

Квазидвумерная и трехмерная турбулентность во вращающихся сферических слоях жидкости

Д. Ю. Жиленко¹⁾, О. Э. Кривоносова

Институт механики МГУ им. Ломоносова, 119192 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 января 2015 г.

После переработки 23 марта 2015 г.

Экспериментально и численно исследованы турбулентные течения вязкой несжимаемой жидкости, развивающиеся в слое между вращающимися концентрическими сферами под действием модуляции скорости одной из сфер. Установлена возможность формирования турбулентности, спектры которой качественно подобны спектрам, полученным в результате измерений в верхних слоях атмосферы: с наклоном, близким к -3 на меньших частотах и наклоном, близким к $-5/3$ на больших, с отрицательной продольной структурной функцией скорости третьего порядка. Показано, что такие спектры формируются в тех областях течения, которые подвергаются сильной синхронизации под действием модуляции скорости вращения.

DOI: 10.7868/S0370274X15080044

1. Введение. Крупномасштабные течения атмосферы происходят в условиях быстрого вращения Земли, и их свойства принято объяснять концепцией “двумерной” турбулентности [1, 2]. В двумерной турбулентности принято выделять два инерционных интервала, соответствующих переносу энергии при меньших волновых числах и переносу энтропии при больших волновых числах [3]. Подвод энергии и энтропии к течению происходит за счет внешних сил с волновыми числами, расположенными между этими интервалами. Инерционный интервал переноса энергии от больших к меньшим волновым числам (обратный каскад) описывается таким же, как и в трехмерной турбулентности, соотношением Колмогорова [4] для зависимости энергетического спектра $E(k)$ от волнового числа k : $E(k) \sim k^{-5/3}$. В инерционном интервале переноса энтропии от меньших волновых чисел к большим (прямой каскад) такая зависимость имеет вид $E(k) \sim k^{-3}$. Направление каскада определяется знаком продольной структурной функции скорости третьего порядка [5], определяемой как $D_{LLL} = \langle [u(l) - u(l')]^3 \rangle$, где u – скорость в пространственно разнесенных точках l и l' , угловые скобки означают осреднение по ансамблю реализаций. При этом $D_{LLL} < 0$ соответствует прямому каскаду, а $D_{LLL} > 0$ – обратному. Положения теории двумерной турбулентности, в том числе формирование спектров с наклоном $-5/3$ при больших и -3 при меньших масштабах, нашли подтверждение

в многочисленных результатах, обзоры которых приведены в [6, 7]. В то же время по данным проведенных в течение нескольких лет измерений горизонтальной скорости ветра в верхних слоях атмосферы Земли обнаружено аномальное расположение спектральных участков, не соответствующее теории двумерной турбулентности. Так, спектры турбулентности с наклоном -3 начинаются на масштабах более 700 км и ограничены сильным пиком на масштабе 10^4 км. Спектры же с наклоном $-5/3$ выявлены на малых масштабах, менее 500 км [1]. Из проведенного в [2] анализа структурных функций третьего порядка установлено, что только один из участков спектра – с наклоном -3 – соответствует “двумерной” турбулентности. Отсюда можно сделать вывод о прямом каскаде передачи энергии на обоих рассматриваемых участках спектра. Несмотря на существующие объяснения [1, 8, 9], вопросы о причинах обратного расположения спектральных участков и о возможности воспроизведения этого явления в лабораторных условиях пока остаются открытыми.

