

О перспективе акустооптического контроля спиновых состояний поляритонного конденсата

С. С. Гаврилов¹⁾, А. А. Деменев, В. Д. Кулаковский

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 13 ноября 2014 г.

Исследованы спиновые свойства конденсата экситонных поляритонов в условиях резонансно-оптического возбуждения. Теоретически показано, что средний спин конденсата зависит от разности частот поляритонного уровня и внешней накачки. Это открывает возможность управления спиновыми состояниями поляритонного конденсата путем изменения частоты экситона при возбуждении акустических волн в микрорезонаторе. В частности, предсказано, что в латерально анизотропных системах при фиксированной интенсивности и поляризации волны накачки возможны переключения между состояниями с линейной, право- и лево-циркулярной поляризацией конденсата, осуществляющиеся на масштабе пикосекунд и приводящие к столь же быстрым изменениям поляризации проходящего света.

DOI: 10.7868/S0370274X14240126

Введение. Квазидвумерные экситонные поляритоны – композитные бозоны, возникающие за счет сильной экситон-фотонной связи в активном слое плоского полупроводникового микрорезонатора [1]. Поляритоны, как и экситоны, могут возбуждаться оптически. Система поляритонов имеет свойства слабонеидеального бозе-газа с отталкивательным парным взаимодействием [2]. Экситонные поляритоны уникальны в том отношении, что их макроскопически когерентные (конденсатные) состояния могут возникать не только вблизи термодинамического равновесия (при нерезонансной накачке), но и непосредственно под действием резонансного и когерентного внешнего поля. В последнем случае нелинейность системы приводит к эффектам оптической мультистабильности [3, 4] и параметрического рассеяния [5]. Принципиальное отличие поляритонного газа от ранее изучавшихся нелинейно-оптических систем состоит в том, что даже при сравнительно малых плотностях возбуждения перенормировка частоты поляритонного уровня может превышать его спектральную ширину [6]. Таким образом, нелинейность поляритонной системы связана с зависимостью частоты резонанса от плотности поля. Как показывает опыт, динамика поляритонного газа хорошо описывается уравнением Гросса–Питаевского, применяющимся также для описания атомных бозе-конденсатов [7].

Оптическая мультистабильность возникает в том случае, когда частота накачки превышает собствен-

ную частоту поляритона [3, 8, 9]. Тогда система может потерять устойчивость из-за положительной обратной связи между амплитудой и эффективной резонансной частотой конденсатной моды, испытывающей синий сдвиг с ростом плотности возбуждения. При этом возможны резкие переходы между состояниями с различными интенсивностями и (в общем случае) поляризациями конденсата [4, 10], поскольку поляритон-поляритонное взаимодействие чувствительно к спину [11, 12]. К настоящему времени известно, что такие переходы могут осуществляться под действием накачки с плавно изменяющейся интенсивностью [13–19].

В данной работе показано, что средний спин поляритонного конденсата существенно зависит от разности частот резонанса и внешнего поля. Вследствие этого переходы между различными спиновыми состояниями конденсата возможны за счет возмущения частоты экситона при строго постоянной оптической накачке. Особый интерес представляет система, в которой из-за латеральной анизотропии, вызванной, например, механическим напряжением, снято вырождение между экситонами с ортогональными линейными поляризациями [17–19]. Выполненный анализ показывает, что в такой системе возможны переключения между состояниями с противоположными спинами при помощи коротких (длительностью ~ 10 пс) акустических импульсов.

Теоретическая модель. Состояние поляритонного конденсата определяется макроскопической волновой функцией, амплитуда которой пропорциональна плотности электрического поля в активном

¹⁾e-mail: gavr_ss@issp.ac.ru

слое резонатора. Эта волновая функция имеет две спиновые компоненты, ψ_+ и ψ_- , соответствующие поляритонам со взаимно-обратными проекциями полного момента на нормаль к активному слою ($J_z = \pm 1$) [4]. Поляритоны с $J_z = 1$ и -1 возбуждаются, соответственно, право- и левоциркулярной компонентой внешнего электрического поля (\mathcal{E}_+ и \mathcal{E}_-). Поляритоны с одинаковыми J_z отталкиваются друг от друга, тогда как поляритоны с противоположными J_z взаимодействуют между собой сравнительно слабо [11, 12]. В анизотропных структурах собственное поляритонное состояние может быть расщеплено на два состояния, поляризованных линейно и ортогонально друг другу [17]. В итоге динамика когерентно возбуждаемой двумерной поляритонной системы описывается следующим уравнением Гросса–Питаевского:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \left[E_{\text{LP}}(-i\hbar\nabla) + \frac{\delta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} \psi_+^* \psi_+ & 0 \\ 0 & \psi_-^* \psi_- \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+ \\ \mathcal{E}_- \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_p \mathbf{r} - E_p t/\hbar)}. \quad (1)$$

