $\{n(r, 0)\}, \{n(r, t)\}, \{n(r, t+1)\}$ дает возможность выразить $D(r, r', t+1)$ через $D(r, r', t)$. В результате имеем

$$\begin{aligned} D(r, r', t+1) &= \\ &= N \sum_{r''} \left\langle \left(\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha} \right)_r \left(\frac{e^\alpha}{(1+e^\alpha)^2} \right)_{r''} \right\rangle \times \\ &\times D(r, r'', t) D(r'', r') \left(\frac{1}{1+e^\beta} \right)_{r''} \left(\frac{e^\beta}{1+e^\beta} \right)_{r'}. \quad (12) \end{aligned}$$

Перечислим все входящие в (12) величины:

1) через $D(r', r'')$ обозначен коэффициент диффузии, определяемый в (11);

2) N – множитель, задаваемый нормировкой

$$\sum_{r'} D(r, r', t) = 1; \quad (13)$$

3) решеточное поле $\beta(r) = x_3(r) + \mu_3(r)$ определяется решением уравнения

$$T \sum_{r'} J^{-1}(r-r') x_3(r') = \left(\frac{e^\beta}{1+e^\beta} \right)_r - \frac{1}{128} K(r,t) \left[\frac{e^\beta}{(1+e^\beta)^2} \right]_r \sum_{r'} D(r,r') \left(\frac{e^\beta}{1+e^\beta} \right)_{r'} + \frac{1}{128} \left[\frac{e^\beta}{(1+e^\beta)^2} \right]_r \sum_{r'} D(r,r') K(r',t) \left(\frac{1}{1+e^\beta} \right)_{r'} ; \quad (14)$$

4) входящая в (14) величина $K(r,t)$ есть

$$K = \sum_{r'} D(r,r',t) \left\langle \left(\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha} \right)_r \left(\frac{e^\alpha}{(1+e^\alpha)^2} \right)_{r'} \right\rangle, \quad (15)$$

где

$$\alpha(r) = ix_1(r) + \mu_1(r), \quad (16)$$

а угловые скобки обозначают усреднение с гауссовым весом:

$$\langle \dots \rangle = \int \dots D x_1 \exp \left[-\frac{T}{2} \sum_{r,r'} x_1(r) J^{-1}(r,r') x_1(r') \right]. \quad (17)$$

Равенства (12)–(17) формируют управляющее уравнение для квазибинарной системы. При этом химпотенциалы μ_1, μ_3 служат для спецификации начальных и конечных конфигураций. Интегрирование в (17) соответствует усреднению по начальным конфигурациям.

3. Среднеполевая фазовая диаграмма. Первый шаг при анализе системы уравнений (12)–(17) – поиск стационарных решений, которые определяют равновесные состояния. Рассмотрим большой пространственный масштаб, на котором поля $K(r), x_3(r)$ можно рассматривать как однородные (приближение среднего поля). В этом случае уравнение (14) выглядит следующим образом:

$$\frac{T}{J} x_3 = \frac{e^\beta}{1+e^\beta} + C \frac{e^\beta(1-e^\beta)}{(1+e^\beta)^3}, \quad (18)$$

где

$$J = \sum_{r'} J(r-r'); \quad C = \frac{K}{128} \sum_{r' \neq r} D(r,r'). \quad (19)$$

Если из (18) убрать последний член, то получится хорошо известное (см., например, [9]) уравнение (модели решеточного газа без динамических ограничений) на среднюю концентрацию:

$$\frac{T}{J} x = \frac{\exp(x+\mu)}{1+\exp(x+\mu)}. \quad (20)$$

Оно предсказывает фазовую диаграмму в переменных концентрация–температура в виде купола рас-

слоения с критической точкой на макушке. Критическая температура составляет

$$T_c = \frac{J}{4}. \quad (21)$$

Купол расслоения схематически показан сплошной линией на рис. 1. Последний член в (18) дает по-

