

Закон схождения сильных цилиндрических и сферических ударных волн в газе с однородной плотностью

У. Юсупалиев, Н. Н. Сысоев¹⁾, С. А. Шутеев, В. Г. Еленский

Физический факультет МГУ им. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 11 марта 2015 г.

Рассмотрена модель схождения цилиндрических и сферических ударных волн (УВ) в газе с однородной плотностью. Дифференциальные уравнения с частными производными этой модели сведены к обыкновенным дифференциальным уравнениям, из которых определены законы схождения таких УВ и зависимость их показателя автомодельности α от показателя адиабаты газа γ и их числа Маха M , $\alpha = f(\gamma, M)$. Показано, что эта зависимость для цилиндрических УВ в одноатомном ($\gamma = 1.67$) и двухатомном ($\gamma = 1.4$) газах в пределах ошибки измерений согласуется с опытными данными.

DOI: 10.7868/S0370274X15090052

Задача о схождении сильных ($M \gg 1$) сферических и цилиндрических (УВ) в идеальном газе с однородной плотностью впервые была рассмотрена G. Guderley [1] и, независимо, Л.Д. Ландау–К.П. Станюковичем [2, 3]. В качестве масштаба длины ими был принят радиус фронта УВ,

$$R(t) = A_{SW} \cdot (-t)^\alpha. \quad (1)$$

Момент $t = 0$ считался моментом кумуляции (здесь A_{SW} – размерный параметр). Тогда при $t < 0$ волна сходится к центру сферы (оси цилиндра), а при $t > 0$ отражается от него (нее). Система уравнений задачи состояла из уравнений непрерывности, Эйлера и адиабатичности. Их решения искались в виде [2, 3]

$$V = \frac{\alpha r}{t} V(\xi), \quad \rho = \rho_0 \cdot G(\xi), \quad C^2 = \frac{\alpha^2 r^2}{t^2} Z(\xi),$$

где $\xi = r/R(t)$ – автомодельная переменная, r – координата в сферической (цилиндрической) системе координат, v – радиальная скорость газа относительно системы координат, связанной с неподвижным газом, находящимся в объеме сферы (цилиндра) с радиусом R , ρ – плотность газа, c – скорость звука в газе, ρ_0 – плотность газа перед фронтом УВ. Искомые величины, v , ρ и c , относятся к области $r \sim R$ за фронтом УВ вблизи ее центра (оси симметрии).

В указанных работах численным методом были определены значения α лишь для некоторых значений показателя адиабаты для невозмущенного газа γ : 1.4 [1–3]; 1, 1.67, 3 и ∞ [2] (см. таблицу).

Напомним, что начиная с работ [1–3], определение значений α является одной из основных задач

теоретического и экспериментального исследования закономерностей распространения УВ в газе с однородной и неоднородной плотностями.

Сильная сходящаяся сферическая УВ рассмотрена авторами работы [4] в классе автомодельных решений [5] с неизвестной величиной α . Показано, что в момент фокусировки давление и температура на ее фронте неограниченно возрастают, в то время как плотность газа остается ограниченной. Задача о сильных сходящихся УВ была также рассмотрена приближенным методом Chester–Chisnell–Whitham [6–8].

В настоящее время в связи с проблемой управляемого газодинамического термоядерного синтеза задача Guderley–Ландау–Станюковича снова приобретает актуальность [9, 10]. Она недавно (и снова численно) решалась для интервала значений $\gamma = 1.001–3.0$ в работе [11].

Экспериментальному определению величины α для сходящейся цилиндрической УВ посвящены работы [12–14]. В них было показано, что для такой УВ значение α в пределах ошибки измерений совпадает с предсказываемым авторами работ [1–3]. Зависимость $\alpha = f(M)$ для цилиндрической УВ, созданной с помощью θ -пинча в аргоне и ксеноне при $p_0 = 970$ Па [14], приведена на рис. 1.

