

# Квантованная оптическая мода в цепи обратной связи с переключением фазы

В. А. Томили<sup>1)</sup>, Л. В. Ильичёв

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет  
630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 8 октября 2014 г.

Исследуется стационарное состояние квантованной монохроматической электромагнитной моды в резонаторе, возбуждаемой монохроматической когерентной накачкой и помещенной в цепь обратной связи, которая меняет фазу моды на  $\pi$  после каждой регистрации фотона, покинувшего резонатор. На таком типе обратной связи основан метод предотвращения разрушения когерентности в состояниях типа “кошки Шредингера”. Приведены результаты численного определения  $P$ -функции Глаубера при разных значениях отстройки частоты моды от частоты накачки. Дано качественное объяснение некоторых особенностей структуры  $P$ -функции. В случае, когда собственная частота резонатора и частота внешней когерентной накачки сильно различаются, предложена упрощенная модель, позволяющая с достаточной степенью точности описывать поведение системы.

DOI: 10.7868/S0370274X14230143

**Введение.** Интенсивно развивающиеся инженерия и контроль квантовых состояний в решающей степени основаны на использовании обратной связи, которая также имеет множество приложений в области квантовой информатики и квантовой криптографии [1]. Квантовая оптика является наиболее естественным полем исследования и использования обратной связи как уникального инструмента для создания экзотических фотонных состояний. Среди них выделяются так называемые кошки Шредингера [2] – суперпозиции когерентных состояний, демонстрирующие яркие неклассические свойства. Эти состояния обещают стать основой новых методов в квантовой метрологии, в частности в интерферометрических детекторах гравитационных волн [3]. Обратная связь, рассматриваемая в настоящей работе, принципиально важна для контроля и предотвращения декогеренции в “кошках Шредингера”. В связи с этим уместно сделать небольшое отступление для иллюстрации важности данного типа квантовой обратной связи и мотивации его исследования.

Когерентное состояние Глаубера  $|\alpha\rangle$  (собственное для оператора уничтожения фотона:  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ), как известно, является наиболее близким квантовым представителем классической электромагнитной моды. При этом  $\alpha$  отвечает комплексной амплитуде мо-

ды. Состояние моды в резонаторе с конечным временем жизни  $\gamma^{-1}$  фотона подчинено уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_t = \gamma\hat{a}\hat{\rho}_t\hat{a}^\dagger - \frac{\gamma}{2}\hat{n}\hat{\rho}_t - \frac{\gamma}{2}\hat{\rho}_t\hat{n}, \quad (1)$$

где  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$  – оператор числа фотонов. Здесь для простоты исключена собственная свободная динамика гармонической моды. В случае приготовления моды в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$  из (1) имеем

$$\hat{\rho}_0 = |\alpha\rangle\langle\alpha| \rightarrow \hat{\rho}_t = |\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle\langle\alpha e^{-\gamma t/2}|. \quad (2)$$

Происходит экспоненциальное затухание амплитуды моды, но ее состояние остается когерентным. Среди состояний типа “кошек Шредингера” выделяется класс так называемых состояний Юрке–Столера  $|\alpha\rangle_{YS}$ , являющихся собственными по отношению к преобразованному оператору уничтожения фотона [4]:

$$\hat{a}(\pi)|\alpha\rangle_{YS} = \alpha|\alpha\rangle_{YS}, \quad (3)$$

где

$$\hat{a}(\pi) \doteq e^{i\pi\hat{n}}\hat{a} \quad (4)$$

и

$$|\alpha\rangle_{YS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|i\alpha\rangle + i|\alpha\rangle - i|\alpha\rangle\right). \quad (5)$$

Как было показано в [5], процесс гибели фотонов (1) в случае  $|\alpha|^2 \gg 1$ , т.е. при многофотонном состоянии  $|\alpha\rangle_{YS}$ , за время  $(\gamma|\alpha|^2)^{-1} \ll \gamma^{-1}$  превращает чи-

<sup>1)</sup>e-mail: 8342tomilin@mail.ru

стое суперпозиционное состояние (5) в некогерентную смесь:

$$\hat{\rho}_0 = |\alpha\rangle_{\text{YS}}\langle\alpha| \rightarrow \hat{\rho}_t \simeq \frac{1}{2} |i\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle\langle i\alpha e^{-\gamma t/2}| + \frac{1}{2} |-i\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle\langle -i\alpha e^{-\gamma t/2}|. \quad (6)$$

