Письма в ЖЭТФ, том 100, вып. 12, с. 935 – 940 © 2014 г. 25 декабря

Эволюция стационарного состояния в двумерном уравнении Гросса–Питаевского

С. Б. Медведев[+1)], *Ю. В. Лиханова*[+*], *М. П. Федорук*[+*], *П. Л. Чаповский*[*×]

[*]*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

[+]*Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

[×]*Институт автоматики и электрометрии СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 10 сентября 2014 г.

В работе вариационным методом исследуется разлет стационарного состояния уравнения Гросса–Питаевского после выключения внешнего поля. Показано, что эволюция отношения характерных размеров локализованного решения описывается уравнением одномерного осциллятора с перенормированным временем. Перенормировка определяется эволюцией ширины решения или его вторым моментом. Выяснено, что за бесконечное время отношение характерных размеров монотонно меняется на обратную величину для случая линейного уравнения Шредингера и не достигает обратной величины в нелинейном случае.

DOI: 10.7868/S0370274X1424014X

1. Введение. Уравнение Гросса–Питаевского начало интенсивно исследоваться после экспериментов по созданию конденсата Бозе–Эйнштейна [1]. Данная работа также была инициирована экспериментальной работой [2], в которой исследовался разлет конденсата после выключения внешнего поля и было проведено сравнение с разлетом разреженного газа в надконденсатном состоянии.

В настоящей работе рассмотрен двумерный вариант уравнения Гросса–Питаевского. Несмотря на то что конденсат описывается трехмерными уравнениями, представляется важным понять динамику разлета в двумерном случае, для которого возможно получить аналитические результаты. Кроме того, двумерный случай может служить пробной версией для численных расчетов и некоторым квазидвумерным приближением для полной трехмерной задачи. Двумерный вариант рассмотренных уравнений возникает и в теории самофокусировки волн [3].

Для исследования уравнения Гросса–Питаевского давно используется вариационный метод, поскольку оно получается из вариационной задачи. Кроме того, в двумерном случае можно получить замкнутую систему для некоторых интегралов, которые обобщают теорему вириала [4, 5].

В данной работе основное внимание уделено изучению поведения отношения характерных продольных и поперечных размеров. В двумерном случае с помощью вариационного метода получается конечномерная гамильтонова система с разделяющимися переменными. Это позволяет свести изучение решения к решению последовательности одномерных гамильтоновых систем.

Краткое содержание работы состоит в следующем. В п. 2 сформулирован вариационный подход для получения конечномерных гамильтоновых уравнений. В п. 3 дано явное решение задачи в радиально-симметричном внешнем поле. Только в этом случае удается разделить переменные для эволюционных уравнений. В п. 4 представлено разделение переменных при решении стационарной задачи в общем гармоническом поле. В п. 5 решена задача разлета произвольного начального состояния в уравнении без внешнего поля. В п. 6 рассмотрен разлет начального решения с нулевыми импульсами, что соответствует стационарному решению в некотором внешнем поле.

2. Вариационный метод. Запишем уравнение Гросса–Питаевского в безразмерном виде:

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left[-s\frac{\nabla^2}{2} + V(\mathbf{x},t) + \sigma|\psi(\mathbf{x},t)|^2\right]\psi(\mathbf{x},t). \tag{1}$$

Здесь использованы стандартные обозначения, а s и σ – безразмерные параметры, введенные для выделения членов уравнения. Гармонический потенциал имеет вид

$$V(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\left[a_1^2(t)x_1^2 + a_2^2(t)x_2^2\right].$$

1) e-mail: medvedev@ict.nsc.ru

Для уравнения (1) имеется вариационная формулировка с действием

$$S=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{R^2}\left(\frac{i}{2}\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{i}{2}\psi\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial t}\right)d\mathbf{x}-\mathcal{H}\right]dt. \qquad (2)$$

Гамильтониан системы есть

$$\mathcal{H}=\int\limits_{R^2}\left[\frac{s}{2}|\nabla\psi|^2+V|\psi|^2+\frac{\sigma}{2}|\psi|^4\right]d\mathbf{x}.$$

