

Нелинейное циклотронное ускорение безмассовых дираковских носителей заряда в графене и топологических изоляторах

М. Д. Токман¹⁾, М. А. Ерухимова, А. Белянин⁺²⁾

Институт прикладной физики РАН, 603155 Н.Новгород, Россия

⁺Texas A&M University, TX 77843 College Station, USA

Поступила в редакцию 10 июня 2014 г.

После переработки 14 августа 2014 г.

Исследовано двумерное движение квазичастиц с дираковским законом дисперсии во внешнем магнитном поле в присутствии высокочастотного электрического поля. Показано, что известные для классических заряженных частиц механизмы ускорения в режиме фазового захвата (авторезонанса) могут быть реализованы и для безмассовых дираковских носителей заряда. При этом на функции распределения электронов по энергиям формируется “разрыв”, величина которого управляется магнитным полем.

DOI: 10.7868/S0370274X14180088

Введение. В последние годы проявляется значительный интерес к исследованиям нелинейно-оптических свойств сред с безмассовыми дираковскими носителями заряда [1–6]. В частности, для графена и поверхностных состояний топологических изоляторов типа Bi_2Se_3 теория предсказывает уникально высокие нелинейные восприимчивости в среднем инфракрасном и более длинноволновых диапазонах как для квадратичной [7, 8], так и для кубической [9–11] нелинейности.

Отдельный интерес представляет циклотронный резонанс высокочастотного (ВЧ) поля с дираковскими носителями заряда. Соответствующая нелинейная теория для малых возмущений импульсов квазиклассических частиц была рассмотрена в [12]. В этом приближении задача сводится к стандартной для резонансных процессов модели нелинейного маятника [13]. В нашей работе рассматривается циклотронное ускорение дираковских частиц с положительной энергией в случае произвольных возмущений импульса. Мы показали, что динамика нелинейного циклотронного взаимодействия ВЧ-поля с дираковскими частицами заметно отличается от хорошо изученного в физике плазмы циклотронного ускорения массивных релятивистских электронов в режиме резонансного “захвата” (см. [14–18]). Во-первых, сам по себе эффект “захвата” безмассовых частиц с малыми начальными импульсами весьма специфичен. Классическая циклотронная частота таких частиц в начальный момент времени стремится к бесконеч-

ности. Однако за конечное время происходит ускорение частиц до энергий, соответствующих циклотронной частоте, близкой к частоте ВЧ-поля. Кроме того, нелинейное циклотронное взаимодействие ВЧ-поля с безмассовыми частицами не сопровождается эффектом релятивистской бистабильности [14–20]. (Эффект бистабильности связан с существованием у соответствующей динамической системы нескольких (в простейшем случае трех) состояний равновесия, два из которых (устойчивое и неустойчивое) могут “аннигилировать” при плавном изменении параметров. Простейший пример – вынужденные колебания ангармонического осциллятора под действием монохроматической внешней силы [21]; см. также [22–30].) С другой стороны, ускорение “захваченных” частиц в режиме авторезонанса (автофазировки) [14, 15, 17, 18] может происходить почти так же, как и в случае массивных частиц. При этом формируется энергетический спектр электронов с “разрывом”, величина которого управляется магнитным полем. Такие распределения могут оказаться полезными как в задачах исследования свойств графена и топологических изоляторов, так и в задачах создания новых источников терагерцового и инфракрасного диапазонов [31].

Отметим, что подробное исследование динамики функции распределения частиц в ВЧ-поле требует, вообще говоря, решения кинетического уравнения. Соответствующее решение, однако, может быть получено в явном виде лишь в некоторых частных случаях, когда квазиклассические траектории частиц являются достаточно простыми (см., например, [6]). В более сложных случаях приходится (как, на-

¹⁾e-mail: tokman@appl.sci-nnov.ru

²⁾A. Belyanin

пример, в [12]) ограничиваться исследованием траекторий. Для начального распределения частиц, сконцентрированного на ограниченном участке фазовой плоскости, изучение фазовых траекторий позволяет определить некоторые важные (хотя и достаточно грубые) характеристики итогового распределения по энергиям (см., например, [16–18]). Мы используем такой подход для исследования процесса нелинейного циклотронного ускорения, приводящего к формированию вышеупомянутого “разрыва” на распределении электронов по энергиям.

1. Канонические уравнения. Рассмотрим вращающееся ВЧ электрическое поле с медленно меняющейся амплитудой, ориентированное поперек однородного магнитного поля:

$$\mathbf{B} = z_0 B, \quad \mathbf{E} = x_0 E_x + y_0 E_y;$$

$$E_x = E(t) \cos \left[\int_{-\infty}^t \omega(t') dt' \right],$$

$$E_y = -E(t) \sin \left[\int_{-\infty}^t \omega(t') dt' \right].$$

Пусть в плоскости, ортогональной магнитному полю, расположен монослой, в котором квазичастицы имеют следующий закон дисперсии:

$$W_{\pm} = \pm v_F \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad (1)$$

где константу v_F принято называть скоростью Ферми.