Если, однако, в правой части (1) вместо операторов  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  будут фигурировать  $\hat{a}(\pi)$  и  $\hat{a}^\dagger(\pi)$  (при этом заметим, что  $\hat{a}^\dagger(\pi)\hat{a}(\pi) = \hat{n}$ ), т.е. если диссипация описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_t = \gamma e^{i\pi\hat{n}}\hat{a}\hat{\rho}_t\hat{a}^\dagger e^{-i\pi\hat{n}} - \frac{\gamma}{2}\hat{n}\hat{\rho}_t - \frac{\gamma}{2}\hat{\rho}_t\hat{n}, \quad (7)$$

то из (3) следует прямая аналогия (2):

$$\hat{\rho}_0 = |\alpha\rangle_{\text{YS}}\langle\alpha| \rightarrow \hat{\rho}_t = |\alpha e^{-\gamma t/2}\rangle_{\text{YS}}\langle\alpha e^{-\gamma t/2}|. \quad (8)$$

Состояние “кошки Шредингера” с уменьшенной амплитудой не меняет своей природы<sup>2)</sup>.

Заметим, что отличие (7) от (1) с точки зрения экспериментатора заключается в изменении фазы квантованной моды на  $\pi$  после каждой регистрации фотона, покинувшего резонатор. Это переключение реализуется цепью обратной связи, которая, таким образом, предотвращает декогеренцию состояния  $|\alpha\rangle_{\text{YS}}$ .

Исследования свойств обратной связи (7) с переключением фазы квантованной моды ограничиваются, насколько нам известно, результатами [5]. Между тем в сходной ситуации с переключением фазы классического поля при каждой регистрации спонтанного кванта обнаружены яркие проявления обратной связи в спектре и статистике резонансной флуоресценции двухуровневого атома (или пары атомов) [6]. Есть все основания ожидать у систем с обратной связью типа (7) необычных свойств. В настоящей работе мы исследуем стационарное (кинетическое) состояние квантованной моды, возникающее при совместном действии указанной обратной связи и классического гармонического тока. Последний представляет собой простейшую, но вполне адекватную модель внешней лазерной когерентной накачки резонатора с квантованной модой. Информация о структуре стационарного состояния является первой и необходимой ступенью при исследовании спектра излучения, испускаемого системой, а также статистики событий

<sup>2)</sup>Можно говорить о дуальности нашего мира, условно называемого “миром Глаубера”, и “мира Юрке–Столера”. Законы квантовой оптики в обоих мирах абсолютно тождественны. Однако когерентные состояния одного мира являются состояниями типа “кошки Шредингера” в другом мире. Экспериментальная реализация эволюции (7) представляет собой создание своеобразного заповедника “мира Юрке–Столера” в “мире Глаубера”.

испускания в стационарных условиях. Нами получено численное решение соответствующего квантового кинетического уравнения. Его вид, как оказалось, существенно зависит от разницы между частотой моды и частотой когерентной накачки. Приведены качественные объяснения для характерных диапазонов отстройки частот. При больших отстройках (в масштабе  $\gamma$ ) сформулированы уравнения упрощенной модели, решения которых согласуются с точными результатами.

**Модель.** Рассматривается квантованная мода излучения, находящаяся в оптическом резонаторе и возбуждаемая накачкой в виде внешнего монохроматического источника, отстроенного от собственной частоты резонатора на величину  $-\Delta$ . Гамильтониан системы, из которого исключена гармоническая зависимость от времени амплитуды  $\lambda$  внешнего поля источника [7], имеет вид

$$\hat{H} = \Delta\hat{a}^\dagger\hat{a} + \lambda\hat{a}^\dagger + \lambda^*\hat{a}. \quad (9)$$

Резонатор помещен в цепь обратной связи с переключением фазы моды. Действие обратной связи инициируется детектированием фотонов, необратимо покинувших резонатор (детекторы предполагаются близкими к идеальным, скорость ухода фотонов из резонатора равна  $\gamma$ ).