В согласии с унитарным преобразованием $\begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ величина δ в уравнении (1) равна разности энергий x - и y -поляризованных собственных состояний. В (1) V – матричный элемент поляритон-поляритонного взаимодействия, E_p/\hbar – частота накачки. Закон дисперсии для нижней поляритонной (LP) ветви имеет вид

$$E_{\text{LP}}(\mathbf{k}) = \frac{E_C(\mathbf{k}) + E_X}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{[E_C(\mathbf{k}) - E_X]^2 + R^2}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{k} – волновой вектор в плоскости активного слоя, E_C и E_X – энергии фотона и экситона, R – энергия взаимодействия между ними (R/\hbar – частота Раби). Экситон имеет намного большую, чем квазидвумерный фотон, эффективную массу, поэтому зависимость E_X от \mathbf{k} в области малых \mathbf{k} можно пренебречь.

При $\delta \neq 0$ отклик системы качественно зависит от направления вектора поляризации внешнего поля [17]. В том случае, когда накачка поляризована линейно ($|\mathcal{E}_+| = |\mathcal{E}_-|$) в том же направлении, что и собственное поляритонное состояние с большей энергией ($E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) + \delta/2$), поле в резонаторе может иметь почти полную правую или левую круговую поляризацию, которая возникает спонтанно по достижении пороговой плотности возбуждения. Физической

причиной такого эффекта служит зависимость фазы волновой функции конденсата от его амплитуды [17].

Зависимость среднего спина конденсата от расстройки частоты возбуждения. Согласно уравнению (1) плотность поля в резонаторе уменьшается с ростом разности частот накачки и поляритонного резонанса ($D = E_p - E_{\text{LP}}$). Следовательно, в зависимости от D заданная интенсивность накачки $I_p = |\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2$ может быть как под-, так и надпороговой для оптически бистабильного конденсата. Если средний спин конденсата различен на разных ветвях устойчивости (при $\delta \neq 0$), то при фиксированном I_p различные D соответствуют состояниям с разными средними спинами.

Рассмотрим микрорезонатор на основе GaAs со следующими стандартными характеристиками: расщепление Раби $R = 10$ мэВ; основные уровни фотона и экситона $\text{Re } E_C(k=0) = \text{Re } E_X = E_0 = 1.5$ эВ; коэффициенты затухания $\text{Im } E_C = \text{Im } E_X = 0.05$ мэВ для всех k ; закон дисперсии фотонной моды $\text{Re } E_C(k) = E_0 + \hbar^2 k^2/2m_C$; эффективная масса квазидвумерного фотона $m_C = \varepsilon E_0/c^2$, где $\varepsilon = 12.2$; расщепление линии поляритона вследствие латерального сжатия $\delta = E_x - E_y = 0.075$ мэВ (верхний уровень поляризован в направлении оси x). Данные параметры близки к характеристикам микрорезонатора, использованного в работах [17–19]. Управляющими параметрами в расчетах служат расстройка частоты возбуждения $D = E_p - E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)$ и интенсивность накачки $I_p = |\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2$. При этом считается, что накачка поляризована почти линейно ($\rho_p = (|\mathcal{E}_+|^2 - |\mathcal{E}_-|^2)/(|\mathcal{E}_+|^2 + |\mathcal{E}_-|^2) \leq 0.1$) в x -направлении и падает перпендикулярно поверхности резонатора ($k_p = 0$).

