

Электродинамика конусов на поверхности жидкости

А. В. Субботин¹⁾

Институт нефтехимического синтеза им. Топчиева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 октября 2014 г.

После переработки 13 октября 2014 г.

В работе исследуются стационарные конические структуры, формирующиеся на поверхности жидкости под действием электрического поля. На основе уравнений электродинамики показано, что конусы образуются в динамическом режиме при доминировании тока поверхностных ионов, индуцированного касательной компонентой электрического поля, над током проводимости в объеме конуса и поверхностным током, индуцированным потоком жидкости. Определены напряженность электрического поля как внутри, так и вне конуса, а также поле скоростей внутри конуса. Показано, что величина угла раствора конуса зависит от величины тока, протекающего по его поверхности. Определен характерный размер конуса.

DOI: 10.7868/S0370274X14220123

Известно, что поверхность жидкости при зарядке становится неустойчивой, когда плотность заряда на ней превышает критическое значение [1–6]. В результате на поверхности происходит формирование конических структур (конусов Тейлора), из вершин которых происходит эмиссия струй или заряженных частиц. В зависимости от площади свободной поверхности жидкости и напряженности электрического поля может наблюдаться один или несколько конусов. Тейлор показал, что в идеально проводящей жидкости конус возникает за счет баланса капиллярных и электростатических сил и имеет угол раствора $2\theta_T = 98.6^\circ$ [2]. При этом поверхность конуса является эквипотенциальной. Наблюдаемая в экспериментах величина угла при вершине часто отличается от предсказанного Тейлором значения [3]. Например, в работе [7] угол варьировался в интервале $32^\circ < \theta_T < 46^\circ$.

Существование конусов предсказано также и для идеальных диэлектрических жидкостей. В работах [6, 8] было показано, что конусы формируются на поверхности жидкости с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon > 17.6$. Величина угла раствора при этом изменяется в пределах $0 < \theta_T < 49.3^\circ$, причем конусы с углами $30^\circ < \theta_T < 49.3^\circ$ являются неустойчивыми [8]. Вместе с тем в реальных диэлектрических жидкостях всегда присутствуют заряженные ионы. Поэтому полученные результаты требуют обобщения.

Указанные выше конические структуры являются равновесными. В связи с этим встает вопрос об описании конусов, в которых происходит движение

жидкости и течет ток. Именно такие динамические структуры исследуются в настоящей работе.

Сначала сформулируем основные уравнения электродинамики [5]. Движение жидкости будем характеризовать полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, которое удовлетворяет уравнению движения Навье–Стокса [9]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \boldsymbol{\Sigma} + p \mathbf{I}) = 0. \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\Sigma} = \|\Sigma_{ij}\| = \eta \|\nabla_j \mathbf{v}_i + \nabla_i \mathbf{v}_j\|$ – тензор вязких напряжений, η – вязкость раствора, ρ – плотность жидкости, ∇ – оператор набла, \mathbf{I} – единичный тензор, p – давление, $\mathbf{v} \mathbf{v} = \|\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j\|$ – тензорное произведение скоростей. Поле скоростей дополнительно удовлетворяет условию несжимаемости $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ (точка обозначает скалярное произведение). Для окружающей жидкость газовой среды будем полагать $\rho = \eta = 0$ и $\varepsilon = 1$. Предполагается, что объем жидкости является электронейтральным, а на поверхности сосредоточен избыточный положительный заряд с плотностью σ_c . Толщина поверхностного слоя ионов в общем случае зависит от нормальной составляющей напряженности электрического поля и может быть меньше радиуса Дебая. Уравнение (1) следует дополнить условиями на свободной поверхности, где имеет место баланс между вязкими, капиллярными и электрическими силами:

$$p \mathbf{n} - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} - \alpha C \mathbf{n} + \mathbf{F} = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{n} – единичный вектор нормали к поверхности, $C = \text{div } \mathbf{n}$ – средняя кривизна поверхности, \mathbf{F} – электрическая сила на единицу площади поверхности,