Кинетическое уравнение для статистического оператора моды  $\hat{\rho}$  включает динамику с гамильтонианом (9) и диссипацию (7):

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_t = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_t] + \gamma e^{i\pi\hat{n}}\hat{a}\hat{\rho}_t\hat{a}^\dagger e^{-i\pi\hat{n}} - \frac{\gamma}{2}\{\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}_t\}. \quad (10)$$

Фигурные скобки в (10) обозначают антикоммутатор. Структура уравнения (10) типична для систем с обратной связью, осуществляемой через измерения [1].

Точное аналитическое решение уравнения (10) получить не удастся. Для численного анализа целесообразно перейти к  $P$ -представлению Глаубера для матрицы плотности [7]:

$$\hat{\rho}_t = \int_{\mathbb{R}^2} P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha. \quad (11)$$

В результате получаем следующее уравнение для функции  $P$ :

$$\partial_t P = \gamma |\alpha|^2 (\bar{P} - P) + \frac{1}{2} \partial_\alpha [(\gamma + 2i\Delta)\alpha + 2i\lambda] P + \frac{1}{2} \partial_{\alpha^*} [(\gamma - 2i\Delta)\alpha^* - 2i\lambda] P, \quad (12)$$

где  $\bar{P} = P(-\alpha, -\alpha^*)$ . Появление данного члена в правой части обусловлено обратной связью.

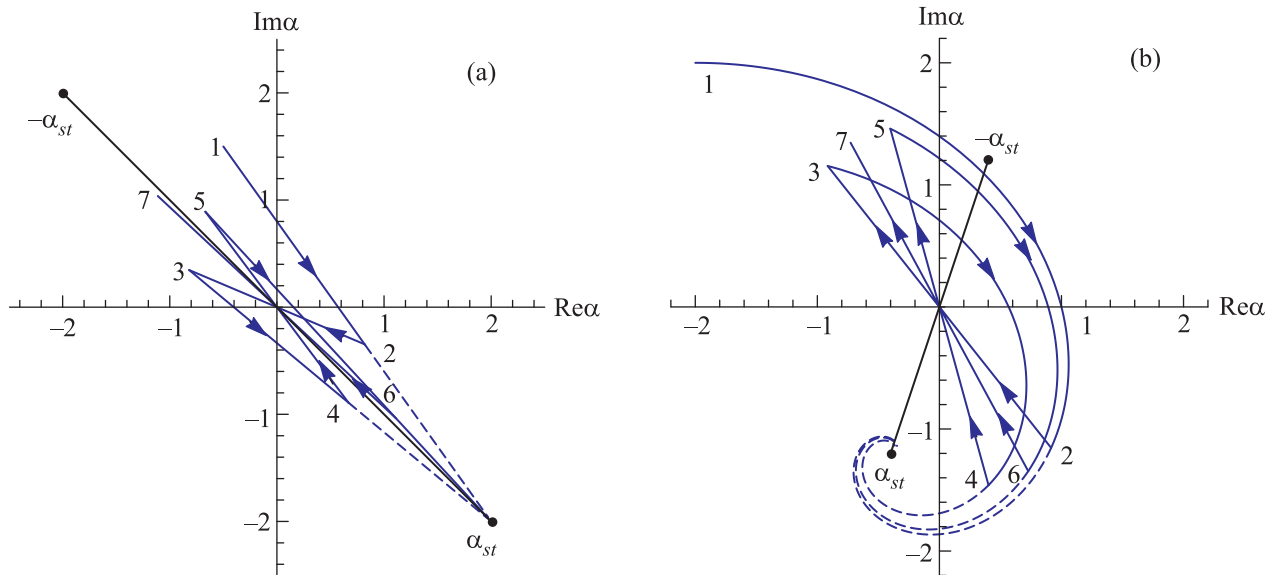


Рис. 1. Примеры реализаций эволюции состояния системы на плоскости когерентных состояний при точном резонансе (а) и при  $\Delta = \gamma$  (б). Фоторегистрация происходит в точках с четными номерами.  $\alpha_{st} = -2i\lambda/(\gamma + 2i\Delta)$ ,  $\lambda = (1 + i)\gamma$

