

Низкочастотные субгармоники в турбулентном спектре на поверхности жидкого водорода

М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, И. А. Ремизов¹⁾

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 30 сентября 2014 г.

Приведены результаты изучения двумерной волновой турбулентности на заряженной поверхности жидкого водорода в прямоугольной ячейке. Обнаружено, что в электрическом поле, частично компенсирующем гравитационное поле Земли, при интенсивной монохроматической накачке на частотах 14–30 Гц наряду с прямым турбулентным каскадом капиллярных волн Колмогорова-Захарова на поверхности жидкости с некоторой задержкой во времени могут наблюдаться несоизмеримые субгармоники на низких частотах вплоть до 0.8 Гц. Нелинейное взаимодействие этих субгармоник между собой и с волной, возбуждаемой на частоте накачки, приводит к появлению в прямом турбулентном спектре дополнительных комбинационных волн.

DOI: 10.7868/S0370274X14220147

Введение. В данной работе приведены результаты изучения турбулентных явлений на заряженной поверхности жидкого водорода в прямоугольной ячейке (двумерная турбулентность) в “растягивающем” электрическом поле, частично компенсирующем гравитационное поле Земли. Обнаружено, что при монохроматической накачке на частотах 14–30 Гц слабая ($\sim 1\%$) расстройка частоты накачки относительно частоты собственных колебаний поверхности жидкости в ячейке может приводить к существенному изменению стационарного спектра колебаний. С повышением интенсивности накачки в регистрируемом спектре наряду с прямым капиллярным каскадом Колмогорова–Захарова [1, 2], который наблюдается в широком инерционном интервале, обнаруживается серия из нескольких несоизмеримых субгармоник, генерируемых на низких частотах вплоть до 0.8 Гц. При этом в прямом каскаде появляются дополнительные комбинационные частоты, обусловленные нелинейным взаимодействием субгармоник с волной, генерируемой на частоте накачки. Дальнейшие исследования динамики установления стационарных спектров показали, что при ступенчатом повышении интенсивности накачки субгармоники и комбинационные частоты появляются в спектре колебаний и выходят на стационарные значения с некоторой задержкой во времени по сравнению с волной, возбуждаемой на частоте накачки, и гармониками этой волны в прямом каскаде. Это подтверждает вывод о том, что комбинационные волны в прямом кас-

каде возникают вследствие нелинейного взаимодействия субгармоник с волной, возбуждаемой на частоте накачки, и указывает, что со временем происходит перераспределение направления потока энергии. В стационарном состоянии поток энергии направлен не только вдоль инерционного интервала от волны накачки в сторону высоких частот, где на краю инерционного интервала волновой перенос энергии сменяется вязким затуханием в объеме, но и в сторону низкочастотных субгармоник, где диссипация волновой энергии обусловлена трением жидкости о дно и стенки ячейки. Большинство из приводимых в данном сообщении результатов получено впервые.

Методика эксперимента. Жидкий водород заполнял прямоугольную рабочую ячейку длиной $a = 4.0$ см, шириной $b = 2.0$ см и глубиной $h = 0.35$ см. Измерения проводились при постоянной температуре $T = 15.6$ К. Для возбуждения волн на поверхности жидкости мы воспользовались разработанной ранее в нашей лаборатории методикой генерации волн на заряженной поверхности криогенных жидкостей внешним переменным электрическим полем [3, 4]. Источник зарядов располагался на дне металлической ячейки. Над поверхностью жидкости на расстоянии $d = 0.35$ см от края ячейки был расположен плоский металлический коллектор тех же размеров. При приложении постоянного напряжения U_{dc} между ячейкой и коллектором под поверхностью жидкости образуется квазидвумерный слой заряженных частиц, который экранирует электрическое поле в объеме жидкости. Знак зарядов, локализующихся в тонком слое под поверхностью жидкого водорода,