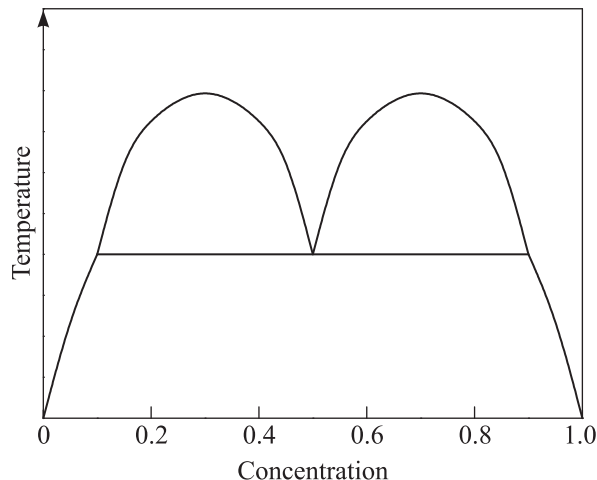


Рис. 1. Купол расслоения при $C < 1/2$

правку, связанную с ограничениями, накладываемыми МЗС. Для небольшой величины $C < 1/2$ в (19) эта поправка приводит к эффективному понижению купола (штриховая кривая). Понижение эффективной критической температуры составляет

$$\Delta T = T_c \frac{C}{2}. \quad (22)$$

Отметим, что понижение купола имеет место, когда величина K из (15) не равна нулю. Поскольку $D(r,r',t)$ представляет собой нормированное распределение (13), даже при его размытии величина K будет оставаться неизменной, если есть однородное отличное от нуля среднее

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha} \right)_r \left(\frac{e^\alpha}{(1+e^\alpha)^2} \right)_{r'} \right\rangle = \\ & = \int D x_1 \left(\frac{e^\alpha}{1+e^\alpha} \right)_r \left(\frac{e^\alpha}{(1+e^\alpha)^2} \right)_{r'} \times \\ & \times \exp \left[-\frac{T}{2} \sum_{r,r'} x_1(r) J^{-1}(r-r') x_1(r') \right]. \quad (23) \end{aligned}$$

Напомним, что $\alpha(r) = ix_1(r) + \mu_1(r)$, так что (23) отличается от нуля в тех пространственных точках, где $\mu_1(r) \approx 0$. Такие места соответствуют границам между областями с $n \simeq 0$ и $\simeq 1$ в начальном

распределении частиц. Большая плотность указанных границ отвечает микронеоднородному начальному состоянию. Уравнение (18) дает возможность для дальнейшего макрорасслоения, только если система находится ниже штриховой кривой на рис. 1.

Уравнение (18) можно получить из (20) менее строго, но более наглядно, если воспользоваться следующими соображениями. Пусть произошло охлаждение чуть ниже сплошной кривой на рис. 1. Тогда в соответствии с (20) в системе должно начаться расслоение. На его начальной стадии образуется микрогетерогенное состояние с некоторой плотностью границ. Дальнейшее расслоение по-прежнему описывается уравнением (20) с той разницей, что теперь оно перестает быть однородным: появляются долгоживущие флуктуации плотности, соответствующие этой микрогетерогенности. Такие флуктуации можно описывать с помощью соответствующих пространственных флуктуаций химического потенциала μ :

$$\mu(r) = \mu + \Delta\mu(r). \quad (24)$$

Разложим правую часть уравнения (20) в ряд по $\Delta\mu(r)$ до второго порядка:

$$\frac{T}{J}x = F(x, \mu) + \frac{\partial F}{\partial \mu} \Delta\mu(r) + \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} [\Delta\mu(r)]^2, \quad (25)$$

где

$$F(x, \mu) = \frac{\exp(x + \mu)}{1 + \exp(x + \mu)}. \quad (26)$$

Ниже сплошной кривой на рис. 1 флуктуации $\Delta\mu(r)$ являются долгоживущими, так что на больших масштабах можно усреднить по ним уравнение (25). При этом среднее значение $\langle \Delta\mu(r) \rangle = 0$ в силу выполнения микроскопического закона сохранения. Обозначив $C = 1/2 \langle [\Delta\mu(r)]^2 \rangle$, приходим к уравнению (18).