Следуя [12], рассмотрим динамику частиц над уровнем Ферми в пределах одной зоны, используя уравнение для двумерных классических траекторий квазичастиц с положительной энергией:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\nabla_p W_+}{c} \times \mathbf{B} \right). \quad (2)$$

В [12] были исследованы траектории для стационарных полей, когда $E = \text{const}$, $\omega = \text{const}$, $B = \text{const}$. Нашей целью являются соотношения, справедливые для зависящих от времени величин $E(t)$, $\omega(t)$ и $B(t)$. Как и для массивных релятивистских частиц (см., например, [18]), в отсутствие ВЧ-поля действие $\mu = \frac{p^2}{2B(t)}$ является адиабатическим инвариантом (здесь $p^2 = p_x^2 + p_y^2$). Поэтому удобно перейти от (2) к гамильтоновой системе для канонических переменных действие угол $(\mu - \varphi)$:

$$p_x = \sqrt{2B\mu} \cos \left[\varphi + \int_{-\infty}^t \omega(t') dt' \right],$$

$$p_y = -\sqrt{2B\mu} \sin \left[\varphi + \int_{-\infty}^t \omega(t') dt' \right].$$

Соответствующие гамильтоновы уравнения удобно сформулировать для безразмерных величин. При этом частоту и амплитуду ВЧ-поля мы нормируем на характерные величины ω_0 и E_0 , а магнитное поле – на величину $B_0 = \frac{cE_0}{v_F}$. Используя безразмерную независимую переменную $\tau = \omega_0 t$ и безразмерное действие:

$$I = \mu \frac{\omega_0^2 B_0}{e^2 E_0^2} = \frac{p^2}{2B} \frac{c\omega_0^2}{e^2 E_0 v_F}, \quad (3a)$$

переходим от (2) к гамильтоновой системе:

$$\dot{I} = -H'_\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{b}} \sqrt{2I} \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = H'_I = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{b}} \cos \varphi + \sqrt{b} \right) \frac{1}{\sqrt{2I}} - \nu, \quad (3b)$$

где

$$H = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{b}} \cos \varphi + \sqrt{b} \right) \sqrt{2I} - \nu I \quad (4a)$$

есть гамильтониан, а

$$\alpha = \frac{E(\tau)}{E_0}, \quad b = \frac{B(\tau)}{B_0}, \quad \nu = \frac{\omega(\tau)}{\omega_0} \quad (4b)$$

представляют собой параметры, которые в общем случае являются адиабатически медленно изменяющимися величинами.

В целом система (3b), (4a) представляет собой один из вариантов так называемой второй универсальной модели нелинейного резонанса [22, 23, 30]. На фазовом цилиндре $I \in [0, \infty]$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$ этой системе соответствует фазовый портрет, показанный на рис. 1.

1. Случай $\frac{\alpha}{b} = \frac{cE}{v_F B} < 1$ (рис. 1b и c). Существуют состояния равновесия O -типа (центр) и X -типа (седла):

$$\varphi_O = 0, \quad \sqrt{2I_O} = \frac{b + \alpha}{\nu \sqrt{b}}, \quad \varphi_X^{(1,2)} = \pm \pi, \quad \sqrt{2I_X} = \frac{b - \alpha}{\nu \sqrt{b}}.$$

2. Случай $\frac{\alpha}{b} = \frac{cE}{v_F B} = 1$. Точка бифуркации: “седла” опускаются на ось $I = 0$, трансформируясь в особые точки Y -типа (так называемые треноги; см., например, [32–34, 30]).

3. Случай $\frac{\alpha}{b} = \frac{cE}{v_F B} > 1$ (рис. 1a). Здесь Y -точки на оси $I = 0$ сближаются: $\varphi_Y^{(1,2)} = \pm \arccos(-b/\alpha)$. В области параметров $a \gg b$ имеем $\varphi_Y^{(1,2)} \rightarrow \pm \pi/2$,