¹⁾e-mail: remizov@issp.ac.ru

определяется полярностью приложенного напряжения. В данных экспериментах мы изучали колебания положительно заряженной поверхности, так что электрическое поле $E_{dc} = U_{dc}/d$ частично компенсировало силу гравитационного притяжения на поверхности жидкости. С учетом конечной глубины ячейки и влияния перпендикулярного электрического поля в зазоре между коллектором и заряженной поверхностью (конденсаторное приближение) закон дисперсии поверхностных волн может быть записан в виде [5]

$$\omega^2 = k \left(g + \frac{\sigma}{\rho} k^2 - \frac{P}{\rho} k \operatorname{cth} kd \right) \operatorname{th} kh, \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения, σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, $P = E_{dc}^2/8\pi = (U_{dc}/d)^2/8\pi$ – давление электрического поля на поверхность жидкости в плоском конденсаторе. В обсуждаемых ниже измерениях постоянное напряжение U_{dc} , как правило, составляло 800 В. На рис. 1 приведены результаты расчета закона дисперсии волн на свободной поверхности жидкого водорода (“глубокая вода”; кривая 1) и на поверхности жидкости в рабочей ячейке при различных напряжениях U_{dc} (кривые 2, 3 и 4, $U_{dc} = 0, 800$ и 1800 В соответственно). Точками на кривых 3, 4 указаны частоты собственных колебаний поверхности жидкости в прямоугольной ячейке. Волновые числа собственных колебаний поверхности жидкости в прямоугольной ячейке определяются выражением $k_{mn} = \pi[(m/a)^2 + (n/b)^2]^{1/2}$, где a и b – линейные размеры ячейки, m и n – целые числа.

Как видно из рис. 1, поле E_{dc} частично компенсирует поле земного притяжения, что приводит к смягчению спектра поверхностных волн. С повышением приложенного напряжения U_{dc} область частот, где в выражении (1) преобладает вклад капиллярной составляющей, расширяется вплоть до частот $f = \omega/2\pi$ порядка нескольких Гц (почти на порядок ниже граничной частоты $f_c = 16$ Гц, разделяющей области капиллярных и гравитационных волн на свободной поверхности жидкого водорода). Для наглядности на рис. 1 приведена сплошная прямая, которая соответствует линейному закону дисперсии $f \sim k$. Если зависимость $f(k)$ аппроксимировать степенным законом $f \sim k^m$, то при напряжениях $U_{dc} \geq 800$ В на низких частотах ($f \leq 2$ Гц; гравитационные волны) показатель степени $m < 1$ и при нелинейном взаимодействии между волнами здесь будет преобладать нераспадный закон дисперсии [1]. При частотах же $f \geq 3$ Гц показатель степени $m \geq 1$, т.е. должен преобладать распадный закон дисперсии.

Для генерации колебаний на поверхности заряженной жидкости последовательно с постоянным напряжением U_{dc} мы прикладывали переменное напряжение $U_{ac}(t) = U_p \sin(\omega t)$, амплитуда U_p которого задавалась внешним генератором напряжения. Вследствие неоднородности электрического поля на краях ячейки на жидкость действует переменная сила, которая приводит к возбуждению на поверхности волн той же частоты ω .

О колебаниях поверхности жидкости судили по отражению лазерного луча, ориентированного вдоль продольной оси прямоугольной ячейки под малым углом $\alpha \approx 0.2$ рад к горизонтальной поверхности. В центре коллекторной пластины была вырезана щель шириной 12 мм, что позволяло выводить из ячейки отраженный луч при больших углах отражения. Отраженный луч с помощью линзы фокусировался на поверхность фотодиода. Выходной сигнал фотоприемника, пропорциональный мощности отраженного луча $P(t)$, записывался в память компьютера с помощью 24-разрядного аналого-цифрового преобразователя с частотой опроса 102.4 кГц в течение 1–1.5 мин. Далее изучались вариации со временем полной мощности $P(t)$. Конечная ширина щели ограничивала возможности регистрации лучей, отраженных под большими углами к продольной оси щели. Поэтому основной вклад в модуляцию $P(t)$ давали только те волны, волновой вектор которых лежит близко к плоскости падения светового луча. Это следует учитывать при обсуждении результатов измерений.