Введем представление Маделунга:

$$\psi(\mathbf{x},t)=B(\mathbf{x},t)\exp[i\varphi(\mathbf{x},t)], \qquad (3)$$

где B и φ – вещественные функции. Тогда

$$S=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int B^2\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,d\mathbf{x}+\mathcal{H}\right]dt, \qquad (4)$$

где гамильтониан системы

$$\mathcal{H}=\int\limits_{R^2}\left[\frac{s}{2}|\nabla\varphi|^2B^2+\frac{s}{2}|\nabla B|^2+VB^2+\frac{\sigma}{2}B^4\right]d\mathbf{x}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать B^2 в качестве переменной, можно записать

$$|\nabla B|^2=\frac{1}{4}\,B^2\,|\nabla\ln B^2|^2.$$

Исходные уравнения имеют две дискретные симметрии. Они не меняются при двух заменах:

$$\psi(x_1,x_2)=\psi(-x_1,x_2), \quad \psi(x_1,x_2)=\psi(x_1,-x_2). \qquad (6)$$

Если начальные данные удовлетворяют симметриям (6), то они сохраняются в последующие моменты времени. Поэтому в качестве пробных функций φ и B^2 возьмем функции, симметричные относительно отражений от координатных осей. Кроме того, выберем движение так, чтобы центр тяжести функции $|\psi|^2$ являлся неподвижным. Поэтому для фазы возьмем первые четные члены разложения в ряд Маклорена:

$$\varphi(\mathbf{x},t)=\varphi_0(t)+\varphi_1(t)x_1^2+\varphi_2(t)x_2^2. \qquad (7)$$

Это предположение аналогично описанию эллиптических гауссовых пучков с постоянным направлением главных осей [6]. Подставляя ряд (7) в (4), получим

$$S=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[M_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+M_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+M_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}+\mathcal{H}\right]dt, \qquad (8)$$

где M_i – моменты функции B^2:

$$M_0=\int B^2\,d\mathbf{x},\ \ M_1=\int x_1^2\,B^2\,d\mathbf{x},\ \ M_2=\int x_2^2\,B^2\,d\mathbf{x}.$$

Таким образом, переменные φ_i, M_i (где $i=0,1,2$) образуют сопряженные пары.

Чтобы получить замкнутую систему, необходимо выразить гамильтониан $\mathcal{H}$ через величины φ_0, M_0, φ_1, M_1 и φ_2, M_2. Возьмем симметричную функцию $f(\mathbf{y})$, такую, чтобы нулевой момент и вторые моменты были равны единице:

$$\int\limits_{R^2}\mathbf{y}f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=0,\ \ \int\limits_{R^2}f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=1,\ \ \int\limits_{R^2}y_i^2f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=1.$$

Представим функцию B^2 в виде

$$B^2(x_1,x_2,t)=A(t)f[B_1(t)x_1,B_2(t)x_2]. \qquad (9)$$

Тогда

$$M_0=\int Af(B_1x_1,B_2x_2)dx_1dx_2=\frac{A}{B_1B_2},$$

$$M_1=\int x_1^2Af(B_1x_1,B_2x_2)dx_1dx_2=\frac{A}{B_1^3B_2},$$

$$M_2=\int x_2^2Af(B_1x_1,B_2x_2)dx_1dx_2=\frac{A}{B_1B_2^3}.$$

Обращая эти соотношения, находим

$$A=\frac{M_0^2}{M_1^{1/2}M_2^{1/2}}, \quad B_1=\frac{M_0^{1/2}}{M_1^{1/2}}, \quad B_2=\frac{M_0^{1/2}}{M_2^{1/2}}.$$

Подставляя (9) в гамильтониан (5), для каждого слагаемого получим

$$\frac{s}{2}\int\limits_{R^2}|\nabla\varphi|^2B^2\,d\mathbf{x}=2s\left(\varphi_1^2M_1+\varphi_2^2M_2\right)=H_{2k},$$

$$\frac{s}{2}\int\limits_{R^2}|\nabla B|^2\,d\mathbf{x}=\frac{s}{2}M_0^2\left(\frac{C_1}{M_1}+\frac{C_2}{M_2}\right)=H_{2g},$$

$$\int\limits_{R^2}\frac{1}{2}\left(a_1^2x_1^2+a_2^2x_2^2\right)B^2\,d\mathbf{x}=\frac{1}{2}\left(a_1^2M_1+a_2^2M_2\right)=H_{2p},$$

$$\frac{\sigma}{2}\int\limits_{R^2}B^4\,d\mathbf{x}=\frac{\sigma}{2}\frac{M_0^3}{M_1^{1/2}M_2^{1/2}}C_0=H_4,$$