Двумерности турбулентных течений в атмосфере препятствуют как вязкая диссипация [10], так и вертикальные движения, являющиеся частью крупномасштабной циркуляции [6]. Крупномасштабная циркуляция существует и в турбулентных течениях, вызванных вращением границ сферического слоя, что приводит в движение заключенную между ними вязкую несжимаемую жидкость [11]. Именно поэтому с целью качественной имитации процессов в атмосфере в данной работе рассматривается модельное

¹⁾e-mail: jilenko@imec.msu.ru

сферическое течение Куэтта. По аналогии с работой [12], в которой переходы между двух- и трехмерной турбулентностью изучались в присутствии встречной вращению цилиндров азимутальной струи, для исследований нами был выбран случай встречного вращения сфер. При стационарных граничных условиях в меридиональной плоскости такого течения формируются вихри противоположного направления с линией раздела между ними (см. рис. 1, который

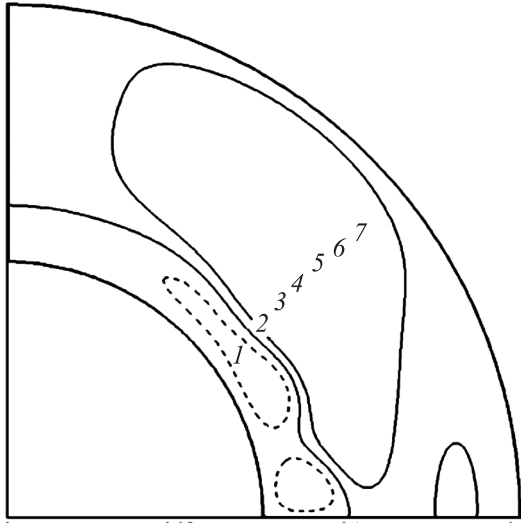


Рис. 1. Расчетные значения функции тока ψ (в $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$) (см. [13]) в меридиональной плоскости осесимметричного стационарного течения при $\text{Re}_2 = -900$, $\text{Re}_1 = 414$: $\psi_{\text{max}} = 6 \cdot 10^{-6}$, $\psi_{\text{min}} = -6 \cdot 10^{-6}$, $\Delta\psi_{\text{max}} = 6 \cdot 10^{-6}$. Отрицательные значения уровня обозначены штриховыми линиями. Точки 1–7 расположены на относительном расстоянии $l = (r - r_1)/(r_2 - r_1) = 0.135, 0.246, 0.359, 0.484, 0.611, 0.7, 0.803$ от внутренней сферы (где r_1, r_2 – радиусы внутренней и внешней сфер) с отклонением 0.206π от плоскости экватора

аналогичен фиг. 1, в из [13]). Аналогичная циркуляция может наблюдаться в случае вращения только внутренней сферы при неоднородном по широте внешнем подогреве [14], характерном для атмосферы. В сферических слоях формирование турбулентности с высоким уровнем корреляционной размерности происходит как при увеличении скорости вращения одной из границ [11, 15], так и при модуляции скорости их вращения [16]. В последнем случае спектр развитой турбулентности зависит от параметров силового воздействия [17].

В данной работе экспериментально и численно установлена зависимость вида спектров азимутальной скорости от частоты и амплитуды модуляции скорости вращения одной из сфер. Показана возможность формирования в сферическом слое турбулент-

ных течений, спектры которых качественно подобны полученным ранее при натуральных измерениях в атмосфере спектрам.

