

# О локализованных долгоживущих трехмерных решениях нелинейного уравнения Клейна–Гордона с потенциалом дробной степени

Е. Г. Екомасов, Р. К. Салимов<sup>1)</sup>

Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 30 июня 2014 г.

После переработки 1 сентября 2014 г.

Для некоторого класса уравнений Клейна–Гордона численно обнаружено существование долгоживущих ( $t \sim 1000$ ) устойчивых сферически-симметричных решений в виде пульсонов. Их средняя амплитуда колебаний и частота моды быстрых колебаний не изменяются в течение всего времени счета.

DOI: 10.7868/S0370274X14190114

Нелинейные волновые уравнения, например нелинейные уравнения Клейна–Гордона, лежат в основе многих областей физики, включая гидродинамику, физику конденсированного состояния, теории поля и т.д. [1–5]. Хотя наиболее изученными являются  $(1 + 1)$ - и  $(2 + 1)$ -размерные модели [4–9], эти уравнения легко обобщить на пространства более высокой размерности, например для сферической симметрии:

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = F(u). \quad (1)$$

Устойчивые решения таких уравнений можно было бы интерпретировать как классические модели частиц конечного размера. Наиболее интересным с этой точки зрения представляются как раз пространственно-трехмерные уравнения. Как известно, не существует стационарных локализованных решений лоренц-инвариантных полевых уравнений для пространственной размерности более 1 [10]. Однако это не исключает локализованных, зависящих от времени осциллирующих решений. В современной нелинейной волновой теории большое внимание уделяется нахождению пространственно-локализованных и периодических по времени решений для большого количества моделей и различных размерностей пространства-времени (см., например, [11]). Такие пространственно-локализованные решения имеют конечную энергию и соответствуют статическим частицеподобным объектам или различным бегущим волнам. При этом долгоживущие трехмерные и двумерные решения, исследованные к настоящему времени, распадаются с течением

времени. Одним из часто исследуемых в данном контексте является уравнение синус-Гордона (УСГ):

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = \sin u, \quad (2)$$

имеющее, например, в  $(1 + 1)$ -мерной модели периодическое по времени и локализованное в пространстве решение, называемое бризером [1]. Делаются попытки нахождения точных аналитических решений (в том числе и локализованных)  $(n + 1)$ -размерных моделей (см., например, [12–15]). Другим направлением исследований является добавление слагаемых в нелинейное уравнение. Например, найдено двумерное интегрируемое обобщение одномерного УСГ – двумерное обобщенное уравнение синус-Гордона [16]. В [16–18] численно показана возможность существования долгоживущего, хотя и имеющего конечное время жизни пространственно-локализованного сферически-симметричного  $(3 + 1)$ -размерного бризероподобного объекта, названного пульсоном. Они теряют свою энергию, излучая его. Интерес к этой теме связан и с появлением работ (см., например, [19, 20]), показавших возможность образования таких решений для широкого класса скалярных теорий в различных пространственных измерениях. Нелинейность в уравнении (2) имеет вид  $\sin u$ , т.е. при  $u \rightarrow 0$  эта нелинейная функция стремится к линейной и поведение распадающихся решений при малых амплитудах сходно с поведением линейных решений. Поэтому с точки зрения нахождения долгоживущих локализованных осциллирующих решений пространственно-многомерных уравнений было бы интересно рассмотреть случай таких функций  $F(u)$ , которые оставались бы нелинейными при  $u \rightarrow 0$ . В настоящей работе мы рассмот-

<sup>1)</sup>e-mail: salemrkk@yandex.ru

рим потенциалы вида  $V(u) = \frac{n}{m+n}u^{(m+n)/n}$ , приводящие к функции  $F(u)$  вида  $u^{m/n}$ . Такие потенциалы, наряду с логарифмическими, встречаются при рассмотрении скалярных полей космологических моделей вселенной Фридмана–Робертсона–Уолкера (например, в [21]) и при рассмотрении разных феноменологических моделей [22]. Кроме того, существование трехмерных периодических вообще не распадающихся с течением времени решений интересно само по себе. В численных экспериментах по исследованию пространственно-трехмерных уравнений были рассмотрены логарифмические потенциалы (см., например, [18, 23]). Однако в них не затрагивался потенциал дробной степени, как в космологических моделях.