В случае строго постоянной накачки качественную оценку отклика поля в активном слое можно сделать в одномодовом приближении $\psi_{\pm}(\mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_p) \bar{\psi}_{\pm}(\mathbf{k}) e^{-iE_p t/\hbar}$. В этом приближении уравнение (1) сводится к двум связанным кубическим уравнениям для $|\bar{\psi}_+|^2$ и $|\bar{\psi}_-|^2$ в точке $k_p = 0$. Устойчивость получающихся решений может быть исследована путем линеаризации исходного уравнения (1) относительно малых возмущений [10].

На рис. 1 приведены функции стационарного отклика системы при $\rho_p = 0.1$ и разных значениях D . Видно, что при $D = 0$ поле в резонаторе остается почти линейно поляризованным для всех плотностей накачки. Однако при $D = 0.3$ и 0.4 мэВ существуют две промежуточные ветви устойчивости (2_+ и 2_-) с почти совпадающими интенсивностями, но взаимно противоположными круговыми поляризациями ($\rho \approx \pm 1$). При этом самая нижняя и са-

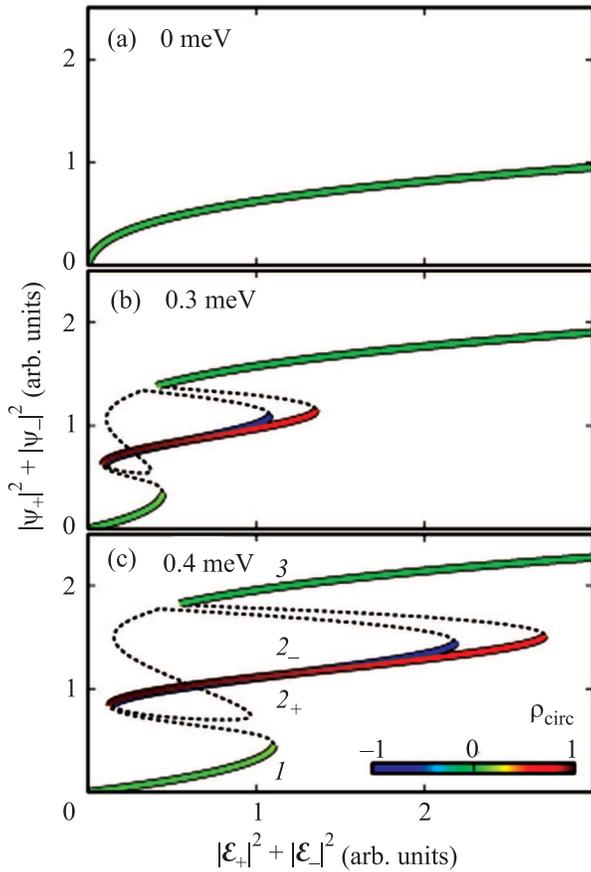


Рис. 1. (Цветной онлайн) Функции стационарного отклика фотовозбуждаемой моды для $D = 0$ (a), 0.3 мэВ (b) и 0.4 мэВ (c) при $\rho_p = 0.1$. Пунктирные линии показывают асимптотически неустойчивые решения. Цветом указана степень циркулярной поляризации поля в резонаторе. Ветви отклика 2_+ и 2_- почти совпадают по интенсивности, но имеют противоположные круговые поляризации. Ветви 1 и 3 имеют линейную поляризацию

мая верхняя ветви отклика (соответственно 1 и 3) по-прежнему поляризованы линейно. То, какое именно из возможных состояний реализуется при заданном I_p , зависит от истории процесса возбуждения. Например, если интенсивность внешнего поля плавно нарастает от нуля до некоторого I_p и затем остается постоянной, то естественно предположить, что установившееся поле в резонаторе будет соответствовать нижней из возможных ветвей устойчивости (1, 2 или 3). В таком случае средний спин конденсата зависит от D . Так, для $I_p = 1$ отн.ед. конденсат поляризован циркулярно при $D = 0.3$ мэВ и линейно при $D = 0.4$ мэВ, тогда как для $I_p = 2$, наоборот, поляризация оказывается линейной при $D = 0.3$ мэВ и циркулярной при $D = 0.4$ мэВ. Знак циркулярной по-

ляризации конденсата на ветви 2 определяется знаком циркулярной поляризации внешнего поля при $\rho_p \neq 0$ и является случайным (определяется флуктуациями) при $\rho_p = 0$.