2. Методика расчета и эксперимента, область исследования. Изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности: $\frac{\partial U}{\partial t} = U \times \text{rot } U - \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \nu \text{rot rot } U$, $\text{div } U = 0$, где U , p , ν , ρ – скорость, давление, вязкость и плотность жидкости. При численном решении используется сферическая система координат с радиальным (r), полярным (θ) и азимутальным (φ) направлениями, для которой условия непротекания и прилипания на границах имеют вид $u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t)r_k \sin \theta$, $u_r(r = r_k) = 0$, $u_\theta(r = r_k) = 0$, $k = 1, 2$, где u_φ , u_r , u_θ – азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости, $k = 1$ соответствует внутренней сфере, $k = 2$ – внешней. Используемый алгоритм численного решения [18] базируется на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полунявной схеме Рунге–Кутты 3-го порядка точности интегрирования по времени. Дискретизация по пространству проводится на неравномерных по r и θ сетках со сгущением вблизи границ и плоскости экватора и общим количеством узлов $5.76 \cdot 10^5$. Вопросы чувствительности результатов к параметрам сетки подробно рассмотрены в [13, 19]. Данный алгоритм использовался при расчетах в случае как стационарных [11], так и периодических [19] граничных условий. Получено соответствие экспериментальных и расчетных результатов, в том числе для интегральных свойств турбулентных течений. В данной работе спектры пульсаций квадрата азимутальной компоненты скорости u_φ (с вычетом средней величины, определяемой по всей выборке) рассчитывались в точках 1–7, показанных на рис. 1 (θ и φ одни и те же, меняется только r). Для этого вычислялись временные ряды u_φ длиной не менее 72000 точек с шагом по времени $\Delta t = (0.015 - 0.025)$ с. Для вычисления D_{LLL} рассчитывалась зависимость u_φ от азимутального угла φ в течение шестнадцати периодов вращения ($0 \leq \varphi \leq 32\pi$). Все расчеты проводились для начальных и граничных условий, соответствующих условиям проведения экспериментов.

Экспериментальная установка представляет собой две коаксиальные сферы. Наружный радиус внутренней сферы $r_1 = 0.075$ м, а внутренний радиус внешней сферы $r_2 = 0.150$ м. Зазор между сферами заполнен силиконовым маслом с вязкостью $\nu = 50 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ при температуре рабочей жидко-

сти 22 °С, в которое для визуализации течения добавлена алюминиевая пудра. Скорость вращения периодически изменяется по закону $\Omega_k(t) = \Omega_{k0}[1 + A_k \sin(2\pi f_k t + \Phi_k)]$ с погрешностью не более 0.5% (где A_k, f_k – амплитуда и частота модуляции, Ω_{k0} – средняя угловая скорость вращения, начальное значение фазы Φ_k произвольно). Частоты модуляции $f_1 = (0.01–0.1)$ Гц и $f_2 = (0.01–0.02)$ Гц не превышали средних величин частот вращения сфер ($\Omega_{10}/2\pi = 0.59$ Гц, $\Omega_{20}/2\pi = 0.32$ Гц). Измерения u_φ проводились лазерным анемометром СДС 01.11 с допустимым интервалом скорости 0.005–1 м/с, частота сбора данных 20.16 Гц. Точка измерения располагалась около внешней сферы на расстоянии 0.078 м от плоскости экватора и 0.105 м от оси вращения (вблизи точки 7 на рис. 1). Эксперименты проводились при числах Рейнольдса $Re_1 = \Omega_{10}r_1^2/\nu = 412.5 \pm 0.5$, $Re_2 = \Omega_{20}r_2^2/\nu = -900 \pm 1$. При указанных числах Рейнольдса в отсутствие модуляции в слое формируется периодическое течение с частотой $f_0 = 0.0376$ Гц, в дальнейшем называемое исходным, которое является результатом взаимной синхронизации отдельных линейных мод [13]. Исходное течение представляет собой бегущие азимутальные волны с волновым числом $m = 3$. Модуляция скорости вращения одной из границ ведет к вынужденной синхронизации течения. С увеличением амплитуды модуляции при ее фиксированной частоте происходит разрушение исходного течения. При переходе от взаимной синхронизации к вынужденной формируется турбулентность [16]. Более подробное описание установки и условий проведения экспериментов представлено в [16].