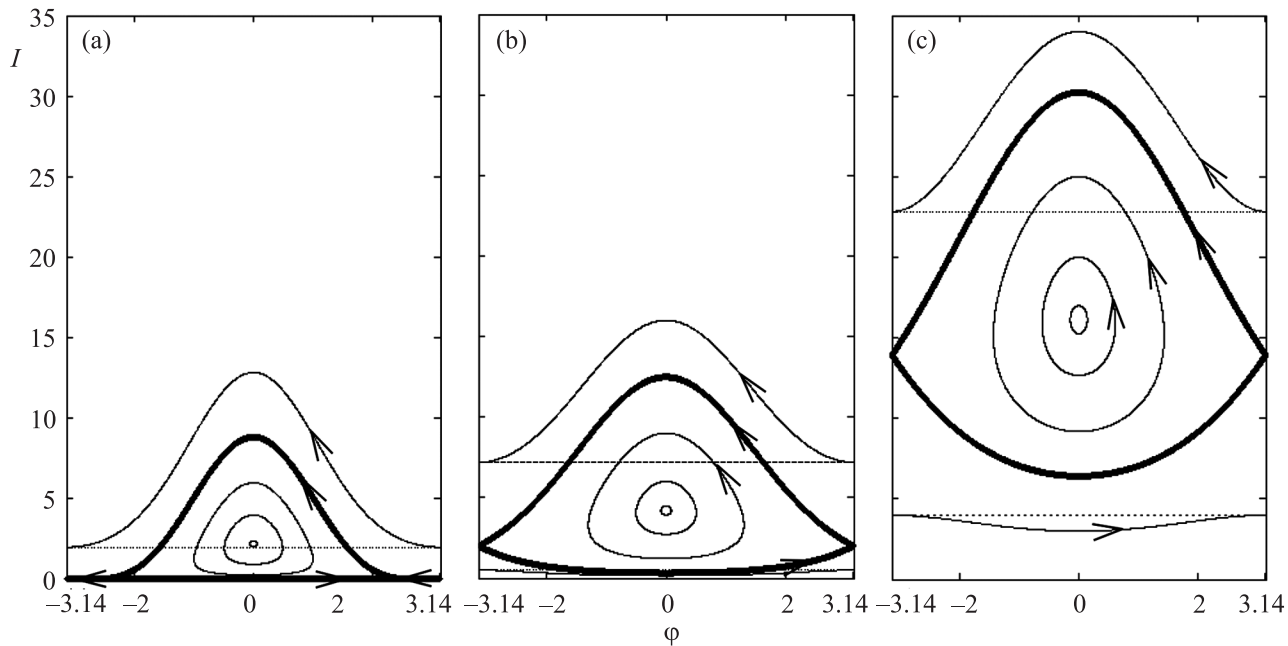


Рис. 1. Фазовый портрет, соответствующий системе уравнений (3b) для параметров: $\nu = 1$, $\alpha = 1.1$ и значений магнитного поля $b = 1$ (a), 6 (b), 30 (c)

$\sqrt{2I_0} \approx \frac{\alpha}{\nu\sqrt{b}}$. В этом случае O -точка соответствует

вращению с “осцилляторным” импульсом $\tilde{p} = \frac{eE}{\omega}$.

Важно отметить, что особые точки Y -типа на оси $I = 0$ не являются состояниями равновесия: изображающая точка, движущаяся вдоль оси $I = 0$, мгновенно “входит” в особую точку на этой оси, а затем “выходит” из нее в область $I > 0$ с конечной скоростью. В данном случае такой характер движения изображающей точки обусловлен особенностью отображения динамики системы на фазовом цилиндре (см. также [17, 30]).

При условии $\alpha \ll b$ в области “резонансных” значений действия $|I - I_{0,x}| \ll I_{0,x}$ динамическая система (3b), (4a) соответствует стандартному нелинейному маятнику [13], задаваемому гамильтонианом

$$\tilde{H}(\varphi, \delta I) \approx \left(\cos \varphi - \frac{\delta I^2}{\delta I_{\text{TR}}^2} \right), \quad (5a)$$

где $\delta I = I - \frac{b}{2\nu^2}$, $\delta I_{\text{TR}} = \sqrt{2\alpha b}/\nu^2$. Гамильтониану (5a) отвечает характерный размер области, охватываемой сепаратрисой $\approx \delta I_{\text{TR}}$. Характерная частота осцилляций фазы захваченных частиц определяется величиной ω_{TR} :

$$\omega_{\text{TR}}^2 = \frac{2\alpha^2}{\nu^2 \delta I_{\text{TR}}^2} = \nu^2 \frac{\alpha}{b}. \quad (5b)$$

2. Режим авторезонанса (фазового захвата).

Сформулировав гамильтоново описание, легко перенести подробно исследованные в физике плазмы и нелинейной оптике эффекты захвата и авторезонанса на рассматриваемый случай. Динамика таких гамильтоновых систем определяется следующими моментами (см. [14, 15, 17, 18, 28, 30]):

а) при наличии ВЧ-поля адиабатическим инвариантом является площадь под фазовой кривой: $J = \int_{-\pi}^{\pi} I d\varphi$ или $J = \oint I d\varphi$ в зависимости от типа фазовой траектории;

б) величина J сохраняется до тех пор, пока фазовая траектория не попадает в малую окрестность сепаратрисы, где нарушается адиабатическое приближение. (Характерная ширина “неадиабатического пояса” траекторий вблизи сепаратрисы экспоненциально мала и определяется малым параметром адиабатичности $\varepsilon \approx \max[b/b, \dot{\alpha}/\alpha, \dot{\nu}/\nu]$.) Далее происходит переход через сепаратрису, которому соответствует скачкообразное изменение адиабатического инварианта J . Для равномерного распределения частиц по фазам движения вдоль фазовых траекторий можно ввести понятие вероятности перехода через сепаратрису в ту или иную область фазового пространства (более подробно см., например, [17] и указанную там литературу).