¹⁾e-mail: subbotin@ips.ac.ru

α – коэффициент поверхностного натяжения. Далее ограничимся аксиально-симметричным случаем. Введем цилиндрическую систему координат (z, r, φ) , в которой форма поверхности жидкости задается вращением кривой $r = r(z, t)$ вокруг оси z . Направление движения жидкости происходит вдоль z . Вектор нормали к поверхности и касательный вектор, соответственно, равны $\mathbf{n} = -\frac{r'_z}{\sqrt{1+r'^2_z}}\mathbf{e}_z + \frac{1}{\sqrt{1+r'^2_z}}\mathbf{e}_r$, $\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+r'^2_z}}\mathbf{e}_z + \frac{r'_z}{\sqrt{1+r'^2_z}}\mathbf{e}_r$.

Электрическая сила \mathbf{F} определяется через векторы напряженности электрического поля внутри (\mathbf{E}_i) и снаружи (\mathbf{E}_o) поверхности жидкости [10]:

$$\mathbf{F} = \varepsilon_0(E_{o,n}\mathbf{E}_o - \varepsilon E_{i,n}\mathbf{E}_i) - \frac{\varepsilon_0}{2}(\mathbf{E}_o^2 - \varepsilon\mathbf{E}_i^2)\mathbf{n}. \quad (3)$$

Векторы \mathbf{E}_i и \mathbf{E}_o могут быть выражены через соответствующие потенциалы Φ_i и Φ_o , $\mathbf{E}_i = -\nabla\Phi_i$, $\mathbf{E}_o = -\nabla\Phi_o$, которые удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi_i = 0, \quad \Delta\Phi_o = 0. \quad (4)$$

Условия на нормальную и касательную компоненты электрического поля на свободной поверхности имеют стандартный вид [10]:

$$E_{o,n} - \varepsilon E_{i,n} = \frac{\sigma_c}{\varepsilon_0}, \quad E_{o,\tau} = E_{i,\tau}. \quad (5)$$

Будем полагать, что поле вдали от границы равно $E_0\mathbf{e}_z$. Его величина не имеет существенного значения для дальнейшего анализа, т.к. поле вблизи вершины конуса в основном определяется поверхностными зарядами.

Наряду с уравнениями (4), (5) сформулируем еще одно уравнение, которое связывает поверхностную плотность подвижных зарядов σ_c с поверхностной плотностью поляризационных зарядов $\sigma_p = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{i,n}$ [11]:

$$\frac{\sigma_c + \sigma_p}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} = E_0\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int dA_1 \frac{(\sigma_c + \sigma_p)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ есть расстояние между фиксированной (\mathbf{r}) и текущей (\mathbf{r}_1) точками поверхности. Интегрирование в (6) распространяется на свободную поверхность жидкости A , на которой локализованы подвижные и поляризационные заряды. Касательная компонента поля на поверхности жидкости равна

$$E_\tau = E_0\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_A dA_1 \frac{(\sigma_c + \sigma_p)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \boldsymbol{\tau}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}. \quad (7)$$

Компоненты электрической силы \mathbf{F} удобно выразить через суммарную поверхностную плотность заряда $\sigma = \sigma_c + \sigma_p$ и долю подвижных ионов $w = \sigma_c/\sigma$:

$$F_n = \frac{\sigma^2(\varepsilon - w^2)}{2\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} + \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_\tau^2}{2}, \quad F_\tau = \sigma_c E_\tau. \quad (8)$$

Последнее уравнение, которое необходимо сформулировать, описывает динамику заряда у свободной поверхности. Электрическое поле внутри жидкости \mathbf{E}_i индуцирует ток с плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{E}_i)$. Будем полагать, что он подчиняется линейному закону Ома: $\mathbf{j} = K\mathbf{E}_i$, где K – коэффициент электропроводности жидкости. Нормальная компонента тока вблизи поверхности $j_n = KE_{i,n}$ отвечает за ее заряджение. В общем случае нестационарного движения баланс заряда на малом участке поверхности dA записывается в виде [5, 12]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_c dA) + \nabla_\tau \cdot [\sigma_c(\mathbf{v}_\tau + e\mu_+ E_\tau)\boldsymbol{\tau} dA] = J_n dA. \quad (9)$$