3. Результаты. Обработка результатов измерений u_φ показала, что вблизи порога формирования турбулентности вид спектров квадрата пульсаций азимутальной скорости не зависит от частоты модуляции. В этом случае спектры имеют постоянный наклон в интервале частот, ограниченном снизу наибольшей из величин f_0 и f_k . В случае модуляции скорости вращения внутренней сферы величина наклона спектров находится в интервале между $-5/3$ и -3 , а с увеличением амплитуды приближается к $-5/3$. При дальнейшем увеличении амплитуды модуляции спектры могут трансформироваться к виду, характерному для “двумерной турбулентности”. Так, в случае модуляции $\Omega_1(t)$ при $f_1 \leq f_0$ (рис. 2) в спектрах, полученных как по результатам измерений, так и численно, хорошо заметны участок с постоянным наклоном $-5/3$ на меньших частотах (0.06–0.27 Гц) и участок с постоянным наклоном -3 на больших (0.27–0.8 Гц). С увеличением $f_1 \geq f_0$ вид

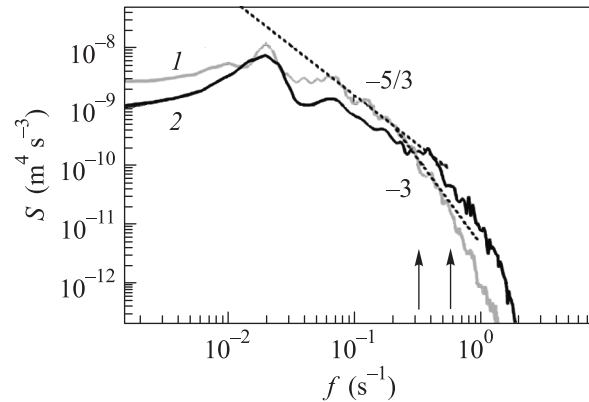


Рис. 2. Спектры u_φ^2 , полученные в эксперименте (1) и путем расчета для точки 7 (2) в случае модуляции скорости внутренней сферы, $f_1 = 0.01$ Гц, $A = 0.163$. Левая вертикальная стрелка соответствует средней частоте вращения внешней сферы, правая – внутренней

спектра трансформируется (рис. 3) и между частот

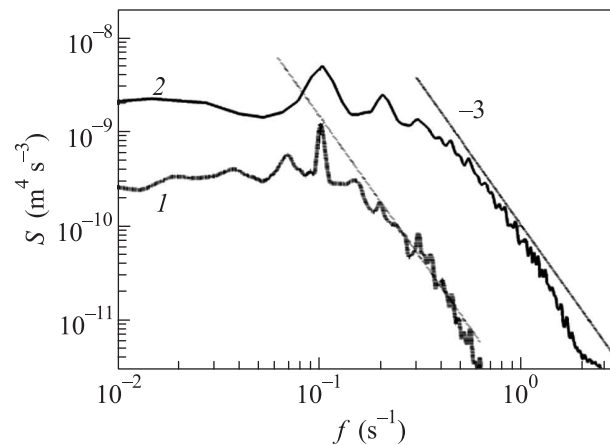


Рис. 3. Спектры u_φ^2 , полученные в эксперименте (1) и путем расчета для точки 7 (2) в случае модуляции скорости внутренней сферы, $f_1 = 0.1$ Гц, $A = 0.217$

той модуляции f_1 и окончанием инерционного интервала остается только участок с наклоном -3 .

В случае модуляции $\Omega_2(t)$ вблизи перехода к турбулентности наблюдаются спектры с наклоном в интервале между $-5/3$ и -3 . При увеличении амплитуды спектры трансформируются к виду, качественно соответствующему виду спектров атмосферной турбулентности [1], с наклоном -3 на частотах менее 0.1 Гц и $-5/3$ на больших частотах (0.1–0.31 Гц) (рис. 4а). Дальнейшее повышение амплитуды может приводить к спектрам с постоянным наклоном, величина которого находится между $-5/3$ и -3 . При условии $f_k \leq f_0$ вид спектра зависит от местоположения точки, в которой вычисляется азимуталь-