**Результаты и их обсуждение.** В уравнение (12) входят три параметра с размерностью частоты:  $\Delta$ ,  $\lambda$  и  $\gamma$ . В зависимости от соотношения между ними должен меняться характер решения. Предварим изложение результатов численного решения уравнения (12) некоторыми соображениями качественного характера. Заметим, что в промежутках между актами регистрации квантов эволюция (чистого) состояния моды подчинена уравнению

$$\partial_t |\psi_t\rangle = -i \left( \hat{H} - i \frac{\gamma}{2} \hat{n} \right) |\psi_t\rangle. \quad (13)$$

При  $|\psi_0\rangle = |\alpha(0)\rangle$ , т.е. в случае изначального когерентного состояния, из (13) следует  $|\psi_t\rangle \propto |\alpha(t)\rangle$ , где

$$\alpha(t) = \alpha(0) e^{-(\gamma/2 + i\Delta)t} - \frac{2i\lambda}{\gamma + 2i\Delta} \left( 1 - e^{-(\gamma/2 + i\Delta)t} \right). \quad (14)$$

В комплексной плоскости точка  $\alpha(t)$  приближается по спиральной траектории к стационарной точке  $\alpha_{st} = -2i\lambda/(\gamma + 2i\Delta)$ . В случае точного резонанса, т.е. при  $\Delta = 0$ , приближение осуществляется по прямой траектории. Из отрезков таких траекторий, прерываемых случайными актами регистрации фотонов, состоит любая реализация эволюции моды. При каждой регистрации действие обратной связи сводится к отражению параметра  $\alpha_t$  относительно центра комплексной плоскости, после чего начинается новый непрерывный отрезок траектории. Две возможные реализации траекторий представлены на рис. 1. В случае точного резонанса (рис. 1а) прослеживается тенденция приближения кусочно-прямолинейной

траектории к отрезку, соединяющему  $\alpha_{st}$  и  $-\alpha_{st}$ . Можно заключить, что с течением времени множество наиболее вероятных состояний системы будет группироваться вблизи данного отрезка.

Результаты численного решения уравнения (12), представленные на рис. 2а, подтверждают это предположение. Действительно, в случае точного резонанса функция  $P(\alpha, \alpha^*)$  отлична от нуля лишь при  $\alpha = -\frac{2i\lambda}{\gamma}x$ ,  $-1 < x < 1$ . При  $\Delta = \gamma$  в форме  $P$ -функции на рис. 2б, напоминающей развалины Колизея, угадываются спиральные траектории с рис. 1б.

Рассмотрим теперь случай больших значений отстройки. Как можно заключить из рис. 1с, ненулевые значения  $P$ -функции сконцентрированы вблизи точки  $-\lambda/\Delta$ , являющейся пределом  $\alpha_{st}$  при  $|\Delta| \gg \gg \gamma$ . Асимметрия, вносимая точкой  $-\alpha_{st}$ , практически незаметна. Чтобы взглянуть на этот факт с другой точки зрения, заметим, что гамильтониан (9) может быть представлен в виде

$$\hat{H} = \Delta \hat{b}^\dagger \hat{b} - \frac{|\lambda|^2}{\Delta^2}. \quad (15)$$

Здесь

$$\hat{b} = \hat{a} + \frac{\lambda}{\Delta}, \quad \hat{b}^\dagger = \hat{a}^\dagger + \frac{\lambda^*}{\Delta} \quad (16)$$

есть смещенные полевые операторы. Поскольку они удовлетворяют обычным бозонным коммутационным соотношениям, можно рассматривать систему