Выводы, сделанные в рамках одномодового стационарного приближения, можно проверить, решая численно уравнение Гросса–Питаевского (1) с законом дисперсии (2). Расчеты проводились на двумерной дискретной сетке размерности 81×81 в пространственной области 60×60 мкм². В каждом расчете накачка с $\rho_p = 0.05$ плавно нарастала за 250 пс и затем оставалась постоянной в течение следующих 250 пс, когда и записывались установившиеся характеристики поля.

На рис. 2 приведены рассчитанные зависимости право- и левоциркулярных компонент поля в резона-

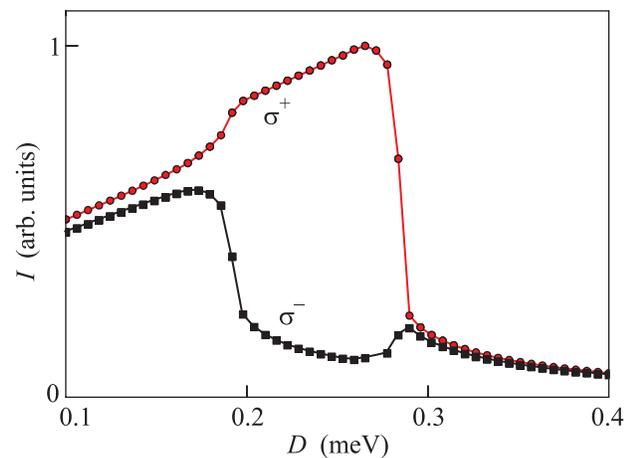


Рис. 2. Интенсивности право- и левоциркулярных (σ^\pm) компонент поля в резонаторе в зависимости от расстройки частоты возбуждения D при фиксированных плотности и поляризации накачки ($I_p = 0.5$, $\rho_p = 0.05$)

торе от D при $I_p = 0.5$ отн. ед. Для данной плотности накачки область $D \gtrsim 0.3$ мэВ отвечает нижней, а область $D \lesssim 0.2$ мэВ – самой верхней ветви устойчивости системы. В обоих случаях поляризация конденсата почти линейна. Однако в промежуточной области, 0.2 мэВ $\lesssim D \lesssim 0.3$ мэВ конденсат имеет почти полную круговую поляризацию. Ее знак обусловлен небольшим перевесом правоциркулярной компоненты внешнего поля ($\rho_p = +0.05$). Если же внешнее поле поляризовано строго линейно, то круговая поляризация конденсата остается столь же высокой, но знак ее случайным образом изменяется от расчета к расчету.

На рис. 3 показаны зависимости степени циркулярной поляризации конденсата от интенсивности накачки при $D = 0.25$ и 0.3 мэВ. Видно, что даже

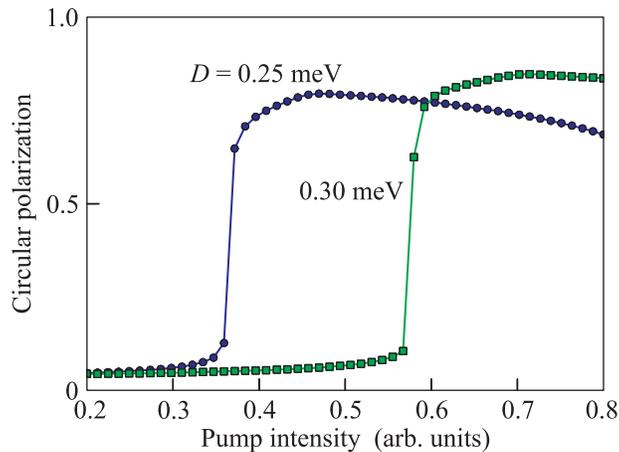


Рис. 3. Степень циркулярной поляризации поля в резонаторе в зависимости от плотности накачки при $\rho_p = 0.05$

сравнительно малое (на 20%) изменение расстройки частоты накачки приводит к значительному изменению пороговой интенсивности, при которой поляризация конденсата изменяется с линейной на циркулярную.

Переключение среднего спина конденсата короткими акустическими импульсами. Особый интерес представляет управление спином за счет сдвига поляритонного уровня на масштабе времени, сопоставимом с временем жизни поляритона. Такая возможность обеспечивается короткими деформационными импульсами, обратимо возмущающими энергию экситонного перехода на величину 0.1–2 мэВ за времена 1–50 пс [20, 21]. Отметим, что в недавней теоретической работе [9] было показано, что обратимое возмущение частоты резонанса может приводить к переходам между ветвями устойчивости “бесспиновой” бистабильной системы поляритонов.