Новым и неожиданным результатом является бифуркация кривой расслоения: при $C > 1/2$ она принимает вид, показанный на рис. 2. При этом купол несмешиваемости симметрично раздваивается и в системе появляется тройная точка. Температуры новых вершин T_{\max} и тройной точки T_3 легко получить, анализируя графическое решение (18):

$$T_3 = J \frac{E_1 - E_2}{\ln E_1 - \ln E_2}, \quad (27)$$

$$T_{\max} = J \left[\frac{E_{1,2}}{(1 + E_{1,2})^2} + C \frac{E_{1,2} - 4E_{1,2}^2 + E_{1,2}^3}{(1 + E_{1,2})^4} \right], \quad (28)$$

где

$$E_{1,2} = \frac{5C - 1}{C + 1} \pm \sqrt{\left(\frac{5C - 1}{C + 1} \right)^2 - 1}. \quad (29)$$

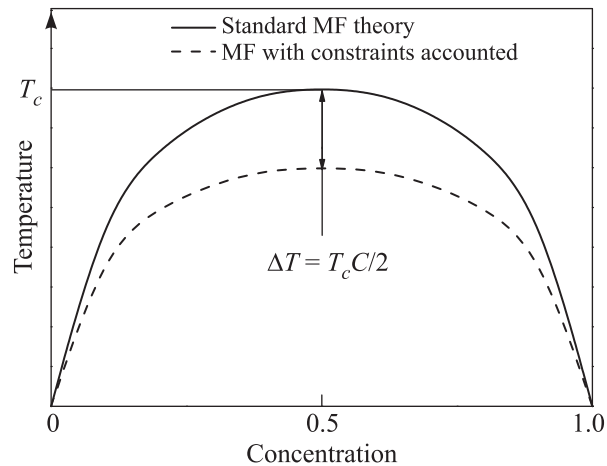


Рис. 2. Вид купола расслоения при $C > 1/2$

Здесь знак “плюс” соответствует нижнему индексу 1, “минус” – индексу “2”. Подстановка в выражение (28) любой из величин (29) приводит к одному и тому же результату. Выше T_{\max} уравнение (18) при изменении μ_3 имеет одно решение, между T_{\max} и T_3 – три устойчивых решения, разделенных двумя неустойчивыми, а ниже T_3 – два устойчивых, разделенных одним неустойчивым.

4. Заключение. Наше исследование говорит о том, что равновесное поведение моделей Изинга и решеточного газа может существенно различаться из-за МЗС. Возможны два различных сценария.

Первый сценарий заключается в следующем. Если ниже сплошной кривой на рис. 1 (напомним, что это кривая расслоения в модели Изинга) приготовить систему в микрогетерогенном состоянии с небольшой, но конечной плотностью границ, то согласно (18) релаксация к глобально гетерогенному состоянию станет возможной только при охлаждении ниже штриховой кривой. Таким образом, в области между сплошной и пунктирной кривыми на рис. 1 равновесные состояния модели Изинга и решеточного газа различны (за ее пределами они совпадают, причем размер данной области зависит от начальной плотности границ): для модели Изинга равновесным является глобально гетерогенное двухфазное состояние, тогда как для решеточного газа исходная микрогетерогенность сохраняется. В качестве экспериментального подтверждения укажем, что одним из наиболее расхожих примеров применения модели решеточного газа является теория расслоения жидкость–пар. В этом случае рассматриваемое микрогетерогенное состояние представляет собой туман, который, как известно, действительно устойчив. Подтверждением данной теории могут также слу-

жить акустические исследования купола несмешиваемости в жидкой системе галлий–свинец [10], в которой наблюдается устойчивая микрогетерогенность в соответствии с рис. 1. В рамках рассмотренного первого сценария экспериментально отличить решеточный газ от модели Изинга с несколько меньшим параметром J можно только при микроскопическом исследовании. На макроуровне можно указать на различие в форме купола, который для решеточного газа имеет гораздо более плоскую вершину. Заметим, что уплощенная форма купола характерна для многих конденсированных двойных систем с несмешиваемостью компонентов [11].