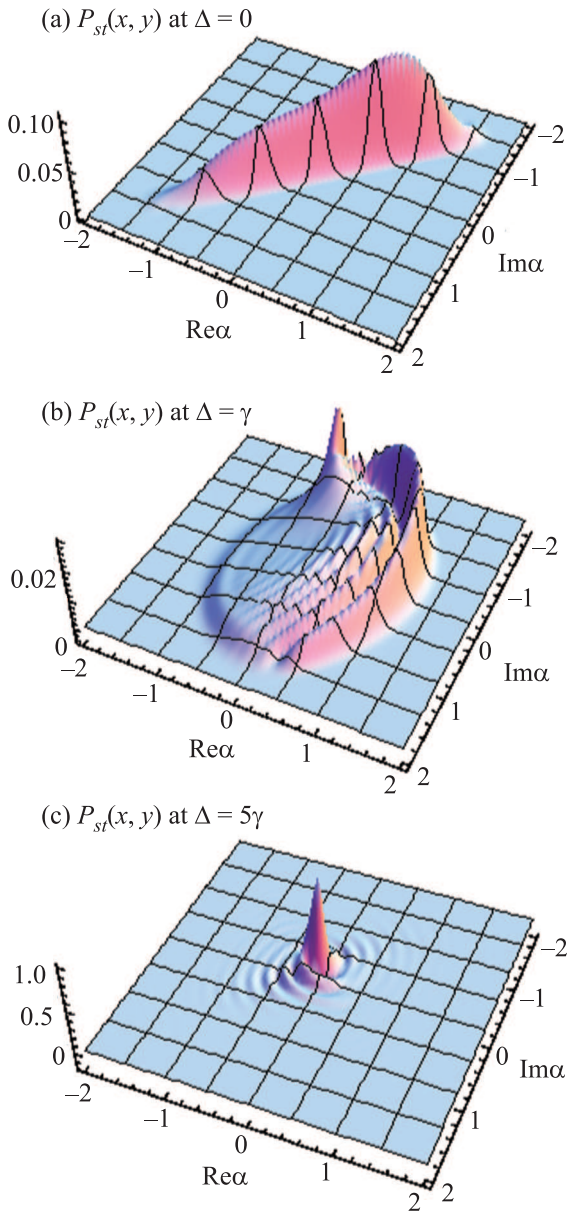


Рис. 2. Стационарное состояние моды при  $\Delta = 0$  (а),  $\gamma$  (б) и  $5\gamma$  (в). В случае (а) ненулевая часть функции  $P$  сосредоточена вблизи отрезка, соединяющего точки  $-2i\lambda/\gamma$  и  $2i\lambda/\gamma$ , а в случае (в) – вблизи точки  $-\lambda/\Delta$ . Значение  $\lambda$  здесь такое же, как и на рис. 1

как эффективный осциллятор с собственными состояниями – смещенным базисом Фока:

$$\begin{aligned} |\tilde{n}\rangle &= \frac{\hat{b}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |\tilde{0}\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, \\ |\tilde{0}\rangle &= |-\lambda/\Delta\rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $|-\lambda/\Delta\rangle$  – когерентное состояние Глаубера, являющееся смещенным вакуумом. Заметим, что базис обычных состояний Фока  $\{|n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$  является есте-

ственным для диссипативной части из (10) в том смысле, что диагональные в этом базисе элементы статистического оператора подчиняются классическому основному кинетическому уравнению, справедливому для марковских процессов [8]. Смещенный фоковский базис  $\{|\tilde{n}\rangle\}_{n=0}^{\infty}$  оказывается естественным для динамической части из (10), поскольку он диагонализует гамильтониан. В режиме  $|\Delta| \gg \gamma$  доминирует смещенный базис. В уравнениях для элементов матрицы плотности  $\rho(n_1|n_2) \doteq \langle \tilde{n}_1 | \hat{\rho} | \tilde{n}_2 \rangle$  в этом базисе достаточно удерживать члены с одинаковой основной зависимостью от времени, определяемой динамикой:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(n_1|n_2) &= -i\Delta(n_1 - n_2)\rho(n_1|n_2) + \\ &+ \gamma \sum_n w(n_1|n_1+n)w^*(n_2|n_2+n)\rho(n_1+n|n_2+n) - \\ &- \frac{\gamma}{2} \sum_n (|w(n|n_1)|^2 + |w(n|n_2)|^2)\rho(n_1|n_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$w(n|m) = \langle \tilde{n} | e^{i\pi\hat{n}} \hat{a} | \tilde{m} \rangle. \quad (19)$$

Нетрудно проверить, что в стационарном состоянии матрица плотности в смещенном базисе Фока является диагональной (недиагональные элементы экспоненциально затухают со временем):

$$\hat{\rho}_{st} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n |\tilde{n}\rangle \langle \tilde{n}|. \quad (20)$$