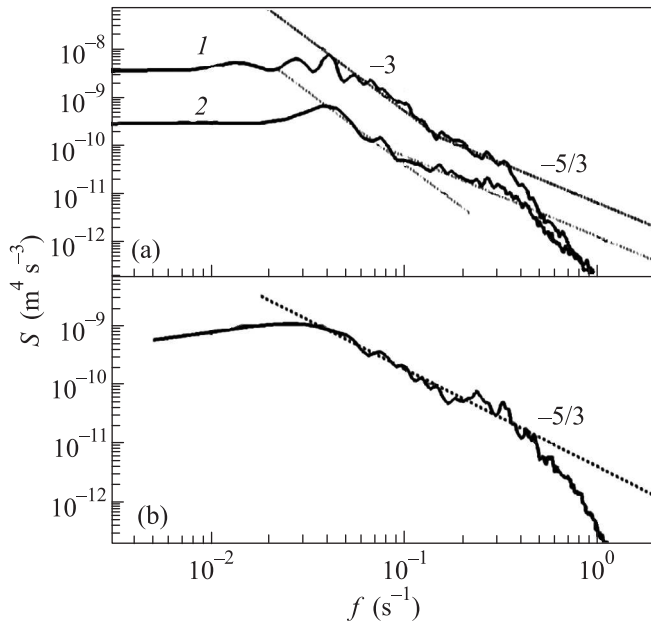


Рис. 4. Спектры u_φ^2 в точках 7 (а) и 1 (б): 1 – эксперимент, 2 – расчет. Модуляция скорости внешней сферы, $f_2 = 0.02$ Гц, $A = 0.2$

ная скорость. В единственном исследованном случае $f_1 \geq f_0$ спектры оказались однородными по пространству. Наиболее характерные отличия в виде спектров в точках 1–7 (рис. 1) имеют место в случае модуляции $\Omega_2(t)$. Так, вблизи внешней сферы и на некотором удалении от нее (точки 7–3) наблюдаются спектры, характерные для атмосферной турбулентности, а вблизи внутренней сферы (точка 1) – спектр с постоянным наклоном $-5/3$, характерный для трехмерной турбулентности (рис. 4б). Предпринята попытка определения направления каскада энергии в случаях, соответствующих приведенным на рис. 2 и 4 спектрам, по знаку величины продольной структурной функции скорости третьего порядка. Оказалось, что знак рассматриваемой величины изменяется с периодом $2\pi/3$, что объясняется сохранением в турбулентном течении крупномасштабных когерентных структур [11], характерных для исходного течения. Аналогичные по структуре крупномасштабные когерентные образования в верхних слоях атмосфер планет (например, Венеры) предполагается интерпретировать как волны Россби [20]. Поэтому для определения знака D_{LLL} результаты расчета аппроксимировались полиномами шестой степени. На рис. 5 представлена зависимость D_{LLL} от частоты f , определяемой выражением [21]: $f = \langle u_\varphi \rangle / l$, где $0 < l < 32\pi r$, а $\langle u_\varphi \rangle$ – средняя скорость в точках на расстоянии $r \sin \theta$ от оси. Рассмотрим прежде всего течения, для которых наблюдались спектры,

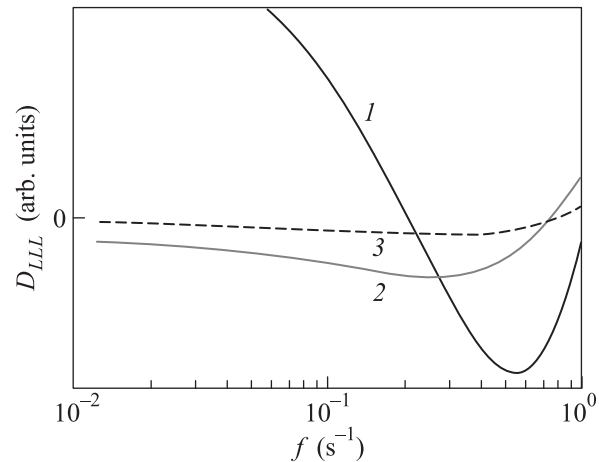


Рис. 5. Аппроксимация величины продольной структурной функции скорости третьего порядка для случаев $f_1 = 0.01$ Гц, $A = 0.163$ (1) и $f_2 = 0.02$ Гц, $A = 0.2$ (2, 3) в точках 7 (1, 3) и 1 (2)