Исследуем поведение решений уравнения Гросса–Питаевского (1) с зависящей от времени энергией экситона E_X , изменяющейся по закону

$$E_X(t) = E_X^{(0)} - \mathcal{A} \frac{t - t_s}{\tau} \exp \left[-\frac{(t - t_s)^2}{2\tau^2} + \frac{1}{2} \right], \quad (3)$$

где $E_X^{(0)}$ – положение невозмущенного уровня, t_s – момент прохождения деформационного импульса, \mathcal{A} и 2τ – его амплитуда и длительность. Зависимость $\Delta E_X(t) = \text{Re} \left(E_X(t) - E_X^{(0)} \right)$ имеет вид производной функции Гаусса. Ее значения положительны (отрицательны) при $t < t_s$ ($t > t_s$), что соответствует сжатию (растяжению) вещества активного слоя в направлении оси z по мере прохождения импульса [20, 21]. Параметры системы являются такими же,

как и в предыдущих примерах. Расстройка частоты накачки выбрана равной 0.35 мэВ, а ее полная интенсивность $I_p = 0.5$ в единицах рис. 1.

На рис. 4а приведена временная зависимость спиновых компонент поля в резонаторе, изменяющихся в результате серии коротких возмущений энергии эк-

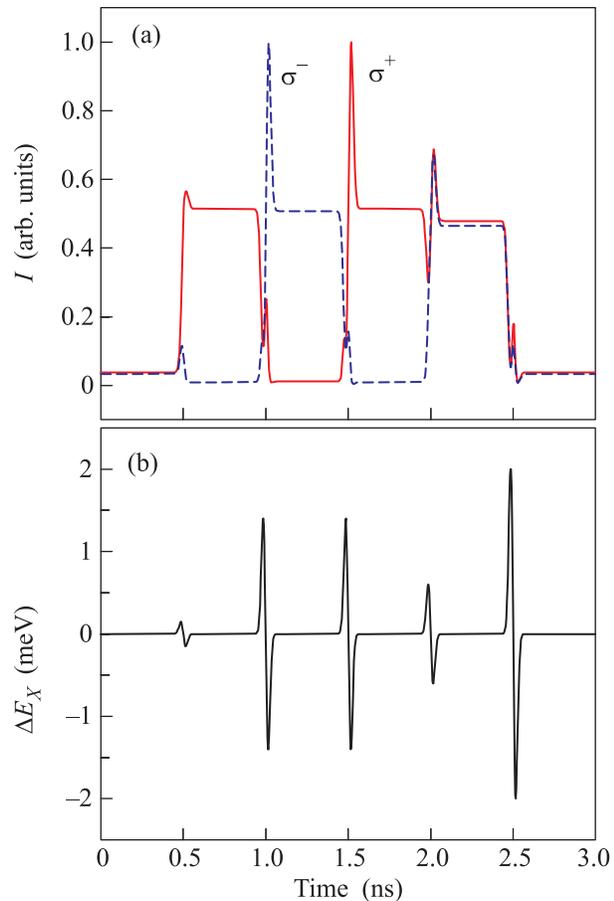


Рис. 4. (а) – Интенсивности право- и левоциркулярных (σ^\pm) компонент поля в резонаторе в зависимости от времени. (б) – Соответствующая форма возмущения энергии экситонного уровня $\Delta E_X(t)$

ситона. Явный вид $\Delta E_X(t)$ показан на рис. 4б. Все импульсы имеют длительность $\tau = 15$ пс и разделены промежутками в 0.5 нс, в середине которых экситонный уровень практически не возмущен. В начальный момент времени конденсатная мода находится на ветви 1 (см. рис. 1с) и имеет почти линейную поляризацию.