При обработке результатов измерений мы анализировали частотный спектр мощности отраженного лазерного луча P_ω , получаемый фурье-преобразованием по частоте временной зависимости $P(t)$. Связь между спектром P_ω^2 и спектром парной корреляционной функции отклонения поверхности от плоскости $\langle |\eta_\omega|^2 \rangle$ зависит от соотношения между длиной волны λ и диаметром светового пятна d_l . Средний диаметр овального светового пятна в наших экспериментах составлял $d_l \approx 0.5$ см. Поскольку при обсуждении результатов измерений нас будет интересовать в основном область частот $0.8 \leq f \leq 30$ Гц, где волновой вектор изменяется в пределах $0.8 \leq k \leq 10$ см⁻¹ (см. рис. 1), можно ограничиться случаем $\lambda > d_l$ ($k < 2\pi/0.5 = 12$ см⁻¹). Как показано в [3, 4], при $\lambda > d_l$ и малых углах отражения φ квадрат мощности $P_\omega^2 \sim \varphi_\omega^2 \sim k^2 |\eta_\omega|^2$. В интересующей нас области частот при $U_{dc} \geq 800$ В зависимость $f(k)$ близка к линейной (прямая на рис. 1). В результате в первом приближении корреляционная функция $\langle |\eta_\omega|^2 \rangle \sim P_\omega^2/\omega^2$. Поэтому

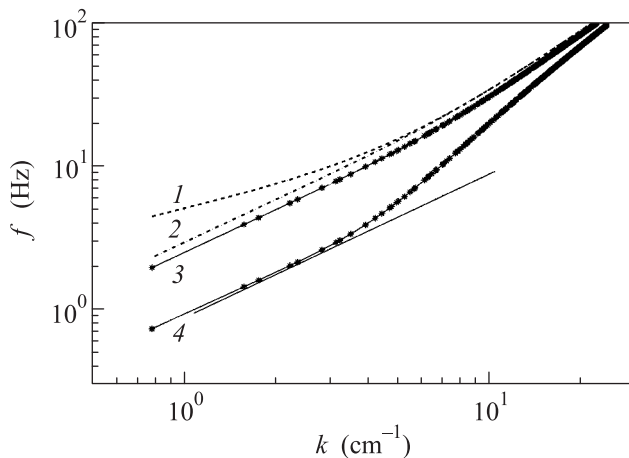


Рис. 1. Закон дисперсии волн на поверхности жидкого водорода: 1 – свободная поверхность жидкости; 2, 3 и 4 – спектры колебаний поверхности жидкости в рабочей ячейке при $U_{dc} = 0, 800$ и 1800 В соответственно. Точками на кривых указаны частоты собственных колебаний поверхности жидкости в прямоугольной ячейке. Сплошная прямая – линейный закон дисперсии ($f \sim k$)

при оценке соотношений между амплитудами низкочастотных волн на поверхности жидкости по значениям амплитуд пиков субгармоник на приводимых ниже графиках P_{ω}^2 (рис. 2) нужно учитывать сомножитель, пропорциональный $1/\omega^2$.

Результаты измерений. На рис. 2а показан спектр колебаний P_{ω}^2 , который наблюдался при $U_{dc} = 800$ В и монохроматической накачке с амплитудой $U_p = 220$ В на частоте $f_p = \omega/2\pi = 28.5$ Гц, соответствующей одной из продольных резонансных мод ячейки с волновым числом $k \approx 10$ см $^{-1}$. Стрелка указывает положение стоячей волны на частоте f_p . В интервале частот от 100 Гц до нескольких килогерц распределение амплитуд гармоник по частотам P_{ω}^2 можно описать степенным законом, близким к кубическому. Это указывает на возникновение прямого турбулентного каскада капиллярных волн Колмогорова–Захарова [1, 2]. Пики на частотах, кратных частоте накачки, соответствуют гармоникам, возникающим вследствие процессов слияния капиллярных волн. Низкочастотные шумовые сигналы в диапазоне 5–20 Гц, наблюдавшиеся в данных измерениях и в отсутствие накачки, обусловлены шумовыми колебаниями поверхности жидкости вследствие неконтролируемой вибрации здания и экспериментальной установки (подчеркнем, что амплитуда шумов на несколько порядков ниже амплитуды пика на частоте накачки).