Несмотря на давнюю историю исследований указанных сходящихся УВ в газе [1–4, 6–8], аналитическая зависимость $\alpha = f(\gamma, M)$ до сих пор не определена. Понятно, что иметь дело с такой зависимостью, согласующейся с опытными данными, всегда предпочтительнее, так как она может помочь установить новые, ранее не известные закономерности исследуемого явления. Данное сообщение посвящено

¹⁾e-mail: nesu@phys.msu.ru

Значения показателя автомодельности α

$\gamma/\gamma_{\text{eff}}$	$v = 1$			$v = 2$		
$\rightarrow 1.0 \rightarrow 1.0$	1.0 [2]	1.0 [9–11]	1.0 (17)	1.0 [2]	0.75 [5]	1.0 (17)
1.4/1.2–1.4	0.83 [1, 2]	0.83 [9–11]	0.87–0.85 (17)	0.72 [1–3]	0.72 [5]	0.78–0.75 (17)
1.67/1.2–1.67	0.83	0.81 [9–11]	0.86–0.80 (17)	0.68 [2, 3]	0.70 [5]	0.67–0.75 (17)
3.0/1.9–3.0	0.81 [2]	0.77 [9–11]	0.81–0.67 (17)	0.62 [2]	0.67 [5]	0.68–0.50 (17)
$\rightarrow \infty$	0.5 [2]	0.71 [9–11]	0.50 (17)	0.37 [2]	0.60 [5]	0.38 (17)

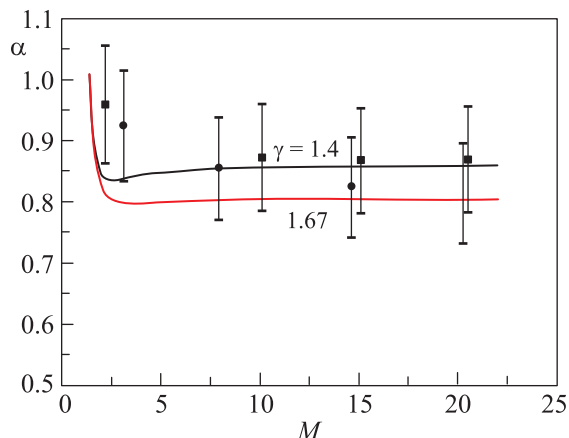


Рис. 1. Зависимости показателя автомодельности от числа Маха сходящейся цилиндрической УВ. Экспериментальные данные взяты из работы [18]

нахождению именно такой зависимости и сравнению ее с опытными данными для сходящейся цилиндрической УВ.

1. Экспериментальное определение значений α для сходящейся цилиндрической УВ. Сходящаяся цилиндрическая УВ генерировалась с помощью электрического взрыва проводников – импульсного электрического разряда в воздухе при давлении $p_0 = 10^5$ Па. В качестве проводников использовалась металлизированная лавсановая пленка толщиной 5 мкм и шириной 0.15 м. Она закреплялась на внутренней поверхности текстолитовой трубы толщиной 0.01 м с внутренним диаметром $2R_0 = 0.22$ и 0.15 м. Генератор УВ входил в состав разрядного контура в качестве полезной нагрузки. Он имел батарею конденсаторов емкостью $C = 30$ мкФ с зарядным напряжением $U_0 = (5–25)$ кВ и управляющий воздушный разрядник. Для регистрации характеристик УВ была использована теневая установка, построенная на основе двух объективов Максудова диаметром 300 мм. При этом для достижения необходимого пространственно-временного разрешения УВ (0.5 мм, 10^{-7} с) применялся сверхскоростной фоторегистратор СФР-2М, работающий как в покадровом режиме, так и в режиме фоторазвертки во времени.

Работа разряда и фоторегистратора была синхронизирована с помощью блока управления. Изучалась динамика схождения цилиндрической УВ к ее оси симметрии Oz путем регистрации теневой картины схождения УВ в перпендикулярном к оси направлении.

Предварительные опыты показали, что эффект кумуляции сходящейся УВ проявляется в относительно малой области (10–20 мм) в окрестности оси Oz . Поэтому при исследовании усиления сходящейся УВ особое внимание уделялось пространственно-временному разрешению волны именно в этой области.

В качестве примера на рис. 2 и 3 приведены последовательность кадров фоторегистрации и разверт-

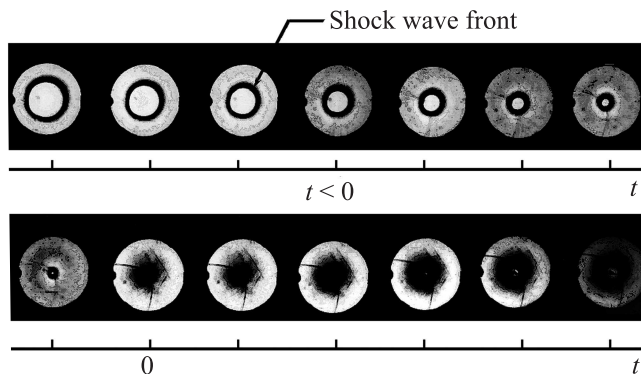


Рис. 2. Процессы схождения цилиндрической ударной волны к оси симметрии и отражения от нее. Экспозиция кадра сверхскоростного фоторегистратора 2 мкс

ка во времени процесса схождения фронта цилиндрической УВ соответственно. Следует подчеркнуть, что процесс схождения фронта УВ сильно зависит от начальных возмущений: наблюдаемое нами симметричное схождение имеет место не во всех случаях.