Здесь \mathbf{v}_τ – касательная компонента скорости жидкости вблизи поверхности, $e\mu_+ E_\tau$ – скорость ионов на поверхности, движущихся под действием касательного поля E_τ , e – заряд иона, μ_+ – его подвижность, ∇_τ – градиент вдоль касательного вектора $\boldsymbol{\tau}$. В стационарном режиме с учетом аксиальной симметрии уравнение (9) принимает вид

$$\nabla_\tau [r\sigma_c(\mathbf{v}_\tau + e\mu_+ E_\tau)] = r\sqrt{1 + r'^2_z} j_n. \quad (10)$$

Перейдем к рассмотрению тока, который протекает через поперечное сечение жидкости, в предположении, что форма поверхности является конусообразной с вершиной $z = 0$. Будем считать, что величина тока эмиссии ионов из вершины конуса равна I_0 . Используя уравнение (10) и интегрируя уравнение сохранения $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ по объему конуса, ограниченного областью $(z, 0)$, где $z < 0$, ток эмиссии можно представить в виде

$$I_0 = 2\pi r\sigma_c(\mathbf{v}_\tau + e\mu_+ E_\tau) + 2\pi \int_0^{r(z)} KE_{i,z} r dr. \quad (11)$$

Первый член в правой части уравнения (11) описывает поверхностный ток, а второй – ток проводимости в объеме жидкости. Поверхностный ток имеет два вклада, а именно ток за счет потока жидкости и ток, обусловленный действием касательного поля. Если при приближении к вершине конуса напряженность поля $E_{i,z}$ изменяется слабее, чем r^{-2} (как будет показано ниже, реализуется именно этот случай), то

вклад от тока проводимости уменьшается с уменьшением радиуса сечения $r(z)$ и стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Это означает, что существует характерный масштаб $r = r_0$, разделяющий область доминирования тока проводимости ($r > r_0$) и область доминирования поверхностного тока ($r < r_0$).

Рассмотрим область $r < r_0$. Используем два приближения, справедливость которых будет проверена в конце вычислений. Во-первых, будем считать число Рейнольдса малым. Это позволяет пренебречь инерционными эффектами. Второе приближение состоит в том, что в области $r < r_0$ доминирующим является ток за счет дрейфа ионов в электрическом поле. В результате общий ток равен

$$I_0 = 2\pi r e \mu_+ \sigma_c E_\tau. \quad (12)$$

Будем задавать поверхность конуса линией $r(z) = -Bz$, где $B = \text{tg } \theta_T$, $z \leq 0$. Конус имеет среднюю кривизну $C(z) = \cos \theta_T / r(z)$. Баланс между гидродинамическими, электростатическими и капиллярными силами в уравнении (2) означает выполнение следующего скейлингового соотношения:

$$p \sim \Sigma_{nn} \sim \Sigma_{\tau n} \sim F_\tau \sim F_n \sim \alpha C \sim \frac{1}{r}. \quad (13)$$

Рассмотрим выражения для компонент электростатической силы (8), в которых положим $w = \text{const}$. Учитывая формулу (13) и квадратичную зависимость электростатической силы от поля (см. уравнение (3)), приходим к следующим скейлинговым зависимостям для плотности заряда и напряженности касательного электрического поля на поверхности: $\sigma \sim 1/\sqrt{r}$, $E_\tau \sim 1/\sqrt{r}$. Эти скейлинговые формулы согласуются с уравнением (6) при $E_0 = 0$ и с уравнением (12), означающим постоянство тока ($I_0 \sim r \sigma_c E_\tau = \text{const}$). В предельных случаях идеально проводящей жидкости ($E_\tau = 0$) и диэлектрической жидкости ($\sigma_c = 0$) ток равен нулю.