где константы C_0, C_1, C_2 определяются через интегралы от функции $f(\mathbf{y})$:

$$C_0=\int\limits_{R^2}f^2\,dy_1dy_2,\ \ C_i=\int\limits_{R^2}\left(\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial y_i}\right)^2dy_1dy_2,\ \ i=1,2.$$

Собирая слагаемые, получим полное выражение для гамильтониана:

$$H = H_{2k} + H_{2g} + H_{2p} + H_4.$$

Уравнения движения для пары φ_0, M_0 имеют вид

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \varphi_0} = 0, \quad \frac{d\varphi_0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial M_0} = \tag{10}$$

$$= -sM_0\left(\frac{C_1}{M_1} + \frac{C_2}{M_2}\right) - \frac{3\sigma C_0}{2}\frac{M_0^2}{M_1^{1/2}M_2^{1/2}}. \tag{11}$$

Гамильтониан H не зависит от φ_0. Поэтому величина M_0 является интегралом конечномерной системы, задаваемой (8). Этот интеграл совпадает с интегралом исходной непрерывной системы (1). Без потери общности будем считать, что $M_0 = 1$.

Чтобы избавиться в гамильтониане от дробных степеней, введем новые переменные P и Q с помощью соотношений

$$M_1 = Q_1^2,\ \ M_2 = Q_2^2,\ \ \varphi_1 = \frac{P_1}{2Q_1},\ \ \varphi_2 = \frac{P_2}{2Q_2}. \tag{12}$$

Тогда (8) примет вид

$$S = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[P_1\frac{\partial Q_1}{\partial t} + P_2\frac{\partial Q_2}{\partial t} - H\right]dt, \tag{13}$$

где гамильтониан H не имеет дробных степеней:

$$H = \frac{s}{2}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(a_1^2Q_1^2 + a_2^2Q_2^2\right) + \\ + \frac{s}{2}\left(\frac{C_1}{Q_1^2} + \frac{C_2}{Q_2^2}\right) + \frac{\sigma}{2}\frac{C_0}{Q_1Q_2}. \tag{14}$$

Уравнения движения принимают вид

$$\frac{dP_1}{dt} = -a_1^2Q_1 + \frac{sC_1}{Q_1^3} + \frac{\sigma}{2}\frac{C_0}{Q_1^2Q_2}, \quad \frac{dQ_1}{dt} = sP_1, \tag{15}$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -a_2^2Q_2 + \frac{sC_2}{Q_2^3} + \frac{\sigma}{2}\frac{C_0}{Q_1Q_2^2}, \quad \frac{dQ_2}{dt} = sP_2. \tag{16}$$

Возьмем в качестве $f(\mathbf{y})$ функцию Гаусса:

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right).$$

Тогда

$$C_0 = \frac{1}{4\pi}, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{4}.$$

3. Радиально-симметричное внешнее поле. Сначала рассмотрим радиально-симметричное внешнее поле $a_1 = a_2 = a(t)$, зависящее от времени. Кроме того, будем считать, что пробная функция также симметрична, поэтому $C_1 = C_2$. Тогда гамильтониан (14) примет вид

$$H = \frac{s}{2}\left(P_1^2 + P_2^2\right) + \frac{a^2(t)}{2}\left(Q_1^2 + Q_2^2\right) + \\ + \frac{sC_1}{2}\left(\frac{1}{Q_1^2} + \frac{1}{Q_2^2}\right) + \frac{\sigma}{2}\frac{C_0}{Q_1Q_2}. \tag{17}$$

Эта система допускает дополнительный интеграл, квадратичный по импульсам, и является интегрируемой [7]. Введем новые переменные: $r = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$, $\theta = \arctan(Q_2/Q_1)$. Тогда H примет вид гамильтониана с разделяющимися переменными:

$$H = \frac{s}{2}p_r^2 + \frac{a^2r^2}{2} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{s}{2}p_\theta^2 + B(\theta)\right], \tag{18}$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{sC_1}{\cos^2\theta} + \frac{sC_2}{\sin^2\theta} + \frac{\sigma C_0}{\cos\theta\sin\theta}\right),$$