Следуя вышеуказанным работам, рассмотрим систему (3b). Предположим, что начальное значение действия определяется малой, но конечной величиной

ной $0 < I_{in} \ll 1$, а частота ВЧ-поля постоянна ($\nu = 1$). Пусть в начальный момент времени ВЧ-поле отсутствует ($\alpha(0) = 0$), а магнитное поле соответствует величине $b(0) = b_0 = 1$. Далее происходит “включение” ВЧ-поля. При стремлении амплитуды поля к бифуркационному значению $\alpha = 1$ частица “захватывается”, т.е. переходит на траекторию, охватывающую O -точку (см. рис. 1а). Из приведенных выше соотношений следует выражение для характерной величины действия захваченных квазичастиц при “бифуркационном” значении магнитного поля, $B_0 = cE/v_F$, $I_{TR} \approx 2$. Отсюда при учете нормировки (3а) и выражения для энергии $W = v_F p$ следует выражение для характерной энергии захваченных частиц:

$$W_{TR} \approx \frac{2ev_F E}{\omega} = \frac{2ev_F^2 B_0}{c\omega}. \quad (6)$$

По аналогии с результатами работ [14, 15, 17, 18, 28] можно показать, что при рассматриваемом здесь сценарии включения поля “захваченным” окажется большинство частиц, имеющих начальные энергии в интервале от 0 до W_{TR} . Мы не рассматриваем по отдельности сценарии захвата частиц, принадлежащих “тепловому хвосту” или находившихся первоначально под уровнем Ферми. Обсуждаемый далее механизм авторезонансного ускорения захваченных электронов от этого не зависит.

Далее предполагаем ВЧ-поле постоянным ($\alpha \geq 1$) на фоне увеличения магнитного поля b . Увеличение площади, охватываемой сепаратрисой (в соответствии с выражением (5а)), и сохранение адиабатического инварианта $J = \oint Id\varphi$ гарантируют, что захваченные частицы всегда будут находиться в окрестности стационарной O -точки. Координата последней увеличивается по мере роста магнитного поля в соответствии со следующим соотношением, справедливым в области $b \gg \alpha \approx 1$:

$$I_O \approx \frac{b(\tau)}{2}. \quad (7a)$$

Нетрудно убедиться в том, что связь (7а) соответствует сохранению равенства между зависящей от энергии $W = v_F p$ гирочастотой и частотой ВЧ-поля: $\frac{eBv_F^2}{cW} \approx \omega$. Поэтому данный режим можно назвать авторезонансным [14, 17, 18, 30]. Совершенно аналогично можно увеличивать энергию захваченных частиц, изменяя не магнитное поле, а частоту ВЧ-излучения. Более подробное обоснование сформулированного выше качественного описания может быть проведено точно так же, как и в работах [14, 15, 17, 18, 28].

Подчеркнем, что в режиме авторезонанса при увеличении магнитного поля энергия частиц будет расти по закону $W \propto B$, в то время как в отсутствие ВЧ-поля адиабатический подъем магнитного поля приводил бы к увеличению импульса в соответствии с законом $W \propto \sqrt{B}$.

Пусть после достижения магнитным полем некоторой предельной величины B_{up} ВЧ-поле выключается (причем неважно, как именно оно выключается: адиабатически плавно или резко). При этом происходит высвобождение захваченных частиц. Подобному сценарию соответствует образование популяции “горячих” электронов, отделенных от области малых энергий “разрывом” $I_G \approx I_O$:

$$I_G \approx \frac{b_{up}}{2} = \frac{B_{up}}{2B_0}. \quad (7b)$$

Критерий адиабатичности изменения магнитного поля в безразмерных переменных имеет следующий вид (см., например, [18]): $\dot{b}\omega_{TR}^{-1} \ll b$. В размерных переменных имеем

$$T^{-1} \ll \omega \sqrt{\frac{cE_0}{Bv_F}}, \quad (7c)$$

где T – временной масштаб изменения магнитного поля.

3. Учет релаксационных процессов. Чтобы учесть процессы релаксации, введем в уравнение динамики квазичастицы (2) модельный оператор динамического трения $[-\gamma\mathbf{p}]$:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\nabla_p W_+}{c} \times \mathbf{B} \right) - \gamma\mathbf{p}.$$

(Таким выражением имеет смысл пользоваться, если частицы ускоряются до энергий, много больших энергии Ферми.) Система уравнений для переменных I, φ перестает быть гамильтоновой и модифицируется следующим образом (изменяется только первое из уравнений (3b)):

$$\dot{I} = \frac{\alpha}{\sqrt{b}} \sqrt{2I} \sin \varphi - 2\tilde{\gamma}I, \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{b}} \cos \varphi + \sqrt{b} \right) \frac{1}{\sqrt{2I}} - \nu, \quad (8)$$

где $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega_0}$. Системе уравнений (8) соответствует фазовый портрет, который отличается от случая гамильтоновой системы заменой состояний равновесия типа “центр” на состояния равновесия типа “фокус” (рис. 2).