Расчет показывает, что обратимое возмущение энергии поляритона на $\Delta E_X = 0.15$ мэВ (первый импульс, $t = 0.5$ нс на рис. 4) является достаточным для перехода на среднюю ветвь устойчивости 2_+ с почти полной круговой поляризацией. В отсутствие дальнейших возмущений при той же оптической накачке

система пребывала бы в состоянии 2_+ неограниченное время. Однако последующее возмущение энергии экситона на $\Delta E_X = 1.4$ мэВ (второй импульс, $t = 1$ нс) приводит к инверсии среднего спина конденсата, $2_+ \rightarrow 2_-$. Обратный переход $2_- \rightarrow 2_+$ при $t = 1.5$ нс (третий импульс) обеспечивается импульсом той же амплитуды.

Физический механизм переходов с инверсией спина ($2_+ \leftrightarrow 2_-$) связан с поляритон-поляритонным взаимодействием. Следует подчеркнуть, что хотя акустический импульс смещает частоты обеих компонент σ^\pm одинаково, для каждой из них смещение частоты суммируется с вкладом от перенормировки, обусловленной межчастичным взаимодействием. Различие в величинах перенормировки $\Delta E_\pm \propto |\psi_\pm|^2$ для σ^+ - и σ^- -компонент поля, которое особенно велико в состояниях 2_\pm , приводит к различию в положении их резонансных уровней E_\pm относительно частоты накачки. До прохождения импульса уровень доминирующей компоненты превышает E_p , в то время как отстающая σ -компонента находится на частоте невозмущенного поляритона. В итоге эффект от дополнительного синего сдвига частоты экситона акустическим импульсом (на переднем его фронте) для σ^+ - и σ^- -компонент поля оказывается противоположным. Доминирующая σ -компонента значительно удаляется от E_p в фиолетовую область, вследствие чего она ослабляется. Напротив, компонента, имевшая малую интенсивность, смещается в направлении оптического резонанса и потому усиливается. В результате разность интенсивностей $|\psi_+|^2 - |\psi_-|^2$ изменяет знак. После того как возмущение энергии экситона $\Delta E_X(t)$ в момент $t = t_s - \tau$ достигает максимума $+\mathcal{A}$, оно начинает уменьшаться, резонансные уровни смещаются назад и по мере роста величин $E_p - E_\pm$ вновь проявляется эффект спиновой мультистабильности. На данном этапе расщепление собственных состояний ($\delta \neq 0$) приводит к тому, что новая доминирующая σ -компонента продолжает усиливаться уже за счет подавления “отстающей” компоненты вследствие прямых переходов между ними, чувствительных к разности фаз [17]. В итоге в новом устойчивом состоянии средний спин конденсата имеет обратный знак по отношению к состоянию до прохождения импульса.

Для перехода на самую верхнюю (симметричную по спину) ветвь устойчивости 3 требуется подать акустический импульс меньшей амплитуды. Соответствующего возмущения энергии экситона ($\Delta E_X = 0.6$ мэВ, $t = 2$ нс) достаточно для того, чтобы привести к резонансу с накачкой и тем самым резко усилить “отстающую” спиновую компоненту поля,

но не достаточно для того, чтобы дополнительный сдвиг частоты доминирующей компоненты привел к критическому уменьшению ее плотности. Наконец, для возвращения системы на нижнюю ветвь устойчивости 1 необходим импульс с большой амплитудой ($\Delta E_X = 2$ мэВ, $t = 2.5$ нс), который смещает частоты обеих σ -компонент настолько сильно, что исходные различия между ними становятся несущественными и обе компоненты необратимо выходят из резонанса.

Анализ решений уравнения Гросса–Питаевского показывает, что рассматриваемые переходы возможны при одновременном выполнении следующих условий. Во-первых, расстройка частоты накачки должна в несколько раз превосходить спектральную ширину поляритонной линии $\text{Im } E_{LP} = \hbar\gamma$, что приводит к эффекту спиновой мультистабильности. Во-вторых, расщепление δ между собственными состояниями должно быть сопоставимо или превосходить $\hbar\gamma$, что приводит к наличию σ -поляризованных состояний в широком диапазоне плотностей внешнего поля с линейной поляризацией. И наконец, в-третьих, длительность акустических импульсов должна быть сравнима с собственным временем жизни поляритонного состояния $\tau_{LP} = 1/\gamma$. Сочетание перечисленных условий, реализуемое в современных гетероструктурах, делает возможным эффект управляемой инверсии спина конденсата акустическими импульсами при постоянной оптической накачке. Предсказанные явления открывают перспективу создания источников когерентного излучения, в которых поляризация света может управляемо и за времена порядка нескольких пикосекунд переключаться между линейной, право- и левоциркулярной.