где p_r и p_θ – импульсы координат r и θ. Переменная θ является отделимой. Ей соответствует интеграл $Q = \frac{s}{2}p_\theta^2 + B(\theta)$ [8]. Из гамильтониана (18) получается уравнение Ермакова:

$$\frac{d^2r}{dt^2} + sa^2(t)r - 2sQr^{-3} = 0.$$

Известно, что его общее решение выражается через решения его линейной части и выполняется принцип нелинейной суперпозиции [9–11]. Анализ этого уравнения для переменного потенциала проведен в работах [5, 12]. В них уравнение Ермакова получено как точное следствие для интегральных величин.

Здесь мы рассмотрим только постоянное значение a. Поэтому удобнее перейти к новой переменной $R = r^2/2$. Тогда гамильтониан и уравнение для R примут простой вид:

$$H = sp_R^2R + a^2R + \frac{1}{2R}\left[\frac{s}{2}p_\theta^2 + B(\theta)\right], \tag{19}$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} + 4sa^2R = 2sH.$$

Это уравнение есть конечномерный аналог вириальной теоремы [4]. Из него следует, что частота радиальных колебаний равна $\omega_R = 2a\sqrt{s}$.

Стационарное решение полной системы имеет вид

$$R_s = \frac{H}{2a^2} = \sqrt{\frac{Q}{2a^2}}, \quad \theta_s = \pi/4.$$

Для переменной θ в этом случае выписывается формула для частоты малых колебаний в окрестности стационарной точки θ_s:

$$\omega_\theta = \frac{\sqrt{sB''(\theta_s)}}{2R_s} = a\sqrt{\frac{sB''(\theta_s)}{2B(\theta_s)}} = \omega_R\sqrt{\frac{4sC_1 + \sigma C_0}{4sC_1 + 2\sigma C_0}}.$$

Все параметры, входящие в множитель в правой части, положительны. Поэтому справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{\omega_\theta}{\omega_R} < 1.$$

Это соотношение имеет минимальное значение для малых s (когда реализуется условие Томаса–Ферми).

4. Стационарное состояние. Рассмотрим стационарное состояние в потенциале V, не зависящем от времени. Для его нахождения воспользуемся уравнениями (15), (16). Для этого достаточно приравнять нулю производные по времени в этих уравнениях. Чтобы упростить вычисление стационарного решения, введем новые канонические переменные ρ, p_ρ и ξ, p_ξ, через которые исходные переменные выражаются как

$$Q_1 = a_1^{-1} e^{\rho} \cos\xi, \quad Q_2 = a_2^{-1} e^{\rho} \sin\xi,$$

$$P_1 = a_1 e^{-\rho} \left(p_\rho \cos\xi - p_\xi \sin\xi\right),$$

$$P_2 = a_2 e^{-\rho} \left(p_\rho \sin\xi - p_\xi \cos\xi\right).$$

Теперь гамильтониан принимает вид

$$H = \frac{s}{2} e^{-2\rho} \left[(a_1^2 \cos^2\xi + a_2^2 \sin^2\xi) p_\rho^2 + \right.$$

$$+ 2(a_2^2 - a_1^2)\cos\xi \sin\xi\, p_\rho p_\xi +$$

$$\left. + \, (a_2^2 \cos^2\xi + a_1^2 \sin^2\xi) p_\xi^2\right] + U(\rho, \xi),$$

где потенциал $U(\rho, \varphi)$ есть

$$U(\rho, \xi) = \frac{1}{2} e^{2\rho} + \frac{1}{2} e^{-2\rho} W(\xi),$$

$$W(\xi) = \frac{s a_1^2 C_1}{\cos^2\xi} + \frac{s a_2^2 C_2}{\sin^2\xi} + \frac{\sigma a_1 a_2 C_0}{\cos\xi \sin\xi}.$$