Перейдем к уравнению (6). Пренебрежем вкладом внешнего поля, т.е. положим $E_0 = 0$. Подставим в уравнение (6) выражение для поверхностной плотности заряда в виде $\sigma = A^*/\sqrt{r} = A^*/\sqrt{-Bz}$, где $A^* = \text{const}$. Используя новую переменную $x = z_1/z$ и считая конус бесконечно большим, после вычислений приходим к уравнению для величины $B = \text{tg } \theta_T$:

$$I_1(B) \equiv \frac{1}{2\pi} \times \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx \frac{B^2(1 - \cos \varphi)(x^{3/2} + x^{-1/2})}{[(x - 1)^2 + B^2(1 + x^2 - 2x \cos \varphi)]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\varepsilon + 1 - 2w}{\varepsilon - 1}. \quad (14)$$

Уравнение (14) позволяет найти зависимость угла при вершине конуса θ_T от диэлектрической проницаемости жидкости ε и доли подвижных ионов на поверхности $w = \sigma_c/\sigma$ (см. рис. 1). Заметим, что при

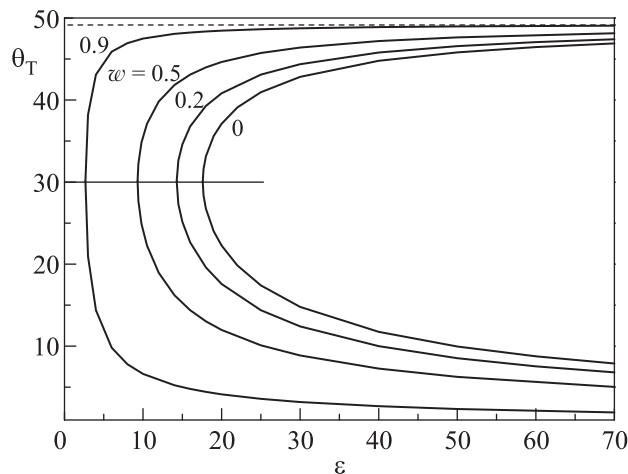


Рис. 1. Зависимость угла θ_T от величины диэлектрической проницаемости жидкости ε для различных значений доли подвижных зарядов. Пунктирная линия соответствует $w = 1$

$w = 1$ мы приходим к классическому результату Тейлора, $\theta_T = 49.3^\circ$, а при $w = 0$ воспроизводим результаты работы [8]. Как видно из рис. 1, при фиксированном значении w и при $\varepsilon \geq 17.6 - 16.6w$ существуют два решения уравнения (14) с углами больше и меньше 30° . Для жидкостей с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon > 17.6$ существует область запрещенных углов, ограниченная линией $w = 0$.

После подстановки выражения $\sigma = A^*/\sqrt{r}$ для суммарной поверхностной плотности в уравнение (7) получаем выражение для касательной компоненты электрического поля:

$$E_\tau(z) = \frac{A^* I_2(B)}{2\varepsilon_0 \sqrt{r(z)}},$$

$$I_2(B) \equiv \frac{B}{2\pi} \times$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dx \frac{(x^{3/2} + x^{-1/2})(1 + B^2 \cos \varphi) - 2x^{1/2}(1 + B^2)}{[(x - 1)^2 + B^2(1 + x^2 - 2x \cos \varphi)]^{3/2}}. \quad (15)$$

Заметим, что для классического конуса Тейлора $I_2[\text{tg}(49.3^\circ)] = 0$, т.е. касательное поле отсутствует.

Обратимся к уравнениям Лапласа (4). Введем сферическую систему координат (R, θ, φ) , которая

связана с цилиндрической системой: $r = R \sin \theta$, $z = R \cos \theta$. Решения уравнений Лапласа для конуса в нашем случае выражаются через функции Лежандра $P_{1/2}(\cos \theta)$ порядка $1/2$ следующим образом [6, 8]:

$$\begin{aligned}\Phi_o(R, \theta) &= A_o P_{1/2}[\cos(\pi - \theta)]\sqrt{R}, \\ \Phi_i(R, \theta) &= A_i P_{1/2}(\cos \theta)\sqrt{R}.\end{aligned}\quad (16)$$

Здесь A_o и A_i – неизвестные константы, которые будут определены ниже. Используя граничные условия (5) и уравнения (15), (16), после несложных вычислений приходим к следующему уравнению для угла θ_T :

$$\begin{aligned}\frac{1-w}{\varepsilon-w} P_{1/2}(\cos \theta_T) P'_{1/2}(-\cos \theta_T) &= \\ &= P_{1/2}(-\cos \theta_T) P'_{1/2}(\cos \theta_T).\end{aligned}\quad (17)$$