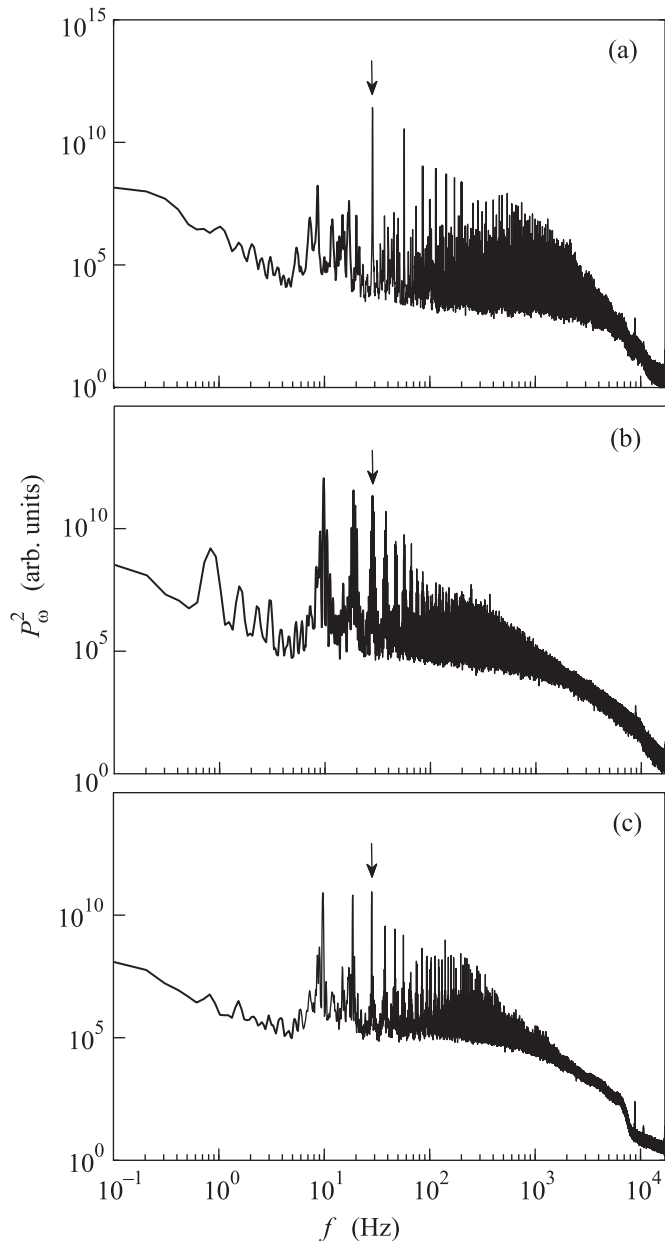


Рис. 2. Стационарные спектры P_{ω}^2 при гармонической накачке. Стрелки указывают на положение частоты накачки. (а) – Накачка на частоте $f_p = 28.5$ Гц. Амплитуда переменного напряжения $U_p = 220$ В. (б) – Появление пиков на частотах $f_1 = 9.7$ Гц, $f_2 = 18.6$ Гц и $f_3 = 0.8$ Гц при понижении частоты накачки до $f_p = 28.2$ Гц при $U_p = 220$ В. (с) – Накачка на частоте $f_p = 28.2$ Гц. Амплитуда накачки $U_p = 125$ В

Измерения, результаты которых показаны на рис. 2б, были проведены сразу же вслед за измерениями с рис. 2а. Частоту накачки понизили ступенькой до $f_p = 28.2$ Гц при неизменной амплитуде накачки $U_p = 220$ В. Видно, что изменение частоты при-

вело к появлению в стационарном спектре P_ω^2 двух субгармоник на несоизмеримых частотах $f_1 = 9.7$ Гц и $f_2 = 18.6$ Гц, которые лежат в области преобладания в дисперсионном соотношении (1) капиллярного слагаемого, а также низкочастотной субгармоники на частоте $f_3 = 0.8$ Гц (область гравитационных волн; см. рис. 1) и нескольких кратных ей гармоник. Сумма частот субгармоник f_1 и f_2 совпадает с частотой волны, возбуждаемой на частоте накачки, $f_p = f_1 + f_2$. Таким образом возникновение этих субгармоник может быть связано с трехволновым процессом – распадом волны f_p на две несоизмеримые волны. С появлением этих субгармоник высокочастотная область спектра также заметно изменяется. В прямом каскаде появляются дополнительные пики на комбинационных частотах вследствие взаимодействия субгармоник f_1 и f_2 с волной на частоте накачки f_p (трехволновой процесс: $f = f_p + f_{1,2}$). Появление в спектре низкочастотной субгармоники $f_3 = 0.8$ Гц можно приписать проявлению четырехволновых процессов, например $f_1 + f_1 \Rightarrow f_2 + f_3$ либо трехволновых процессов, $2f_1 \Rightarrow f_2 + f_3$.