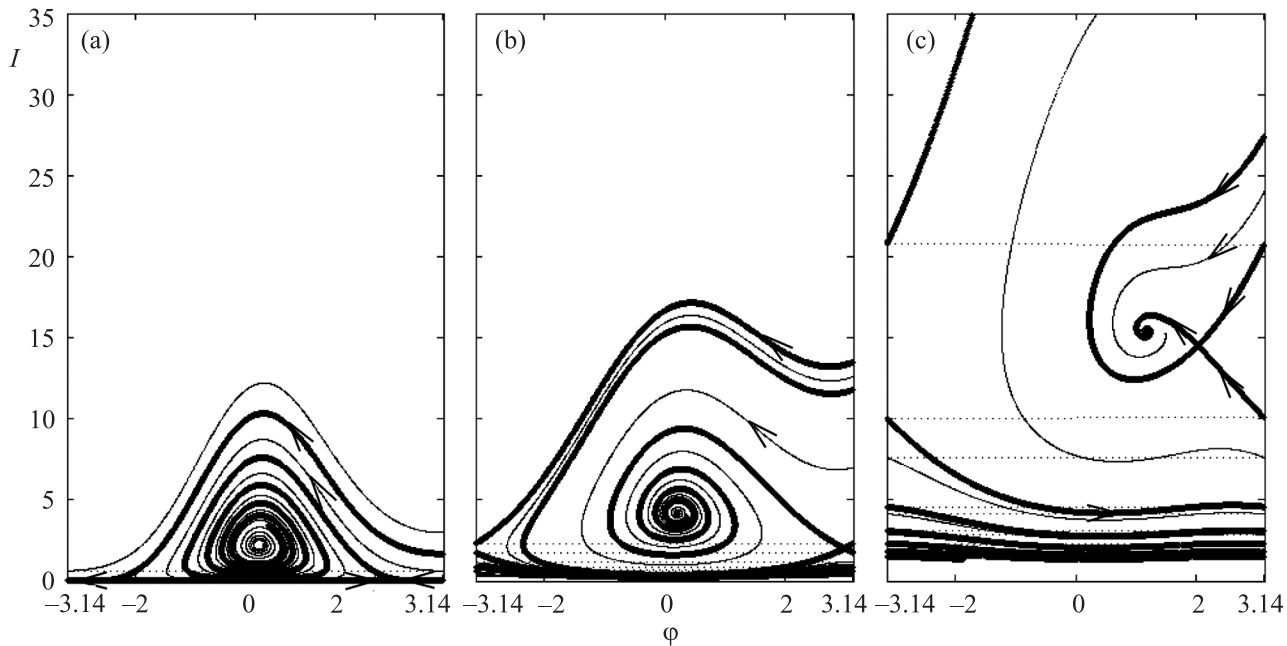


Рис. 2. Фазовый портрет, соответствующий системе уравнений (8) для параметров $\nu = 1$, $\alpha = 1.1$, $\tilde{\gamma} = 1/30$ и значений магнитного поля $b = 1$ (a), 6 (b), 30 (c)

1. Случай $\frac{1}{\sqrt{\nu^2/\tilde{\gamma}^2 + 1}} < \frac{\alpha}{b} = \frac{cE}{v_F B} < 1$ (рис. 2b и c). Существуют состояния равновесия типа “фокус” (F -точка) и “седло” (X -точка):

$$\sin \varphi_{F,X} = \tilde{\gamma} \frac{\sqrt{2I_{F,X} b}}{\alpha}, \quad \cos \varphi_F > 0, \quad \cos \varphi_X < 0, \quad (9a)$$

$$\sqrt{2I_{F,X}} = \frac{\nu^2/\tilde{\gamma}^2}{1 + \nu^2/\tilde{\gamma}^2} \frac{\sqrt{b}}{\nu} \left[1 \pm \frac{\tilde{\gamma}}{\nu} \sqrt{\frac{\alpha^2}{b^2} \left(1 + \frac{\nu^2}{\tilde{\gamma}^2} \right) - 1} \right], \quad (9b)$$

где знаки “ \pm ” выбираются для фокуса и для седла соответственно.

2. Случай $\frac{\alpha}{b} = \frac{cE}{v_F B} = 1$. Точка бифуркации: X -точка опускается на ось $I = 0$, причем $\varphi_X^{(1,2)} \rightarrow \pm\pi$, трансформируясь в особые точки Y -типа (треноги).

3. Случай $\frac{\alpha}{b} = \frac{cE}{v_F B} > 1$ (рис. 2a). Здесь Y -точки сближаются: $\varphi_Y^{(1,2)} = \pm \arccos(-b/\alpha)$. Положение фокуса по-прежнему определяется формулами (9a) и (9b).

4. Случай $\frac{\alpha}{b} = \frac{cE}{v_F B} \leq \frac{\tilde{\gamma}}{\sqrt{\nu^2 + \tilde{\gamma}^2}}$. Седло и фокус аннигилируют. У системы не существует состояний равновесия. Все фазовые траектории в конечном счете уходят на ось $I = 0$.

Нелинейное циклотронное ускорение в режиме авторезонанса происходит в основном аналогично таковому в гамильтоновой системе: захваченные час-

тицы “отслеживают” точку фокуса так же, как они “отслеживали” центр (см. также [28, 30]).