В предельном случае $w = 0$ уравнение (17) совпадает с соответствующим уравнением для угла конуса идеальной диэлектрической жидкости [8]. Численные расчеты показывают, что корни уравнения (17) совпадают с корнями уравнения (14). Этот факт следует из эквивалентности дифференциальной и интегральной формулировок уравнений электростатики. Исходя из (15), (16) можно найти неизвестные параметры A_o , A_i и выразить напряженность электрического поля внутри и вне конуса через параметр A^* :

$$E_{i,\theta} = -\frac{A^* I_2(\operatorname{tg} \theta_T)}{\varepsilon_0 \sqrt{R \sin \theta_T}} \frac{P'_{1/2}(\cos \theta)}{P_{1/2}(\cos \theta)},$$

$$E_{i,R} = -\frac{A^* I_2(\operatorname{tg} \theta_T)}{2\varepsilon_0 \sqrt{R \sin \theta_T}} \frac{P_{1/2}(\cos \theta)}{P_{1/2}(\cos \theta_T)}, \quad (18)$$

$$E_{o,\theta} = -\frac{A^* I_2(\operatorname{tg} \theta_T)}{\varepsilon_0 \sqrt{R \sin \theta_T}} \frac{P'_{1/2}(-\cos \theta)}{P_{1/2}(-\cos \theta_T)},$$

$$E_{o,R} = -\frac{A^* I_2(\operatorname{tg} \theta_T)}{2\varepsilon_0 \sqrt{R \sin \theta_T}} \frac{P_{1/2}(-\cos \theta)}{P_{1/2}(-\cos \theta_T)}. \quad (19)$$

Для нахождения A^* обратимся к уравнению движения (1). Без учета инерции это уравнение может быть записано с использованием функции тока ψ следующим образом [13, 14]:

$$L^{\dagger 2} \psi = 0, \quad L^{\dagger} \equiv \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (20)$$

$$\mathbf{v}_R = -\frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \mathbf{v}_{\theta} = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial R},$$

$$\frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{\eta}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial L^{\dagger} \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\eta}{\sin \theta} \frac{\partial L^{\dagger} \psi}{\partial R}.$$

Граничные условия при $\theta = \theta_T$ имеют вид

$$P = \Sigma_{\theta\theta} + \frac{\alpha}{R \operatorname{tg} \theta} - F_{\theta}, \quad \Sigma_{R\theta} - F_R = 0, \quad \mathbf{v}_{\theta} = 0, \quad (21)$$

где компоненты тензора вязких напряжений равны [9]

$$\Sigma_{\theta\theta} = 2\eta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_R}{R} \right),$$

$$\Sigma_{R\theta} = \eta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} + \frac{\partial v_{\theta}}{\partial R} - \frac{v_{\theta}}{R} \right).$$

Используя уравнения (8) и (12), выразим касательную электрическую силу через ток I_0 и угол θ_T :

$$F_R = -\sigma_c E_{\tau} = -\frac{I_0}{2\pi e \mu_+ R \sin \theta_T}. \quad (22)$$

Исключая из (22) напряженность поля E_{τ} , используя уравнение (16) и формулу $\sigma_c = A^* w / \sqrt{R \sin \theta_T}$, приходим к выражению для A^* :

$$A^* = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 I_0}{\pi e \mu_+ w I_2(\operatorname{tg} \theta_T)}}. \quad (23)$$

Далее, на основе формулы (8) получаем нормальную компоненту электрической силы:

$$\begin{aligned}F_{\theta} &= \frac{I_0}{2\pi e \mu_+ w R \sin \theta_T} \times \\ &\times \left[\frac{\varepsilon - w^2}{(\varepsilon - 1) I_2(\operatorname{tg} \theta_T)} + \frac{(\varepsilon - 1) I_2(\operatorname{tg} \theta_T)}{4} \right],\end{aligned}\quad (24)$$

где связь между углом θ_T и w задается уравнением (14): $w = 0.5[\varepsilon + 1 - (\varepsilon - 1) I_1(\operatorname{tg} \theta_T)]$.