характерные для двумерной (рис. 2) и трехмерной (рис. 4б) турбулентности. В первом случае (рис. 5, кривая 1) наблюдается переход от положительных величин D_{LLL} к отрицательным при $f = 0.2$ Гц. При этой же частоте наблюдается переход от наклона -3 к наклону $-5/3$ в эксперименте (рис. 2, кривая 1). Во втором случае (рис. 5, кривая 2) $D_{LLL} < 0$. Оба рассматриваемых случая подтверждают достоверность оценки знака D_{LLL} . В случае атмосферной турбулентности (рис. 5, кривая 3) $D_{LLL} < 0$ в диапазоне частот, который соответствует участкам спектра с наклонами -3 и $-5/3$. Таким образом, на обоих участках инерционного интервала наблюдается прямой каскад передачи энергии, что полностью соответствует результатам обработки натуральных измерений в [2].

Уровень турбулентности всего течения в целом задается поведением его кинетической энергии, которая представлена в виде суммы азимутальной (E_φ) и меридиональной (E_ψ) составляющих, определяемых интегрированием по всему объему сферического слоя: $E_\varphi = \int u_\varphi^2$, $E_\psi = \int (u_r^2 + u_\theta^2)$. Рассмотрим, в каком виде проявляется влияние модуляции скорости вращения внутренней (рис. 6а) и внешней (рис. 6б) сфер на изменение E_φ и E_ψ для течений, спектры которых представлены на рис. 2 и 4. Видно, что в обоих случаях E_φ сохраняет близкую к периодической зависимость от времени, а большей хаотизации подвергается E_ψ . Таким образом, при модуляции скорости вращения одной из сфер происходит подавление турбулентности в одном из направлений движения – азимутальном. Подавление турбулентности возрастает с

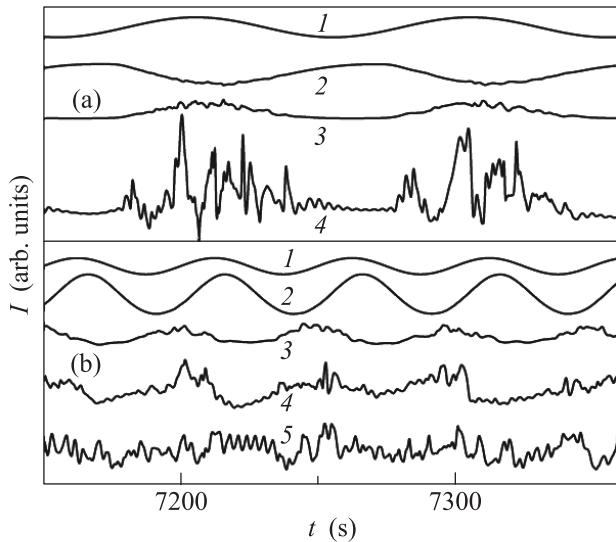


Рис. 6. Фрагменты зависимостей от времени различных расчетных величин (в произвольных единицах) при $f_1 = 0.01$ Гц, $A = 0.163$ (a) и $f_2 = 0.02$ Гц, $A = 0.2$ (b): Ω_i (1), E_φ (2), E_ψ (3), u_φ в точке 7 (4), u_φ в точке 1 (5), $\text{rms}(df)/\Omega_1 = 0.256, 0.130$ и 0.274 для случаев 4a, 4b и 5b соответственно