На рис. 2с показаны результаты измерений стационарного спектра на той же частоте $f_p = 28.2$ Гц после получасовой выдержки при постоянной температуре. В этих измерениях амплитуду накачки понизили до $U_p = 125$ В. Видно, что амплитуды пиков субгармоник на частотах $f_1 = 9.7$ Гц и $f_2 = 18.6$ Гц по-прежнему сравнимы с амплитудой волны на частоте накачки. Сохранились в прямом каскаде и соответствующие им комбинационные частоты. Вместе с тем амплитуды пика на частоте f_3 и его гармоники с понижением интенсивности накачки уменьшились более чем на два порядка и практически не различимы на фоне шумов.

На рис. 3 показаны результаты динамических измерений, в которых изучалась эволюция спектра мощности отраженного луча P_ω со временем при ступенчатом повышении амплитуды накачки U_p от 120 до 220 В через 15 с после включения записи. Частота накачки $f_p = 28.2$ Гц. Видно, что спектр P_ω выходит на стационарное состояние через ≈ 15 с после переключения напряжения U_p . Штриховая кривая описывает зависимость от времени амплитуды пика на частоте $f_p = 28.2$ Гц. В интервале $t = (0-15)$ с на кривой P_ω виден только прямой стационарный каскад капиллярных волн. Субгармоники отсутствуют (аналог рис. 2а). Амплитуда пика на частоте f_p постоянна. В момент $t = 15$ с, когда напряжение U_p скачком повышается до 220 В, амплитуда гармоники на частоте накачки f_p начинает возрастать. В последующие 6–7 с амплитуда пика возрастает почти

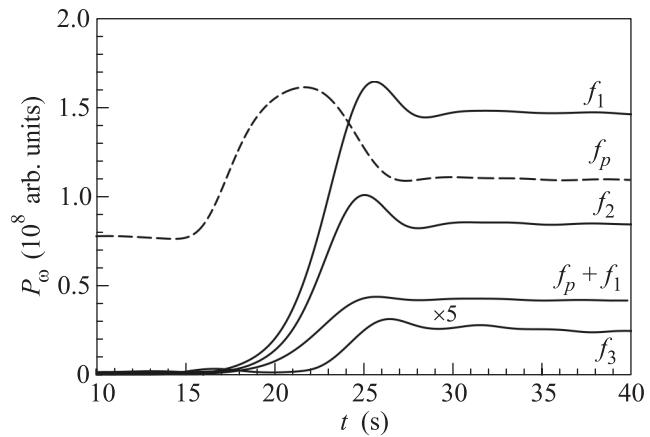


Рис. 3. Временная эволюция спектра P_ω при ступенчатом повышении амплитуды накачки U_p от 120 до 220 В через 15 с после начала записи. Частота накачки $f_p = 28.2$ Гц. Штриховая кривая – зависимость от времени амплитуды пика на частоте накачки. Сплошные кривые – амплитуды субгармоник $f_1 = 9.7$ Гц, $f_2 = 18.6$ Гц и $f_3 = 0.8$ Гц (амплитуда волны f_3 умножена на 5). Пунктирная кривая – комбинационная частота $f = f_p + f_1 = 37.9$ Гц

вдвое, а в спектре P_ω с задержкой во времени появляются пики, соответствующие генерации субгармоник на частотах $f_1 = 9.7$ Гц, $f_2 = 18.6$ Гц и $f_3 = 0.8$ Гц (сплошные кривые; для удобства восприятия амплитуда волны f_3 умножена на 5). Амплитуды субгармоник f_1 и f_2 достигают максимума с задержкой в 4–5 с относительно положения максимума волны на частоте накачки f_p , а также волн, кратных f_p , в прямом каскаде (на рис. 3 не показаны). Время установления стационарного значения амплитуды комбинационной частоты $f = f_p + f_1 = 37.9$ Гц в прямом каскаде практически совпадает с временем выхода на стационарное значение субгармоники f_1 (сплошная кривая). Таким образом, как было отмечено выше, комбинационная частота возникает в результате взаимодействия субгармоники f_1 с волной на частоте накачки f_p . Аналогичным образом возрастает амплитуда комбинационной волны на частоте $f_p + f_2$ (на рисунке не показана). Самая низкочастотная гармоника, $f_3 = 0.8$ Гц, генерацию которой можно связать с проявлением процесса четырехволнового взаимодействия $f_3 = 2f_1 - f_2$, достигает максимума с задержкой в ≈ 1 с относительно субгармоник f_1 и f_2 .