Доводом в пользу возможного существования устойчивых локализованных решений в уравнениях с дробным потенциалом  $V(u) = \frac{n}{m+n}u^{(m+n)/n}$ , приводящих к уравнению

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = u^{m/n}, \quad (3)$$

может служить то, что из него подстановкой вида  $v = ru$  получается уравнение

$$v_{rr} - v_{tt} = v^{m/n}r^{(n-m)/n} \quad (4)$$

с некоторой потенциальной ямой в правой части, которая может ограничить распыление локализованного решения. В данной работе рассматривались действительные уравнения вида (3), где  $m$  и  $n$  ( $m < n$ ) – натуральные числа вида  $2k + 1$ ,  $k$  – также натуральное число. С учетом этого функция  $u$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для знака этой функции нет никаких ограничений. Далее мы как раз и покажем, что наличие потенциала дробной степени в нелинейных уравнениях Клейна–Гордона, например вида (4), может приводить к существованию долгоживущих бризероподобных (3 + 1)-размерных решений нового типа.

Численно исследовались решения уравнений вида

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = u^{3/7} \quad (5)$$

и

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = \sin u + u^{3/7}. \quad (6)$$

Были исследованы также и другие уравнения вида (5), где  $m, n$  ( $m < n$ ) – любые натуральные нечетные числа (в частности, рассматривались случаи  $m/n = 1/3$ ;  $m/n = 1/7$  и т.д.). Численное исследование уравнений с правой частью дробной степени, меньшей единицы, достаточно специфично. Поэтому при численном исследовании использовался

обычный псевдоспектральный метод, ранее уже применявшийся для решения уравнений типа Клейна–Гордона [10]. Решение раскладывалось в ряд по тригонометрическим функциям. Далее коэффициенты разложения находились разностным по времени методом с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Количество функций составляло порядка 600–900 для конечной длины  $R = 20–30$ . Ограничение по конечному времени счета проводилось из соображений контроля сохранения энергии

$$\int_0^R \left[ \frac{u_r^2}{2} + \frac{u_t^2}{2} + V(u) \right] r^2 dr. \quad (7)$$

При потере энергии в системе из-за численных погрешностей порядка  $10^{-2}$  от начальной (на временах  $t \sim 600–800$ ) счет прекращался.

При исследовании уравнений вида (4) были получены долгоживущие бризероподобные решения нового типа со временем жизни, превышающим времена жизни пульсонов УСГ [17, 18]. На рис. 1 и 2 представлены зависимости линий уровня функции

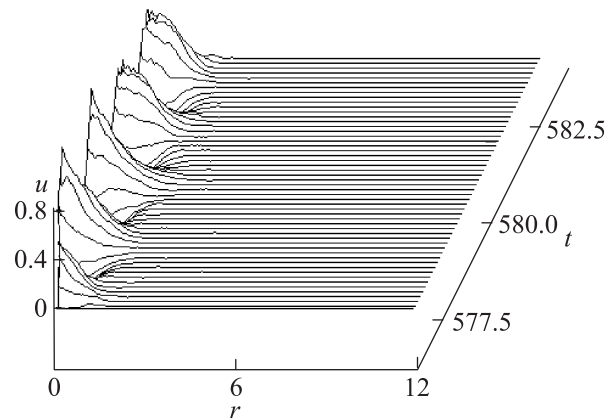


Рис. 1. Линии уровня функции  $u(r, t)$  для уравнения (5) для больших времен. Здесь и далее на подобных рисунках следует обратить внимание на то, что функция  $u(r, t)$  принимает как положительные, так и отрицательные значения, которые не очень хорошо видны

$u(r, t)$  от времени для начальных условий  $u(r, 0) = 0.36 \exp(-0.78r^2)$ ,  $u_t(r, 0) = 0$ .