Из соотношения (9b), однако, следует, что в случае конечной частоты релаксации максимальное значение магнитного поля B_{\max} , при котором существуют состояния равновесия и, соответственно, максимальное значение действия “захваченных” электронов $I_{F \max}$ ограничены величинами

$$b_{\max} = \alpha \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\tilde{\gamma}^2}}, \quad I_{F \max} = \frac{\nu^2/\tilde{\gamma}^2}{2\tilde{\gamma}^2(\nu^2/\tilde{\gamma}^2 + 1)^2} b_{\max}. \quad (10a)$$

При условии $\omega \gg \gamma$ для нормировки $\nu = 1$ получаем

$$b_{\max} \approx \frac{\alpha}{\tilde{\gamma}}, \quad I_{F \max} \approx \frac{b_{\max}}{2}. \quad (10b)$$

Сопоставляя (10b) с (7b), нетрудно убедиться в том, что при условии $\omega \gg \gamma$ по-прежнему можно пользоваться выражением (7b) для определения величины “разрыва” на функции распределения. При этом, однако, значение магнитного поля не может превосходить величину $B_{\max} \approx \frac{cE\omega}{v_F \gamma}$.

В области параметров $\omega \gg \gamma$ диссипация не меняет условия “захвата” частиц на начальной стадии авторезонансного ускорения.

Критерий адиабатически медленного изменения магнитного поля при учете релаксации имеет следующий вид:

$$T^{-1} \ll \max \left[\omega \sqrt{\frac{cE}{Bv_F}}, \gamma \right]. \quad (11)$$

Отметим, что в отличие от динамической системы, описывающей циклотронный резонанс ВЧ-поля с массивными релятивистскими частицами [14–18], в данном случае “аннигиляция” устойчивого и неустойчивого состояний равновесия возможна только при введении в систему диссипации. Кроме того, после такой “аннигиляции” не остается других состояний равновесия.

4. О применимости классических уравнений движения и “однозонной” теории. В рассматриваемом случае использование классических уравнений движения корректно, если изменение энергии квазичастиц соответствует по крайней мере разнице между энергиями нескольких уровней Ландау. (Строго говоря, достаточным является изменение энергии квазичастиц, соответствующее переходу между многими уровнями Ландау.) Это условие позволяет сформулировать ограничение на частоту ВЧ-поля. Воспользуемся выражением для энергии уровней Ландау в случае безмассовых электронов [11, 35]:

$$W_N = \pm v_F \sqrt{\frac{2|N|e\hbar B}{c}}. \quad (12)$$

Наиболее жесткими условия применимости классических уравнений оказываются на стадии “захвата” низкоэнергичных частиц, когда их характерная энергия определяется выражением (6). Потребуем, чтобы энергия квазичастиц после “захвата” была не менее энергии уровня Ландау с некоторым заданным номером N_0 , т.е. $W_{\text{TR}} \geq W_{N_0}(B_0)$. Учитывая следующее из выражений (6) и (12) тождество $W_{\text{TR}} = W_{N_0}^2(B_0)/\hbar N_0 \omega$, получаем ограничение на частоту ВЧ-поля:

$$\hbar \omega \leq \frac{W_{N_0}(B_0)}{N_0} = \frac{W_1(B_0)}{\sqrt{N_0}}. \quad (13a)$$

Последнее условие гарантирует возможность пренебрежения межзонными переходами. Действительно, в присутствии магнитного поля в графене разрешенными являются межзонные переходы между уровнями с номерами $N > 0$ и $M < 0$ при условии $M = -(N \pm 1)$ [11, 35]. Минимальная энергетическая щель соответствует переходам между уровнями $N - 2$, $M = -1$ или $N = 1$, $M = -2$. (Указанные переходы резонансно взаимодействуют с раз-

личными (вращающимися в разные стороны) циркулярно поляризованными ВЧ-полями [11, 35]. Рассматриваемой в данной работе поляризации поля соответствует переход $N = 2$, $M = -1$.) Эта щель равна $\Delta W_{\text{min}} = (\sqrt{2} + 1)W_1(B_0)$. Таким образом, необходимая для реализации межзонных переходов резонансная частота заведомо превосходит определяемую соотношением (13a) величину (это верно даже для $N_0 = 1$!). Что касается нерезонансного межзонного взаимодействия, то для оценки его роли можно воспользоваться приведенными в [11, 35] выражениями для матричных элементов дипольных моментов разрешенных переходов: $d_{N,M} \approx [ev_F \hbar / (W_N - W_M)] \delta_{|N|,|M|\pm 1}$. Пусть, например, уровень Ферми находится между уровнями $N = 1$ и 2. Нетрудно убедиться в том, что отношение частоты Раби к минимальной частоте разрешенного межзонного перехода является малой величиной: $d_{2,-1}E/\Delta W_{\text{min}} = (2 + \sqrt{2})^{-2} \approx 10^{-1}$. Последнее позволяет воспользоваться методом возмущений. Взяв частоту поля $\hbar \omega \approx 0.5W_1(B_0)$ (т.е. на границе области применимости классических уравнений), можно получить следующие оценки: $\delta \rho_2/\rho_F \approx 10^{-2}(B_0/B)^2$, $\delta \rho_{N>2}/\rho_F \approx 10^{-2}(2/N^2)(B_0/B)^2$. Отсюда следует $\sum_{N=2}^{\infty} \delta \rho_N/\rho_F \approx 2 \cdot 10^{-2}(B_0/B)^2$, где $\delta \rho_{N \geq 2}$ – обусловленные межзонным взаимодействием возмущения населенностей на уровнях выше уровня Ферми, ρ_F – населенности уровней, находящихся ниже уровня Ферми. Поскольку в режиме автофазировки захватывается большая часть частиц с положительной энергией, учет нерезонансных межзонных переходов в данном случае явно не является принципиальным.