Авторы благодарны Н.А. Гишпиусу за плодотворные дискуссии. Публикация базируется на работе, финансируемой Сколковским институтом науки и технологий (Сколтех) в рамках Skoltech/MIT Initiative. С.С.Г. выражает признательность за финансовую поддержку Министерству образования и науки Российской Федерации (грант Президента РФ # МК-6521.2014.2).

1. C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3314 (1992).
2. Y. Yamamoto, T. Tassone, and H. Cao, *Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag (2000).
3. A. Baas, J. P. Karr, H. Eleuch, and E. Giacobino, *Phys. Rev. A* **69**, 023809 (2004).
4. N. A. Gippius, I. A. Shelykh, D. D. Solnyshkov, S. S. Gavrilov, Y. G. Rubo, A. V. Kavokin,

- S. G. Tikhodeev, and G. Malpuech, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 236401 (2007).
5. R. M. Stevenson, V. N. Astratov, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, M. Emam-Ismael, A. I. Tartakovskii, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, and J. S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3680 (2000).
6. A. A. Demenev, A. A. Shchekin, A. V. Larionov, S. S. Gavrilov, and V. D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **79**, 165308 (2009).
7. N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, V. D. Kulakovskii, D. N. Krizhanovskii, and A. I. Tartakovskii, *EPL* **67**, 997 (2004).
8. V. F. Elesin and Y. V. Kopaev, *Sov. Phys. JETP* **36**, 767 (1973).
9. S. S. Gavrilov and N. A. Gippius, *Phys. Rev. B* **86**, 085317 (2012).
10. S. S. Gavrilov, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, and V. D. Kulakovskii, *JETP* **110**, 825 (2010).
11. M. Vladimirova, S. Cronenberger, D. Scalbert, K. V. Kavokin, A. Miard, A. Lemaître, J. Bloch, D. Solnyshkov, G. Malpuech, and A. V. Kavokin, *Phys. Rev. B* **82**, 075301 (2010).
12. A. V. Sekretenko, S. S. Gavrilov, and V. D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **88**, 195302 (2013).
13. T. K. Paraïso, M. Wouters, Y. Léger, F. Morier-Genoud, and B. Deveaud-Plédran, *Nat. Mater.* **9**, 655 (2010).
14. D. Sarkar, S. S. Gavrilov, M. Sich, J. H. Quilter, R. A. Bradley, N. A. Gippius, K. Guda, V. D. Kulakovskii, M. S. Skolnick, and D. N. Krizhanovskii, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 216402 (2010).
15. S. Gavrilov, A. Brichkin, A. Dorodnyi, S. Tikhodeev, N. Gippius, and V. Kulakovskii, *JETP Lett.* **92**, 171 (2010).
16. S. S. Gavrilov, A. S. Brichkin, A. A. Demenev, A. A. Dorodnyy, S. I. Novikov, V. D. Kulakovskii, S. G. Tikhodeev, and N. A. Gippius, *Phys. Rev. B* **85**, 075319 (2012).
17. S. S. Gavrilov, A. V. Sekretenko, S. I. Novikov, C. Schneider, S. Höfling, M. Kamp, A. Forchel, and V. D. Kulakovskii, *APL* **102**, 011104 (2013).
18. S. S. Gavrilov, A. V. Sekretenko, N. A. Gippius, C. Schneider, S. Höfling, M. Kamp, A. Forchel, and V. D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **87**, 201303 (2013).
19. A. V. Sekretenko, S. S. Gavrilov, S. I. Novikov, V. D. Kulakovskii, S. Höfling, C. Schneider, M. Kamp, and A. Forchel, *Phys. Rev. B* **88**, 205302 (2013).
20. A. V. Akimov, A. V. Scherbakov, D. R. Yakovlev, C. T. Foxon, and M. Bayer, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 037401 (2006).
21. A. V. Scherbakov, T. Berstermann, A. V. Akimov, D. R. Yakovlev, G. Beaudoin, D. Bajoni, I. Sagnes, J. Bloch, and M. Bayer, *Phys. Rev. B* **78**, 241302 (2008).