Из последнего рисунка определялась зависимость фронта УВ $R(t)$ для различных режимов ее генератора (начальное число Маха M изменялось путем варьирования напряжения U_0). При вычислении α из зависимости $R(t)$ для различных M за начало отсчета времени $t = 0$ (следуя [1–3]) мы принимали

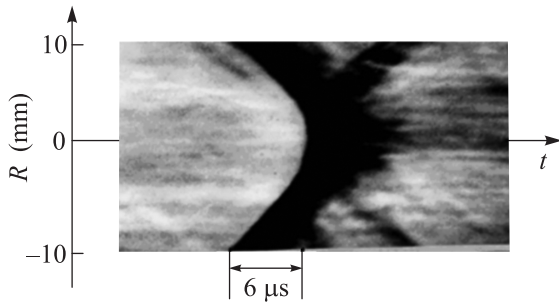


Рис. 3. Развертка во времени процесса схождения цилиндрической УВ к оси ее симметрии Oz и отражения от нее. По мере приближения фронта УВ к оси скорость ее растет, причем чем ближе к центру, тем сильнее, т.е. наблюдается эффект кумуляции УВ

момент кумуляции УВ. Экспериментальная зависимость $\alpha(M)$ для $\gamma = 1.4$ приведена на рис. 1.

2. Модель схождения УВ. Для установления искомой зависимости $\alpha = f(\gamma, M)$ мы используем те же уравнения, что и в работах [1–3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\rho v}{r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\rho \partial r}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln p \rho^{-\gamma_{\text{eff}}} + v \frac{\partial}{\partial r} \ln p \rho^{-\gamma_{\text{eff}}} = 0, \quad (4)$$

где p – давление газа, γ_{eff} – показатель адиабаты газа за фронтом УВ. Воспользуемся одним из основных свойств сильных УВ – равенством внутренней энергии и кинетической энергии единицы массы газа за их фронтами [15, 16]. Тогда для давления получим

$$p = \frac{(\gamma_{\text{eff}} - 1)\rho v^2}{2} = D\rho v^2. \quad (5)$$

Решение системы уравнений (3)–(6) будем искать в виде

$$V = \dot{R}(t)u(\xi), \quad \rho = \rho_0(\xi), \quad (6)$$

где в качестве масштаба плотности выбрана плотность ρ_0 газа перед фронтом УВ, а в качестве масштаба скорости – $\dot{R}(t) = dR(t)/dt$. В отличие от работ [1–3] в данной постановке задачи радиус фронта УВ $R(t)$ является искомой функцией.

Подставляя (5) и (6) в уравнения (2)–(4) и приводя их к безразмерному виду, получим следующую систему:

$$\frac{g'}{g}(u - \xi) + u' + v \frac{u}{\xi} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} - \xi \frac{u'}{u} + \gamma_{\text{eff}} u' + Du \frac{g'}{g} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} - \xi \frac{u'}{u} + u' + D \frac{g'}{g}(\xi - u) = 0, \quad (9)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ , а точка – по t .

Граничные и начальные условия к этой системе формулируются следующим образом:

$$u(1) = \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\gamma M^2} \right); \quad R(0) = 0; \quad \left. \frac{dR(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

Граничное условие для безразмерной функции $u(\xi)$ при $\xi = 1$ определено из формулы, полученной в [2].

Определив из (7) выражение для g'/g и подставив его в (8) и (9), получим систему уравнений, в которой переменные разделяются с константой разделения C :

$$\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = C, \quad (11)$$

$$\xi \frac{u'}{u} - \gamma_{\text{eff}} u' - Du \frac{u' + v u / \xi}{\xi - u} = C, \quad (12)$$

$$\xi \frac{u'}{u} - u' - D \left(u' + v \frac{u}{\xi} \right) = C. \quad (13)$$

Решением уравнения (11) при $C \neq 1$ с начальным условием (10) является функция

$$R(t) = A_{\text{SW}} t^{1/(1-C)}, \quad (14)$$

представляющая собой закон распространения УВ. При $t < 0$ решение (15) совпадает с законом (1), где показатель автомодельности