5. Некоторые оценки. Используя соотношения (1), (12), (3a) и (7a), найдем связь между частотой ВЧ-поля и введенным выше максимальным значением магнитного поля B_{max} :

$$B_{\text{max}} \approx \omega^2 \frac{2\hbar c N_G}{v_F^2 e}; \quad B_{\text{max}}[T] \approx 0.44 \left(\frac{0.1 \text{ мм}}{\lambda} \right) N_G, \quad (13b)$$

где N_G – сформированный “разрыв” на функции распределения, заданный соответствующим числом уровней Ландау, $\lambda = 2\pi c/\omega$, $v_F \approx 10^8$ см/с. Для терагерцового излучения $\lambda \approx 0.1$ мм и для $N_G \approx 10$ оценка (13b) соответствует магнитному полю $B_{\text{max}} \approx 4.4$ Т. В то же время для $\lambda \approx 5$ мкм из (13b) получаем $B_{\text{max}} \approx 480$ Т даже при $N_G = 3$.

Для определения необходимой мощности излучения P воспользуемся соотношением $P = \frac{cE^2}{8\pi}(D \times D)$, где $D \times D$ – апертура пучка. В результате, используя

соотношения (10a), (10b) и (13b), приходим к следующей оценке:

$$P = 2\pi c \left(\frac{D}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{c}{v_F}\right)^2 \left(\frac{N_G \hbar \omega}{e}\right)^2 \frac{\gamma^2}{\omega^2}, \quad (14a)$$

или, если взять $v_F \approx 10^8$ см/с,

$$P_{[\text{мВт}]} \approx 20 \left(\frac{\hbar \gamma}{1 \text{ мэВ}}\right)^2 n_\lambda^2 N_G^2, \quad (14b)$$

где $n_\lambda = D/\lambda$.

Современные данные по измерению времени релаксации в графене и топологических изоляторах соответствуют интервалу от десятков фемтосекунд до нескольких пикосекунд в наиболее чистых образцах [36, 37]. Для наиболее оптимистичной на сегодняшний день оценки времени релаксации γ^{-1} порядка пикосекунд ($\hbar \gamma \approx 0.1$ мэВ) из соотношения (14b) следует, что для образования группы горячих электронов с энергиями, соответствующими 4–5 уровням Ландау, при достаточно жесткой фокусировке ($n_\lambda^2 \approx 5$) потребуется мощность порядка 16–25 мВт. Для $\hbar \gamma \approx 1$ мэВ, что соответствует временам жизни в сотни фемтосекунд, наблюдавшимся в топологических изоляторах [38–41], требуемая мощность возрастает до 1.6–2.5 Вт. В настоящее время такие мощности достигнуты квантовыми каскадными лазерами. В [42] сообщается о достижении мощности > 1 Вт на длине волны ≈ 0.09 мм. В субмиллиметровом диапазоне доступны даже и намного более высокие мощности: в [43] сообщается о создании гиротрона на длине волны $\lambda_0 \approx 0.4$ мм с мощностью 200 кВт при длительности импульса $\tau \approx 30$ мкс.

Разумеется, окончательный вывод относительно оптимальных параметров можно сделать только на основании последовательной квантовой теории. Тем не менее проведенный в данной работе классический анализ демонстрирует перспективность исследований в указанном направлении.

Авторы благодарны М.Ю. Глявину за плодотворные обсуждения. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ # 13-02-97039, 13-02-00376.

1. M. Orlita, C. Faugeras, P. Plochocka, P. Neugebauer, G. Martinez, D.K. Maude, A.-L. Barra, M. Sprinkle, C. Berger, W. A. de Heer, and M. Potemski, Phys. Rev. Lett. **101**, 267601 (2008).
2. M. Orlita, C. Faugeras, J. M. Schneider, G. Martinez, D.K. Maude, and M. Potemski, Phys. Rev. Lett. **102**, 166401 (2008).
3. I. Crassee, J. Levallois, A.L. Walter, M. Ostler, A. Bostwick, E. Rotenberg, T. Seyller, D. van der Marel, and A.V. Kuzmenko, Nat. Phys. **7**, 48 (2011).