Из сравнения решений на двух разных отрезках времени видно, что частота моды быстрых колебаний и максимальная амплитуда решения практически не изменяются в течение всего длительного времени счета. Более детально поведение центральной части пульсона показано на рис. 3 и 4. Видно, что амплитуда центральной части пульсона не уменьшается, а даже увеличивается по сравнению с начальным значением.

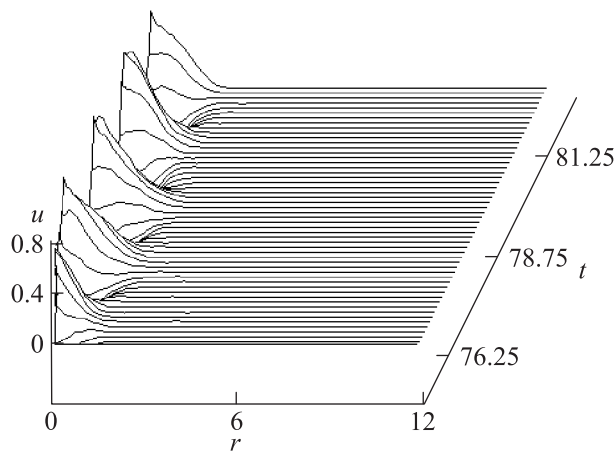


Рис. 2. Линии уровня функции  $u(r, t)$  для уравнения (5) для малых времен

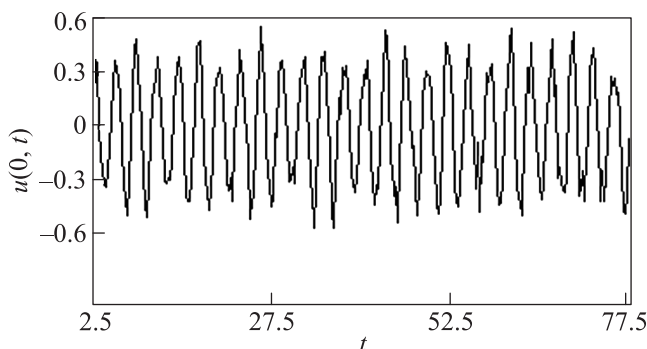


Рис. 3. Поведение амплитуды в центре пульсона для уравнения (5)

Обозначив через  $c(t)$  модуль огибающей  $u(0, t)$ , получим график, представленный на рис. 5.

Самым любопытным свойством полученного трехмерного решения уравнения (4) является неизменность во времени максимальной амплитуды и частоты. Достаточно необычное свойство решений данных уравнений – отсутствие волн малой амплитуды вдали от локализованного решения. В моделях, в которых такие волны малой амплитуды стремятся к линейным, их обычно называют излучением. В нашем же случае отсутствует предельный случай волн малой амплитуды, когда их можно считать линейными. Видимо, это и обеспечивает существование локализованных объектов бризерного типа. Таким образом, наблюдаемое решение является нелинейной суперпозицией высокоамплитудного локализованного бризероподобного состояния и некоторых компонент малой амплитуды. В частности, на рис. 3 и 4 можно заметить сложение колебаний, приводящее к неким биениям. Из рис. 5 мы видим, что амплитуда колебаний практически не уменьшается и время жизни пульсона уравнения (5) больше, например, чем время жизни пульсонов уравнения синус-Гордона и фи-четыре [17, 18]. Далее исследовалось уравнение вида (6) с заданным в виде модифицированного для  $(3+1)$ -размерности начальным состоянием “бризера” одномерного уравнения синус-Гордона. Интересно отметить, что и в этом случае добавка в виде потенциала дробной степени также приводит к нерасплывающемуся решению. Наблюдаемые времена существования осциллирующего бризероподобного решения составляют  $t \sim 800$ , что превышает время существования полученных численно пульсонов УСГ [17, 18]. Структура пульсона и поведение амплитуды около центра ( $r \sim 0$ ) колеблющегося решения представлены на рис. 6 и 7.