Уравнение (20) может быть решено аналитически, если для функции тока использовать подстановку $\psi = R^2 \Psi(\theta)$. Эта подстановка согласуется со скейлингом (13). После несложных вычислений находим выражения для компонент скорости:

$$v_{\theta} = \frac{I_0}{2\pi e \mu_+ \eta \sin^2 \theta_T} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) (\cos \theta_T - \cos \theta),$$

$$v_R = -\frac{I_0}{4\pi e \mu_+ \eta \sin^2 \theta_T} (1 + \cos \theta_T - 2 \cos \theta). \quad (25)$$

Здесь использовано условие сохранения потока жидкости: $2\pi R^2 \int_0^{\theta_T} v_R \sin \theta d\theta = 0$. Согласно формуле (25) поток вблизи поверхности конуса направлен к вершине, а вблизи оси конуса – от вершины к основанию. Такое поведение соответствует вихревому движению, которое действительно наблюдалось в эксперименте [13, 14]. Интересно отметить, что величина скорости зависит только от угла θ и не зависит от расстояния до вершины конуса R . Это отличается от полученных ранее в [15, 16] результатов, согласно которым скорость потока жидкости при приближении

к вершине конуса увеличивается. Последнее обстоятельство связано с использованием различных приближений для напряженности электрического поля. Поскольку скорость дрейфа ионов растет при приближении к вершине конуса, а скорость потока жидкости постоянна, пренебрежение током, индуцированным потоком жидкости, является оправданным. Число Рейнольдса пропорционально R и мало вблизи вершины.

Связь между током I_0 и углом конуса θ_T определяется из первого уравнения (22) после подстановки в него выражения для нормальной электрической силы (24), а также вязкого напряжения и давления, полученных с учетом поля скоростей (25):

$$I_0 = \pi \alpha \epsilon \mu_+ J^{-1}(\theta_T), \quad J(\theta_T) = \frac{1}{\sin \theta_T} + \frac{1}{2w \cos \theta_T} \left[\frac{\epsilon - w^2}{(\epsilon - 1)I_2(\text{tg } \theta_T)} + \frac{(\epsilon - 1)I_2(\text{tg } \theta_T)}{4} \right]. \quad (26)$$

Зависимость величины тока от угла показана на рис. 2. Соответствующий график состоит из одной

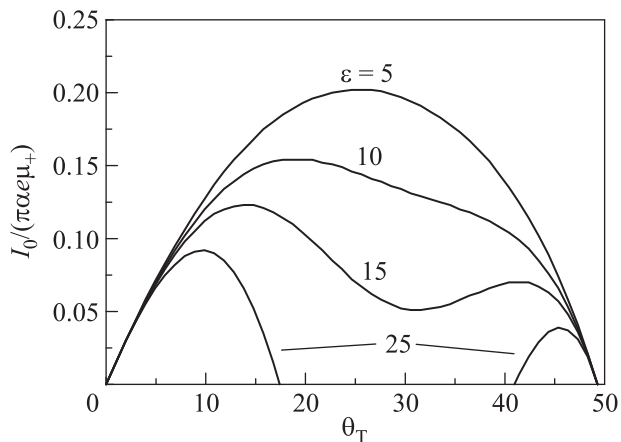


Рис. 2. Зависимость тока от угла при вершине

ветви при $\epsilon < 17.6$ и из двух ветвей при $\epsilon > 17.6$, что связано с существованием области запрещенных углов. Интересно отметить, что при фиксированном ϵ имеется ограничение на максимальное значение тока, который может проходить через конус. Величина тока в уравнении (26) должна определяться из решения электростатической задачи во всей области пространства. Исключение с помощью (26) I_0 из уравнений (25) позволяет найти скейлинговую зависимость скорости жидкости в конусе от параметров: $v_\theta \sim v_R \sim \alpha/\eta$. Опущенные здесь коэффициенты зависят от угла при вершине. Аналогично можно получить скейлинговую зависимость для напряженности

электрического поля: $E_{i,\theta} \sim E_{o,\theta} \sim E_{i,R} \sim E_{o,R} \sim \sqrt{\frac{\alpha}{\epsilon_0 R}}$. Она совпадает со скейлингом для поля конуса Тейлора.