Обсуждение. Эволюцию стационарных спектров при малых расстройках частоты накачки или при повышении амплитуды накачки, аналогичную показанной на рис. 2 и 3, мы наблюдали также при накачке на частотах вблизи 14 и 29 Гц. Значения час-

тоты субгармоники f_3 варьировались от эксперимента к эксперименту в пределах 0.8–1.2 Гц. Одной из причин подобных вариаций могла послужить небольшая (в пределах десятых мм) разница в уровне жидкости в ячейке от опыта к опыту или частичная переконденсация жидкого водорода с более теплых деталей прибора на более холодные (например, на капилляр набора) при длительных выдержках между измерениями (как на рис. 2с). В то же время при накачке на частотах, близких к 19 Гц, наблюдался только прямой турбулентный каскад, как и при накачке на 28.5 Гц (рис. 2а). Таким образом, удовлетворить требованиям законов сохранения энергии и импульса при генерации субгармоник удастся только на некоторых из указанных на рис. 1 резонансных частотах.

Нам впервые удалось пронаблюдать возникновение серии субгармоник на поверхности жидкого водорода при интенсивной монохроматической накачке. Ранее в экспериментах с жидким водородом в цилиндрической ячейке [3, 4, 6] мы наблюдали формирование только прямого турбулентного каскада. Для изучения эволюции турбулентного спектра с изменением формы сигнала накачки и возбуждения низкочастотной субгармоники и соответствующих ей комбинационных гармоник в прямом каскаде в цилиндрической ячейке использовалась другая методика [7, 8]: одновременная накачка на двух резонансных частотах, сумма или разность которых соответствует одной из собственных мод ячейки.

Сравнение результатов исследований спектров поверхностных волн в цилиндрической (одномерная турбулентность) и в прямоугольной (двумерная турбулентность) ячейках указывает на то, что изменение геометрии ячейки (граничных условий при возбуждении колебаний) может существенно сказаться на результатах измерений. Плотность собственных волновых векторов в дискретном k -пространстве в прямоугольной ячейке много выше, чем в цилиндрической. Это облегчает условия наблюдения низкочастотных субгармоник при интенсивной накачке в прямоугольной ячейке. Появление в стационарном спектре субгармоник на частотах $f_1 = 9.7$ Гц и $f_2 = 18.6$ Гц при понижении частоты накачки с 28.5 до 28.2 Гц, т.е. расстройке частоты накачки на 1% (см. рис. 2), или при повышении напряжения U_p от 120 до 220 В (рис. 3) свидетельствует о существовании некоторых пороговых условий, достаточных для возникновения неустойчивости в турбулентном спектре и генерации субгармоник в системе капиллярно-гравитационных волн в прямоугольной ячейке.

Как следует из рис. 1, на частотах $f > 3$ Гц в дисперсионном выражении $f \sim k^m$ показатель степени

$m > 1$. Поэтому возникновение субгармоник на частотах $f_1 = 9.7$ Гц и $f_2 = 18.6$ Гц может быть связано с трехволновым процессом распада волны на частоте накачки $f_p = 28.2$ Гц. Аналогичным образом можно объяснить последующее появление комбинационных частот в прямом каскаде: слияние волны на частоте накачки с одной из субгармоник, $f_p + f_1 \Rightarrow f = 28.2 + 9.7 = 37.9$ Гц, и, соответственно, $f_p + f_2 \Rightarrow 46.8$ Гц (рис. 2 и 3). В то же время генерацию низкочастотной субгармоники с частотой $f_3 = 0.82$ Гц можно связать с преобладанием четырехволнового процесса при взаимодействии субгармоник между собой (при $f < 3$ Гц в дисперсионном выражении $f \sim k^m$ показатель степени $m \leq 1$).