Для вычисления амплитуд скоростей перехода (19), от которых зависят стационарные вероятности  $p_n$ , необходимо воспользоваться результатами решения комбинаторной задачи приведения к нормальному порядку мономов бозонных операторов [9]:

$$\begin{aligned} w(n|k) &= \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^k \sum_{i=0}^{\min(m,l+1)} C_{nk}^{iml} \alpha_0^{n+1-i} (\alpha_0^*)^{k-i}, \\ C_{nk}^{iml} &= \frac{e^{-2|\alpha_0|^2} (-1)^{n+l+i} \sqrt{n!k!(l+1)}}{(n-l)!(k-m)!i!(l+1-i)!(m-i)!}; \quad \alpha_0 = \frac{\lambda}{\Delta}. \end{aligned} \quad (21)$$

Система (18) для диагональных элементов с амплитудами (21) решалась численно для конечного числа  $N_{\max}$  доступных состояний  $|\tilde{n}\rangle$ . При больших временах решение приближается к стационарным вероятностям из (20).

Наиболее заселенным оказывается состояние  $|\tilde{0}\rangle$  (его заселенность равна 1 с точностью до пятого знака после запятой). Далее заселенность быстро монотонно убывает с увеличением номера  $n$ . Это согласуется с решением точного уравнения (12), представленным на рис. 2с. Здесь  $P$ -функция представляет

собой узкий пик с максимумом в точке, соответствующей когерентному состоянию  $|\lambda/\Delta\rangle = |\tilde{0}\rangle$ . Данный результат остается справедливым для произвольных значений  $\lambda$ . Таким образом, использованная простая модель позволяет достаточно точно описывать состояние в случае больших значений отстройки  $\Delta$ .

Заканчивая обсуждение результатов вычисления состояния моды, следует отметить, что в случае точного резонанса (рис. 2а)  $P$ -функция является неотрицательной, функции же на рис. 2б и с не являются знакоопределенными, т.е. соответствующие состояния имеют квантовую природу, хотя и не очень ярко выраженную.

**Заключение.** В данной работе получены первые результаты по исследованию состояния квантованной моды, возбуждаемой когерентным монохроматическим источником и помещенной в цепь обратной связи, переключающей фазу моды на  $\pi$ , т.е. инвертирующей ее амплитуду<sup>3</sup>). Мода как открытая квантовая система обменивается с окружением энергией и информацией в виде хорошо локализованных во времени событий случайного ухода фотонов из резонатора, содержащего моду. Система оказывается генератором событий. Эти события инициируют переключение фазы через петлю обратной связи. Стационарное состояние моды оказывается сильно зависящим от расстройки частот накачки и моды. В случае резонансной накачки предложено простое физическое объяснение обнаруженной плоской структуры  $P$ -функции. В случае же больших отстроек предложена упрощенная модель, с хорошей точностью описывающая стационарное состояние и объясняющая

его близость к некоторому когерентному состоянию. Полученные результаты послужат основой дальнейших исследований спектра и статистики квантовой моды в цепи обратной связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант #12-02-01130), президиума СО РАН и программы Отделения физических наук РАН “Фундаментальная оптическая спектроскопия и ее приложения”, а также программы поддержки ведущих научных школ РФ НШ-2979.2012.2.

1. H. Wiseman and G. Milburn, *Quantum Measurement and Control*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
2. E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* **23**, 807; 823; 844 (1935).
3. N. A. Ansari, L. di Fiore, M. A. Man’ko, V. I. Man’ko, R. Romano, S. Solimeno, and F. Zaccaria, arXiv: hep-th-9407171.
4. B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 13 (1986).
5. D. B. Horoshko and S. Ya. Kilin, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 840 (1997).
6. V. A. Tomilin and L. V. Il’ichov, *JETP Lett.* **94**, 676 (2011); *Doklady Physics* **58**, 413 (2013); *JETP* **116**, 181 (2013).
7. H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems*, Oxford University Press, Oxford (2002).
8. N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North Holland, Amsterdam, Netherlands (1984), p. 100.
9. P. Blasiak, G. H. E. Duchamp, A. Horzela, K. A. Penson, and A. I. Solomon, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 415204 (2008).

<sup>3</sup>) Рассуждая в терминах примечания к введению, можно сказать, что источник фотонов в рассматриваемой системе принадлежит “миру Глаубера”, а сток – “миру Юрке–Столера”.