Рассмотрим ограничения, следующие из сформулированных ранее предположений. Они сводятся к условию доминирования дрейфового тока над током проводимости в объеме и током за счет движения жидкости, а также к доминированию поля конуса над внешним полем. Последнее условие означает необходимость выполнения неравенства $\sigma > \epsilon_0 E_0$. Это неравенство справедливо, если внешнее поле достаточно мало. Характерный радиус r_1 , при котором дрейфовый ток становится порядка тока за счет течения жидкости, находится из условия $v_\tau \simeq e\mu_+ E_\tau$. Он равен

$$r_1 = \frac{(e\mu_+\eta)^2}{\alpha\epsilon_0} \frac{I_2(\text{tg } \theta_T)J(\theta_T)\sin^5 \theta_T}{w \cos^2 \theta_T (1 - \cos \theta_T)^2}. \quad (27)$$

Значение радиуса r_0 оценим путем сравнения дрейфового тока и тока в объеме конуса. В силу сохранения потока ток в объеме равен

$$\Delta I = 2\pi K \sin \theta_T \int_0^{r_0/\sin \theta_T} E_{i,\theta} R dR. \quad \text{Из условия } \Delta I \simeq I_0 \text{ находим}$$

$$r_0 = \left(\frac{\alpha\epsilon_0 w}{I_2(\text{tg } \theta_T)J(\theta_T)} \right)^{1/3} \left[\frac{3e\mu_+ P_{1/2}(\cos \theta_T) \sin \theta_T}{4K |P'_{1/2}(\cos \theta_T)|} \right]^{2/3}. \quad (28)$$

Характерный размер основания конуса можно оценить как $r_c \simeq \min\{r_0, r_1\}$.

Таким образом в настоящей работе, на основе анализа электрогидродинамических уравнений исследованы параметры стационарных конусов, формирующихся на поверхности проводящих жидкостей в электрическом поле. Показано, что угол раствора конуса зависит от величины тока эмиссии ионов из его вершины. При этом величина тока ограничена некоторым максимальным значением, зависящим от диэлектрической проницаемости жидкости. Вопросы, связанные с устойчивостью конуса и процессами диспергирования жидкости, требуют дальнейшего рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант # 14-23-00003).

1. J. Zeleny, Phys. Rev. **10**, 1 (1917).
2. G. I. Taylor, Proc. R. Soc. Lond. A. **280**, 383 (1964).
3. D. H. Reneker, A. L. Yarin, E. Zussman, and H. Xu, Adv. in Appl. Mech. **41**, 43 (2007).
4. J. Fernández de la Mora, Annu. Rev. Fluid Mech. **39**, 217 (2007).

5. А. И. Жакин, УФН **183**, 153 (2013).
6. A. Romas and A. Castellanos, Phys. Lett. A **184**, 268 (1994).
7. J. Fernández de la Mora, J. Fluid Mech. **243**, 561 (1992).
8. H. Li, T. C. Halsey, and A. Lobkovsky, Europh. Lett. **27**, 575 (1994).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, М. (1986).
10. И. Е. Тамм, *Основы теории электричества*, Наука, М. (1989).
11. Н. Н. Мирюлюбов, М. В. Костенко, М. Л. Левинштейн, Н. Н. Тиходеев, *Методы расчета электростатических полей*, Высшая школа, М. (1963).
12. Д. Ф. Белоножко, А. И. Григорьев, ЖТФ **74**, 22 (2004).
13. I. Hayati, A. I. Bailey, and Th. F. Tadros, Nature **319**, 41 (1986).
14. А. И. Жакин, П. А. Белов, *Электронная обработка материалов* **49**, 52 (2013).
15. I. Hayati, Coll. Surf. **65**, 77 (1992).
16. L. T. Cherney, J. Fluid Mech. **387**, 167 (1999).