При обсуждении методики эксперимента было указано, что на частотах ниже 20 Гц в первом приближении корреляционная функция, описывающая отклонение поверхности от плоскости, $\langle |\eta_\omega|^2 \rangle \sim P_\omega^2 / \omega^2$. Таким образом, при оценке соотношений между амплитудами низкочастотных волн на поверхности жидкости по значениям амплитуд пиков субгармоник на рис. 2 и 3 нужно учитывать существование сомножителя, пропорционального $1/\omega^2$. Отсюда следует, что относительная величина амплитуды колебаний поверхности на частотах $f_3 \leq 1$ Гц может в несколько раз превосходить амплитуды волн субгармоник f_1 и f_2 , т.е. оказаться достаточной, для возбуждения ее гармоник на частотах $2f_3$ и $3f_3$, которые четко различимы на фоне шума на рис. 2б.

Результаты проведенных в последние годы компьютерных экспериментов [9, 10, 11] указывают на возможность возникновения одновременно прямого и обратного каскадов при возбуждении колебаний поверхности в ячейках конечных размеров. Правда, в этих расчетах авторы задавались асимптотическими приближениями дисперсионного закона для описания поведения гравитационных $\omega \sim k^{1/2}$ и капиллярных $\omega \sim k^{3/2}$ волн, что существенно отличается от реальной зависимости $\omega(k)$ в условиях наших измерений (рис. 1). Было бы интересно теоретически исследовать также и динамику установления стационарных спектров при ступенчатом изменении частоты и амплитуды возбуждающей силы.

Заключение. Мы исследовали возбуждение капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкого водорода в прямоугольной ячейке за счет гармонической внешней накачки в присутствии тянущего электрического поля. Дискретность в спектре колебаний волн в ячейке конечных размеров играет существенную роль во взаимодействии волн между собой. Это проявляется, в частности, в том, что в стационарных спектрах наблюдаются только

некоторые из низкочастотных гармоник. Обнаружено, что при определенном подборе частоты накачки и ее достаточной амплитуде нелинейное взаимодействие поверхностных волн приводит к возбуждению нескольких несоизмеримых по частоте субгармоник. Появление субгармоник связано с процессами трехволнового и четырехволнового взаимодействия. Амплитуды субгармоник и соответствующие им комбинационные частоты в прямом капиллярном каскаде обладают медленной динамикой, связанной, по-видимому, с близостью амплитуды волны, генерируемой на частоте накачки, к порогу возбуждения. Таким образом, нами экспериментально обнаружено новое явление, связанное с нелинейным взаимодействием поверхностных волн в ограниченной системе.

Авторы благодарны А.И. Дьяченко, Е.И. Кацу, И.В. Колоколову, В.В. Лебедеву и Г.В. Колмакову за полезные обсуждения. Исследования проведены при поддержке РФФИ, проект #14-22-00259 “Исследования стохастических процессов в тонких жидких слоях и границах раздела”.

1. V. Zakharov, V. Lvov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I*, Springer-Verlag, Berlin (1992), v. 1.
2. V. Zakharov, F. Dias, and A. Pushkarev, *Phys. Rep.* **398**, 1 (2004).
3. М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, *Приборы и техника эксперимента* **45**, 31 (2002).
4. M. Yu. Brazhnikov, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhev-Deglin, *Instrum. Exp. Tech.* **45**(6), 758 (2002).
5. Д. М. Черникова, *ФНТ* **2**, 1374 (1976).
6. G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, M. Yu. Brazhnikov, L. P. Mezhev-Deglin, A. N. Silchenko, and P. V. E. McClintock, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 074501 (2004).
7. М. Ю. Бражников, Г. В. Колмаков, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, *Письма в ЖЭТФ* **82**(9), 642 (2005).
8. M. Yu. Brazhnikov, G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhev-Deglin, *JETP Lett.* **82**(9), 565 (2005).
9. А. О. Korotkevich, *Письма в ЖЭТФ* **97**(3), 145 (2013).
10. А. О. Korotkevich, *JETP Lett.* **97**(3), 126 (2013).
11. L. V. Abdurakhimov, I. A. Remizov, A. A. Levchenko, G. V. Kolmakov, and Yu. V. Lvov, arxiv.org/pdf/1404.1111 (2014).