увеличением частоты и амплитуды модуляции. Это позволяет объяснить появление в эксперименте спектров, характерных для квазидвумерной турбулентности (рис. 2 и 3), только при достаточно высоких амплитудах модуляции. Вместе с тем при модуляции скоростей вращения внутренней и внешней сфер синхронизация между $\Omega_k(t)$ и E_φ, E_ψ (понимаемая как захват частоты и/или фазы) существенно различна. В первом случае практически синфазно с изменением $\Omega_1(t)$ изменяется E_ψ (рис. 5a), а во втором наименьший сдвиг фаз наблюдается между $\Omega_2(t)$ и E_φ (рис. 6b). Поскольку величины E_φ на два порядка выше, чем E_ψ , приведенные выше результаты свидетельствуют о том, что синхронизация течения, вызванная модуляцией $\Omega_2(t)$, сильнее. Как видно, уровень синхронизации между $\Omega_2(t)$ и u_φ неоднороден по толщине слоя жидкости (рис. 6b): в точках, удаленных от внутренней сферы, просматривается корреляция между скоростью сферы и скоростью течения (кривая 4), а вблизи внутренней сферы – нет (кривая 5). О меньшем уровне синхронизации в последнем случае свидетельствует и отсутствие пика на частоте модуляции в спектре на рис. 4b. С целью проверки этого предположения для случаев, соответствующих рис. 5, рассчитаны мгновенные величины разности частот df между $\Omega_k(t)$ и u_φ . Согласно [22] величины мгновенной частоты и фазы определяются как $\chi(t) = \partial[\Psi(t)]/\partial t$ и $\Psi(t) = \arctg[y(t)/x(t)]$.

Здесь $x(t)$ – сигнал скорости, а $y(t)$ – ортогональное дополнение к $x(t)$, вычисляемое как преобразование Гильберта ряда $x(t)$. Оказалось, что наименьшие величины среднеквадратичных отклонений разности частот $\text{rms}(df)$ между $\Omega_k(t)$ и u_φ (самая сильная синхронизация) наблюдаются вблизи внешней сферы при ее модуляции (рис. 6). Таким образом, самая сильная синхронизация соответствует случаю спектров турбулентности, вид которых характерен для верхних слоев атмосферы. Наибольшие величины среднеквадратичных отклонений разности частот наблюдаются вблизи внутренней сферы при модуляции внешней. Это означает, что самая слабая синхронизация соответствует случаю трехмерной турбулентности. Сравнение двух рассмотренных выше случаев свидетельствует о том, что влияние модуляции внешней сферы на течение ограничивается областью циркуляции, вызываемой ее вращением (точки 3–7 на рис. 1). Все приведенные факты указывают на то, что появление в спектре турбулентности с наклоном -3 на низких частотах и $-5/3$ на высоких возможно только в той области течения, где синхронизация между скоростью вращения и скоростью течения наиболее сильна. Снижение амплитуды модуляции приводит к ослаблению синхронизации, а ее увеличение, наряду с усилением синхронизации, ведет, как отмечалось выше, к подавлению пульсаций и, следовательно, к ослаблению турбулентности [16]. Этим и объясняется трансформация спектров к виду, характерному для атмосферной турбулентности, только в ограниченном диапазоне амплитуд модуляции.

Полученные для рассматриваемого модельного течения результаты позволяют предположить, что вид спектров турбулентности в верхних слоях атмосферы объясняется вынужденной синхронизацией периодической части атмосферных течений (например, волн Россби) внешним по отношению к ним периодическим воздействием более продолжительного периода. Поскольку основным источником энергии всех атмосферных процессов является приток солнечного тепла, сезонные вариации этой величины могут рассматриваться в качестве периодического внешнего воздействия на атмосферу.