Переменные для стационарного состояния разделяются:

$$0 = \frac{\partial U}{\partial \rho} = e^{2\rho} - e^{-2\rho} W(\xi), \tag{20}$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{1}{2} e^{2\rho} \frac{dW}{d\xi} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2\rho} \left(\frac{2 s a_1^2 C_1 \sin\xi}{\cos^3\xi} - \frac{2 s a_2^2 C_2 \cos\xi}{\sin^3\xi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma a_1 a_2 C_0}{\cos^2\xi} - \frac{\sigma a_1 a_2 C_0}{\sin^2\xi}\right). \tag{21}$$

Последнее уравнение можно записать в виде полинома от $\operatorname{tg}\xi$:

$$2 s C_1 \operatorname{tg}^4\xi + \sigma \frac{a_2}{a_1} C_0 \operatorname{tg}^3\xi = \sigma \frac{a_2}{a_1} C_0 \operatorname{tg}\xi + 2s \frac{a_2^2}{a_1^2} C_2.$$

Анализ этого уравнения показывает, что всегда существует единственное стационарное решение ξ_s в интервале от нуля до $\pi/2$, на котором функция $W(\xi)$ достигает минимума. Значение ρ_s находится из (20):

$$\rho_s = \frac{1}{4} \ln W(\xi_s).$$

5. Разлет стационарного состояния. Для описания свободного разлета конденсата положим $a_1 = a_2 = 0$. В результате исходное уравнение превращается в хорошо изученное кубическое уравнение Шредингера. Для этого случая удобно перейти к новым каноническим переменным R, p_R и θ, p_θ, которые связаны с исходными следующими соотношениями:

$$Q_1 = \sqrt{2R} \cos\theta, \quad Q_2 = \sqrt{2R} \sin\theta,$$

$$P_1 = \sqrt{2R} p_R \cos\theta - \frac{p_\theta}{\sqrt{2R}} \sin\theta,$$

$$P_2 = \sqrt{2R} p_R \sin\theta - \frac{p_\theta}{\sqrt{2R}} \cos\theta.$$

Гамильтониан (19) упрощается:

$$H = s p_R^2 R + \frac{1}{2R} \left[\frac{s}{2} p_\theta^2 + B(\theta)\right]. \tag{22}$$

Для определения поведения R можно напрямую решать канонические уравнения. Однако удобнее воспользоваться теоремой вириала, которая дает уравнение на R:

$$\ddot{R} = 2H.$$

Решение этого уравнения имеет вид [3]

$$R = H t^2 + R_1 t + R_0, \quad R_0 = R(0), \quad R_1 = \dot{R}(0).$$

При известном R уравнения для θ и p_θ можно записать в виде одномерной гамильтоновой системы:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2R} \frac{\partial Q}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{2R}, \quad \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{1}{2R} \frac{\partial Q}{\partial \theta} = -\frac{1}{2R} \frac{dB}{d\theta}.$$

В предположении отсутствия коллапсирующих решений можно ввести новое время:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{4 R_0 H - R_1^2}} \arctan \frac{2Ht + R_1}{\sqrt{4 R_0 H - R_1^2}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{4 R_0 H - R_1^2}} \arctan \frac{R_1}{\sqrt{4 R_0 H - R_1^2}}.$$

В результате получаем одномерную каноническую систему:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial Q}{\partial p_\theta} = s p_\theta, \quad \frac{dp_\theta}{d\tau} = -\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \frac{dB}{d\theta}. \tag{23}$$

При этом новое время τ будет меняться от нуля до максимального значения

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\sqrt{4R_0H - R_1^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{R_1}{\sqrt{4R_0H - R_1^2}}\right).$$

Таким образом, одномерная гамильтонова система (23) полностью описывает эволюцию отношения характерных масштабов от нулевого момента времени $\tau = 0$ до максимального момента $\tau = \tau_{\max}$, которые соответствуют изменению времени t от нуля до бесконечности.

6. Разлет покоящегося облака. Для любого внешнего поля V стационарное решение имеет нулевые импульсы:

$$p_R = 0, \quad p_\theta = 0.$$

Для гармонического поля стационарное решение может иметь соответствующее отношение характерных размеров. Поэтому рассмотрим класс начальных данных с нулевыми импульсами и произвольными координатами

$$R = R_0 > 0, \quad \theta = \theta_0 = \arctan\frac{Q_2(0)}{Q_1(0)} > 0,$$

заданными в начальный момент времени $t = 0$. Для таких начальных данных сохраняющиеся величины равны

$$H = \frac{1}{2R_0}B(\theta_0), \quad Q = B(\theta_0).$$

Новое максимальное время

$$\tau_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2B(\theta_0)}}\frac{\pi}{2}.$$

Это соответствует времени перемещения свободной частицы на расстояние $\pi/2$.