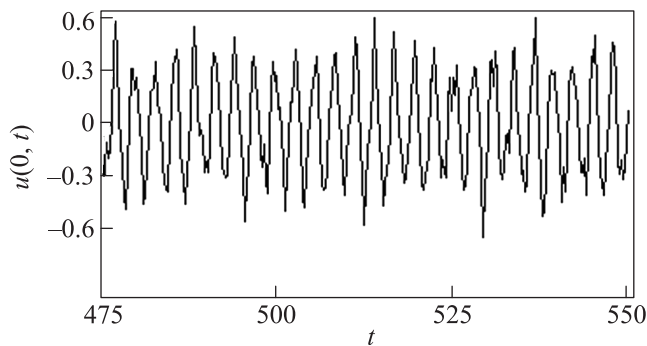


Рис. 4. Поведение амплитуды в центре пульсона для уравнения (5)

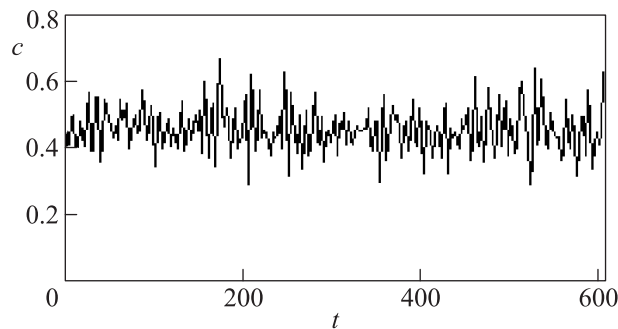


Рис. 5. Эволюция во времени  $c(t)$  модуля огибающей  $u(0, t)$  для уравнения (5)

В частности, на рис. 3 и 4 можно заметить сложение колебаний, приводящее к неким биениям. Из рис. 5 мы видим, что амплитуда колебаний практически не уменьшается и время жизни пульсона уравнения (5) больше, например, чем время жизни пульсонов уравнения синус-Гордона и фи-четыре [17, 18]. Далее исследовалось уравнение вида (6) с заданным в виде модифицированного для  $(3+1)$ -размерности начальным состоянием “бризера” одномерного уравнения синус-Гордона. Интересно отметить, что и в этом случае добавка в виде потенциала дробной степени также приводит к нерасплывающемуся решению. Наблюдаемые времена существования осциллирующего бризероподобного решения составляют  $t \sim 800$ , что превышает время существования полученных численно пульсонов УСГ [17, 18]. Структура пульсона и поведение амплитуды около центра ( $r \sim 0$ ) колеблющегося решения представлены на рис. 6 и 7.

Таким образом, из численного исследования решений трехмерных уравнений с потенциалом дробной степени величины от 1 до 2 видно, что начальные локализованные решения для них не расплываются в течение всего длительного времени счета. Самым интересным свойством полученного решения (3) является неизменность во времени средней амплитуды и частоты быстрой моды колебаний. Это позволя-