4. Выводы. Результаты проведенных экспериментальных и численных исследований показали, что при уменьшении частоты модуляции увеличиваются различия в характере поведения азимутальной и меридиональной составляющих кинетической энергии течения. Первая из них остается периодической, тогда как у второй наблюдается смена периодического поведения на хаотическое. Подавление тур-

булентности азимутальной кинетической энергии течения создает предпосылки для формирования квазидвумерной турбулентности. Вид спектров турбулентных пульсаций азимутальной скорости зависит от того, скорость вращения какой из сфер подвергается модуляции, а также от амплитуды и частоты модуляции. Спектры, характерные для двумерной турбулентности, с постоянным наклоном $-5/3$ и обратным каскадом ($D_{LLL} > 0$) на меньших частотах, наклоном -3 и прямым каскадом ($D_{LLL} < 0$) на больших обнаружены при модуляции скорости внутренней сферы. При частоте модуляции, меньшей частоты исходного периодического течения, вид спектров неоднороден по пространству. В случае модуляции скорости внешней сферы в области индуцированной ею циркуляции наблюдаются спектры, качественный вид которых характерен для турбулентности в верхних слоях атмосферы, с постоянным наклоном -3 на меньших частотах и $-5/3$ на больших. Для обоих участков инерционного интервала $D_{LLL} < 0$. Вблизи внутренней сферы вид спектра характерен для трехмерной турбулентности: остается участок с постоянным наклоном $-5/3$ и $D_{LLL} < 0$. Установлено, что во всех рассмотренных выше течениях уровень синхронизации между скоростью вращения границы и скоростью течения различен. Наименьшая синхронизация наблюдается там, где спектры подобны спектрам трехмерной турбулентности, наибольшая – там, где они подобны спектрам атмосферной турбулентности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект # 14-08-00204).

1. K. S. Gage and G. D. Nastrom, *J. Atmos. Sci.* **43**(7), 729 (1986).
2. E. Lindborg, *J. Fluid Mech.* **388**, 259 (1999).

3. R. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
4. А. Н. Колмогоров, *ДАН СССР* **32**, 19 (1941).
5. U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
6. С. Д. Данилов, Д. Гурарий, *УФН* **170**(9), 921 (2000).
7. G. Boffetta and R. E. Ecke, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **44**, 427 (2012).
8. H. Xia, D. Burne, G. Falkovich, and M. Shats, *Nat. Phys.* **7**, 321 (2011).
9. A. Vallgren, E. Deusebio, and E. Lindborg, *Phys. Rev. Lett.* **107**(26), 268501 (2011).
10. А. Е. Гледзер, Е. Б. Гледзер, А. А. Хапаев, О. Г. Чхетиани, *ЖЭТФ* **140**, 590 (2011).
11. Д. Ю. Жиленко, О. Э. Кривоносова, *ЖТФ* **80**, 16 (2010).
12. C. N. Baroud and H. L. Swinney, *Physica D* **184**, 21 (2003).
13. Д. Ю. Жиленко, О. Э. Кривоносова, Н. В. Никитин, *Изв. РАН, МЖГ* **6**, 38 (2007).
14. И. М. Яворская, *Изв. АН СССР, МЖГ* **2**, 15 (1975).
15. Ю. Н. Беляев, А. А. Монахов, С. А. Шербаков, И. М. Яворская, *Письма в ЖЭТФ* **29**(6), 329 (1979).
16. Д. Ю. Жиленко, О. Э. Кривоносова, *Изв. РАН, МЖГ* **4**, 45 (2013).
17. С. Н. Гордиенко, С. С. Моисеев, *ЖЭТФ* **116**, 1630 (1999).
18. N. Nikitin, *J. Comp. Phys.* **217**(2), 759 (2006).
19. Д. Ю. Жиленко, О. Э. Кривоносова, *Письма в ЖТФ* **39**(1), 62 (2013).
20. А. С. Монин, *Гидродинамика атмосферы, океана и земных недр*, Гидрометеиздат, С.-П. (1999).
21. Г. С. Голицын, *Докл. РАН* **415**(3), 325 (2007).
22. V. S. Anishenko, V. Astakhov, A. Neiman, T. Vadivasova, L. Schimansky-Geier, *Nonlinear Dynamics of cChaotic and Stochastic Systems*, Springer (2002).