Если $C_1 = C_2$, то имеется единственная точка $\theta = \theta_s = \pi/4$, в которой потенциал $B(\theta)$ достигает минимума.

Для линейного режима с $\sigma = 0$ полупериод колебания P_l частицы в таком потенциале равен $P_l = \tau_{\max}$. Это означает, что частица достигает другого симметричного края потенциальной ямы $B(\theta)$ за максимальное время $\tau_{\max}$, которое в точности равно полупериоду колебаний P_l. Поэтому за бесконечное время отношение характерных размеров стремится к обратной величине начального отношения:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Q_2(t)}{Q_1(t)} = \frac{Q_1(0)}{Q_2(0)}.$$

Для нелинейного режима с $\sigma \neq 0$ рассмотрим малые колебания в окрестности точки θ_s. В этом случае можно записать два неравенства:

$$\tau_{\max} = \frac{\pi}{\sqrt{8B(\theta_0)}} \le \tau_s = \frac{\pi}{\sqrt{8B(\theta_s)}} \le P_s = \frac{\pi}{\sqrt{B''(\theta_s)}},$$

где

$$B(\theta_s) = 2sC_1 + \sigma C_0, \quad B''(\theta_s) = 16sC_1 + 4\sigma C_0.$$

В соответствии с первым неравенством максимальное время $\tau_{\max}$ меньше времени τ_s, поскольку $B(\theta)$ имеет минимум в θ_s. Второе неравенство следует из явных выражений для $B(\theta_s)$ и $B''(\theta_s)$. Окончательно получаем, что максимальное время $\tau_{\max}$ меньше полупериода малых колебаний P_s. Таким образом, "частица" не может за время $\tau_{\max}$ достичь противоположного края потенциала, и уж тем более совершить возвратное движение. В терминах исходных переменных это означает, что отношение характерных размеров монотонно меняется в сторону обратной величины, но не достигает ее.

В общем случае полупериод может быть выражен через эллиптические интегралы и имеет место аналогичное неравенство для максимального времени и полупериода нелинейных колебаний.

7. Заключение. В рамках вариационного метода для уравнения Гросса-Питаевского получена конечномерная гамильтонова система, в которой характерные размеры непрерывного решения играют роль канонических координат. Эта система имеет разделяющиеся переменные. Ее решение сводится к решению последовательности одномерных систем. Эволюция центробежного второго момента непрерывного решения хорошо изучена в теории коллапса нелинейного уравнения Шредингера. Поэтому основное внимание было уделено изучению отношения характерных размеров, для которого получено гамильтоново уравнение нелинейного маятника с нормированным временем и сильно локализованным потенциалом.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект # 14-21-00110).

1. L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose–Einstein Condensation*, Clarendon Press, Oxford (2003).
2. П. Л. Чаповский, Письма в ЖЭТФ **95**, 148 (2012).
3. С. Н. Власов, В. И. Таланов, *Самофокусировка волн*, ИПФ, Н.Новгород (1997).
4. L. P. Pitaevskii, Phys. Lett. A **221**, 14 (1996).
5. J. J. Garcia-Ripoll, V. M. Perez-Garcia, and P. Torres, Phys. Rev. Lett. **83**, 1715 (1999).

6. А. М. Гончаренко, *Гауссовы пучки света*, Наука и техника, Минск (1977).
7. А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли*, Наука, М. (1990).
8. Г. Н. Яковенко, *Краткий курс аналитической динамики*, Бином, М. (2012).
9. J. L. Reid and J. R. Ray, ZAMM **64**, 365 (1984).
10. Л. М. Беркович, *Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, РХД, М. (2002).
11. A. D. Polyanin and V. F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton (2003).
12. V. M. Perez-Garcia, P. J. Torres, and G. D. Montesinos, SIAM J. on Appl. Math. **67**, 990 (2007).