В рамках второго сценария основным результатом является бифуркация – раздвоение купола расслоения с ростом плотности границ. При этом меняется структура решений уравнения (18) и в системе появляется тройная точка (см. рис. 2). Подобные тройные точки характерны для многих двойных систем. Это точки эвтектического или монотектического равновесия. Наша теория говорит о том, что образование таких точек и раздвоение купола являются собственным свойством регулярного раствора с динамикой, ограниченной МЗС, без обязательного кристаллического упорядочения в “чистых” компонентах. Модель решеточного газа (и ее среднеполевой вариант – модель регулярного раствора) широко используется в качестве базовой феноменологической модели при описании фазовых диаграмм [12]. При этом предполагается, что расслоение соответствует рис. 1. Наше исследование говорит о том, что в зависимости от дисперсности системы купол расслоения может иметь совершенно другую форму (как на рис. 2). Возможность практической реализации этого сценария, на наш взгляд, заслуживает тщательного экспериментального изучения: в материаловедении дисперсность системы часто рассматривается фактически не как неравновесный, а как термодинамический параметр (по нашему мнению, это говорит об актуальности проводимых нами исследований). Бифуркация в базовой модели при изменении этого параметра, несомненно, важна. На эвристическом уровне подтверждением нашей теории может служить ядерный распад, для которого купол расслоения действительно имеет два горба.

Рассмотренные сценарии отвечают неэргодическому поведению системы, при котором начальное микрогетерогенное состояние сохраняется неограниченно долго. Таким образом, релаксационная динамика должна соответствовать некоторому стекольному поведению [13], что подтверждается при изучении компьютерных жидкостей [6, 7]. Исследованные нами стационарные решения не позволяют судить о конкретном законе релаксации. Вместе с тем развиваемый формализм (12)–(17) в принципе дает такую возможность, что будет являться предметом дальнейших исследований.

Автор выражает благодарность Г. Русакову и Р. Рыльцеву за проявленное внимание и полезное обсуждение. Работа поддержана РФФИ (проект # 14-12-01185).

-
1. R. G. Palmer, D. L. Stein, E. Abrahams, and P. W. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **35**(10), 958 (1984).
 2. F. Ritort and P. Sollich, arXiv:cond-mat/0210382 v2.
 3. С. П. Обухов, *ЖЭТФ* **83**(11), 1978 (1982).
 4. Е. С. Никомаров, С. П. Обухов, *ЖЭТФ* **80**, 651 (1980).
 5. Р. Е. Рыльцев, Л. Д. Сон, *ЖЭТФ* **137**(3), 572 (2010).
 6. R. E. Ryltsev, N. M. Chtchelkatchev, and V. N. Ryzhov, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 025701 (2013).
 7. A. Z. Patashinski, M. A. Ratner, B. A. Grzybowski, R. Orlik, and A. C. Mitus, *J. Phys. Chem. Lett.* **3**(17), 2431 (2012).
 8. См. дополнительный материал по адресу www.jetpletters.ac.ru. том 99, вып.12.
 9. L. Son, G. Rusakov, A. Z. Patashinski, and M. A. Ratner, *Physica A* **248**(3–4), (1998).
 10. V. Filippov and P. Popel, *J. Non-Cryst. Solids.* **235**(32–40), 3269 (2007).
 11. *Диаграммы состояния двойных металлических систем. Справочник.* Т. 1. Машиностроение, М. (1996), 992 с.; Т. 2. Машиностроение, М. (1997), 1024 с.
 12. A. D. Pelton, M. Blander, M. I. Clavaguera-Mora, M. Hoch, L. Hoglund, H. L. Lucas, and P. Spencer, *Calphad.* **21**(2), 155 (1997).
 13. W. Götze, *Complex Dynamics of Glass Forming Liquids. A mode-coupling theory*, Oxford University Press., Oxford (2009).