4. A. A. Schafgans, K. W. Post, A. A. Taskin, Y. Ando, X. L. Qi, B. C. Chapler, and D. N. Basov, Phys. Rev. B **85**, 195440 (2012).
5. P. Cheng, C. Song, T. Zhang, Y. Zhang, Y. Wang, J.-F. Jia, J. Wang, Y. Wang, B.-F. Zhu, X. Chen, X. Ma, K. He, L. Wang, X. Dai, Zh. Fang, X. Xie, X.-L. Qi, Ch.-X. Liu, Sh.-Ch. Zhang, and Q.-K. Xue, Phys. Rev. Lett. **105**, 076801 (2010).
6. S. A. Mikhailov and K. Ziegler, J. Phys.: Condens. Matter **20**, 384204 (2008).
7. S. A. Mikhailov, Phys. Rev. B **84**, 045532 (2011).
8. X. Yao, M. Tokman, and A. Belyanin, Phys. Rev. Lett. **112**, 055501 (2014).
9. X. Yao and A. Belyanin, Phys. Rev. Lett. **108**, 255503 (2012).
10. M. Tokman, X. Yao, and A. Belyanin, Phys. Rev. Lett. **110**, 0774904 (2013).
11. X. Yao and A. Belyanin, J. Phys.: Cond. Matt. **25**, 054203 (2013).
12. S. A. Mikhailov, Phys. Rev. B **79**, 241309(R) (2009).
13. Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, М. (1988).
14. А. И. Нейштадт, А. В. Тимофеев, ЖЭТФ **93**, 1706 (1987).
15. Е. В. Суворов, М. Д. Токман, Физика плазмы **14**, 950 (1988).
16. I. A. Kotelnikov and G. V. Stupakov, Phys. Fluids B **2**, 881 (1990).
17. A. G. Litvak, E. V. Suvorov, A. M. Sergeev, I. V. Khazanov, and M. D. Tokman, Phys. Fluids B **5**, 4347 (1993).
18. С. В. Голубев, Е. В. Суворов, В. Е. Семенов, М. Д. Токман, Письма в ЖТФ **20**, 82 (1994).
19. O. Polomarov and G. Shvets, Phys. Plasmas **13**, 054502 (2006).
20. O. Polomarov and G. Shvets, Phys. Plasmas **14**, 055908 (2007).
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, т. I: *Теоретическая физика*, Наука, М. (1973), 208 с.
22. A. I. Neishdadt, J. Appl. Math. Mech. **39**, 594 (1975).
23. J. Henrard and A. Lemaitre, Celest. Mech. **30**, 197 (1983).
24. A. A. Zharov, A. S. Sergeev, and M. D. Tokman, Sov. J. Plasma Phys. **12**, 616 (1986).
25. M. Deutsch, E. Meerson, and J. E. Golub, Phys. Fluids B **3**, 1773 (1991).
26. L. Friedland, Phys. Fluids B **4**, 3199 (1992).
27. R. R. Lindberg, A. E. Charman, J. S. Wurtele, and L. Friedland, Phys. Rev. Lett. **93**, 055001 (2004).
28. S. Triandofilov, V. Khudik, M. Tokman, and G. Shvets, Physica B **405**, 3003 (2010).
29. G. Shvets, Phys. Rev. Lett. **93**, 195004 (2004).

30. M. D. Tokman and M. A. Erukhimova, Phys. Rev. E **84**, 056610 (2011).
31. T. Morimoto, Y. Hatsugai, and H. Aoki, Phys. Rev. B **78**, 073406 (2008).
32. H. Rosenberg, Ann. Math. **117**, 1 (1983).
33. W. P. Thurston, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **19**, 417 (1988).
34. S. Kh. Aranson, I. U. Bronstein, E. V. Zhuzhoma, and I. V. Nikolaev, J. Math. Sci. **90**, 2111 (1998).
35. Y. Zheng and T. Ando, Phys. Rev. B **65**, 245420 (2002).
36. S. Boubanga-Tombet, S. Chan, T. Watanabe, A. Satou, V. Ryzhii, and T. Otsuji, Phys. Rev. B **85**, 035443 (2012).
37. T. Watanabe, T. Fukushima, Y. Yabe, S. A. B. Tombet, A. Satou, A. A. Dubinov, V. Ya. Aleshkin, V. Mitin, V. Ryzhii, and T. Otsuji, New J. Phys. **15**, 075003 (2013).
38. A. A. Schafgans, K. W. Post, A. A. Taskin, Y. Ando, X.-L. Qi, B. C. Chapler, and D. N. Basov, Phys. Rev. B **85**, 195440 (2012).
39. P. Cheng, C. Song, T. Zhang, Y. Zhang, Y. Wang, J.-F. Jia, J. Wang, Y. Wang, B.-F. Zhu, X. Chen, X. Ma, K. He, L. Wang, X. Dai, Zh. Fang, X. Xie, X.-L. Qi, Ch.-X. Liu, Sh.-Ch. Zhang, and Q.-K. Xue, Phys. Rev. Lett. **105**, 076801 (2010).
40. T. Hanaguri, K. Igarashi, M. Kawamura, H. Takagi, and T. Sasagawa, Phys. Rev. B **82**, 081305(R) (2010).
41. Y. Jiang, Y. Wang, M. Chen, Z. Li, C. Song, K. He, L. Wang, X. Chen, X. Ma, and Q.-K. Xue, Phys. Rev. Lett. **108**, 016401 (2012).
42. L. Li, L. Chen, J. Zhu, J. Freeman, P. Dean, A. Valavanis, A. G. Davies, and E. H. Linfield, Elec. Lett. **50**(4), 309 (2014).
43. M. Yu. Glyavin, A. G. Luchinin, G. S. Nusinovich, J. Rodgers, D. G. Kashyn, C. A. Romero-Talamas, and R. Pu, Appl. Phys. Lett. **101**, 153503 (2012).