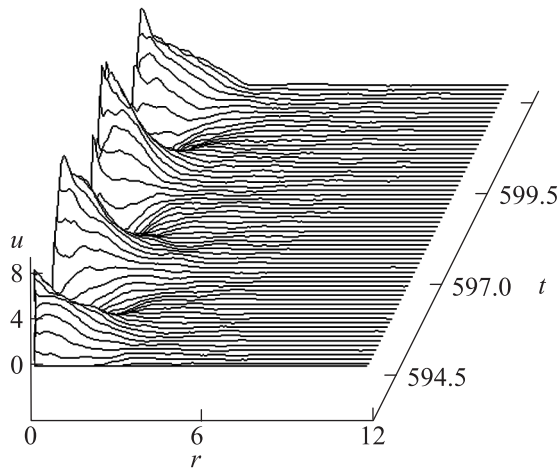


Рис. 6. Линии уровня функции  $u(r, t)$  для уравнения (6) для больших времен

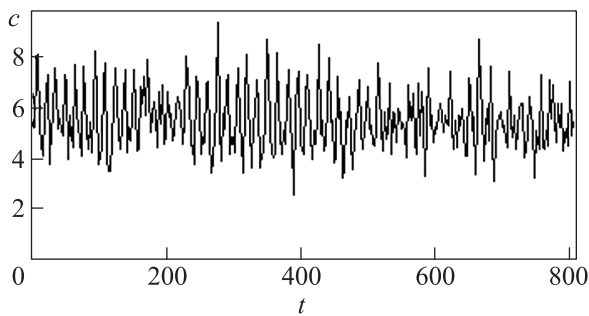


Рис. 7. Эволюция во времени  $c(t)$  модуля огибающей  $u(0, t)$  для уравнения (6)

ет надеяться на существование вообще не расплывающегося периодического решения. Данное свойство сохраняется для разных значений потенциалов (разных значений  $m$  и  $n$ , которые также исследовались численно), а также при добавлении таких слагаемых в УСГ. Следует также отметить, что уравнения вида (3) имеют симметрии растяжения по  $r, t$ . Поэтому ограничений по амплитуде решений данное уравнение не имеет.

1. *Encyclopedia of Nonlinear Science*, ed. by A. Scott, Routledge, N.Y. (2004).

2. Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, Теоретическая и математическая физика **21**, 160 (1974).  
 3. М. А. Шамсутдинов, В. Н. Назаров, И. Ю. Ломакина, Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны, Наука, М. (2009).  
 4. О. М. Браун, Ю. С. Кившарь, Модель Френкеля-Конторовой: концепции, методы, приложения, Физматлит, М. (2008).  
 5. T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press, N.Y. (2010).  
 6. C. J. K. Knight, G. Derks, A. Doelman, and H. Susanto, *J. Diff. Eq.* **254**, 408 (2013).  
 7. D. Saadatmand and J. Kurosh, *Braz. J. Phys.* **56**, 43 (2013).  
 8. J. A. Gonzalez, A. Bellorin, and L. E. Guerrero, *Solitons and Fractals* **33**, 143 (2007).  
 9. G. Fodor, P. Forgacs, P. Grandclement, and I. Racz, *Phys. Rev. D* **74**, 124 (2006).  
 10. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М. (1988).  
 11. N.S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press, UK (2004).  
 12. A.-M. Wazwaz, *J. Appl. Math. Inform.* **30**, 925 (2012).  
 13. S. Johnson, P. Suarez, and A. Biswas, *Com. Math. Math. Phys.* **52**, 98 (2012).  
 14. Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Ю. В. Павлов, *ТМФ* **158** (2009).  
 15. M. Qing, H. Binb, R. Weiguob, and L. Yao, *J. Comput. Math.* **87**, 591 (2010).  
 16. B. G. Konopelchenko, *Solitons in multidimensions: inverse spectral transform method*, World Scientific, Singapore (1993).  
 17. I. L. Bogoluvskii and V. G. Makhankov, *JETP Lett.* **24**, 12 (1976).  
 18. В. Г. Маханьков, *Физика элементарных частиц и атомного ядра* **14**, 123 (1983).  
 19. M. Gleiser, *Phys. Rev. D* **49**, 2978 (1994).  
 20. E. J. Copeland, M. Gleiser, and H.-R. Muller, *Phys. Rev. D* **52**, 1920 (1995).  
 21. S. A. Pavliuchenko and A. V. Toporensky, *Grav. Cosmol. J.* **6**, 241 (2000).  
 22. M. Machacek and Y. Tomozawa, *Ann. Phys.* **110**, 407 (1978).  
 23. V. Koutvitsky and E. Maslov, *J. Math. Phys.* **47**, 022302 (2006).