$$\alpha = \frac{1}{1 - C}. \quad (15)$$

Поскольку закон (14) был получен из уравнения Эйлера, используемого для описания широкого класса явлений, можно предположить, что он применим также и для других видов сильных УВ. Сравнение формулы (14) при $t \geq 0$ с формулами, полученными из размерностных соображений в [5] и [17], показывает, что для плоских УВ, расходящихся цилиндрических и сферических УВ в газе с однородной плотностью значения α равны $2/3$, $1/2$ и $2/5$ соответственно. Применимость закона (14) для сходящихся тороидальных УВ и правильных выпуклых многоугольных УВ с фронтами замкнутой поверхности (в воздухе при $p_0 = 10^5$ Па) проверялась нами на опыте [18, 19]. Для этих УВ было найдено $\alpha \approx 0.81$.

Константу C в (11) можно получить из (13), зная граничные условия для $u(1)$ и $u'(1)$. Граничное условие при $\xi = 1$ найдем из (12) и (13):

$$u'(1) = v \frac{2(1 - \gamma_{\text{eff}}/\gamma M^2)(\gamma - 3 + 4\gamma_{\text{eff}}/\gamma M^2)}{(\gamma + 1)^2}.$$

Далее, получив выражение для константы C , с учетом (15) определим искомое выражение для величины α :

$$\alpha = \left\{ 1 - \frac{v}{\gamma + 1} \left[\gamma + 1 - 2 \left(1 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\gamma M^2} \right) (2 + \gamma_{\text{eff}}) + 4 \left(1 - \frac{\gamma_{\text{eff}}}{\gamma M^2} \right)^2 \frac{1 + \gamma_{\text{eff}}}{\gamma + 1} \right]^{-1} \right\}. \quad (16)$$

3. Сравнение результатов модели с опытными данными. На рис. 1 представлены как экспериментальные результаты, так и кривые зависимости $\alpha = f(M)$, построенные по формуле (16) для сходящейся цилиндрической УВ при $\gamma = 1.67$ ($\gamma_{\text{eff}} = 1.64$) и $\gamma = 1.4$ ($\gamma_{\text{eff}} = 1.37$). Видно, что кривые в диапазоне варьирования числа $M \approx 1.5-6.0$ описывают тенденцию уменьшения величины α , а при $M > 6$ в пределах ошибки измерения совпадают с опытными данными работы [14] и настоящей работы. Расчетные значения при $M > 8$ практически совпадают со значениями α , определенными в работах [1–3]. Для сильных сходящихся цилиндрических и сферических УВ из (16) следует

$$\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 1 - v \left(\gamma - 2\gamma_{\text{eff}} + 4 \frac{1 + \gamma_{\text{eff}}}{1 + \gamma} - 3 \right)}. \quad (17)$$

В таблице приведены значения α , вычисленные по этой формуле для $\gamma = 1, 1.4, 1.67, 3, \infty$. Они практически не отличаются от соответствующих значений, определенных численным методом в [1–4].

Таким образом, на основе предложенной нами модели установлены ранее не известные зависимости $\alpha = f(\gamma, M)$ для сходящихся цилиндрических и сферических УВ. При $\gamma = 1.4$ и 1.67 они согласуются с опытными данными для цилиндрических УВ, созданных различными способами (с помощью θ -пинча [14] и электрического взрыва металлизированной майларовой пленки в воздухе).

1. G. Guderley, *Luftfahrtforschung* **19**(9), 302 (1942).
2. К. П. Станюкович, *Неустановившиеся движения сплошной среды*, Наука, М. (1971).
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, М. (1988).
4. К. В. Брушлинский, Я. М. Каждан, *УФН* **18**(2), 323 (1963).
5. Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, Наука, М. (1987).
6. W. Chester, *Phil. Mag.* **45**, 1293 (1954).
7. R. F. Chisnell, *J. Fluid Mech.* **2**, 286 (1957).
8. G. B. Whitham, *J. Fluid Mech.* **4**, 337 (1958).
9. Н. А. Попов, В. А. Щербаков, В. Н. Минеев, Р. М. Зайдель, А. И. Фунтиков, *УФН* **178**, 1087 (2008).
10. *Ядерный синтез с инерционным удержанием. Современное состояние и перспективы для энергетики*, под ред. Б. Ю. Шарков, Физматлит, М. (2005).
11. Х. Ф. Валиев, А. Н. Крайко, *ПММ* **75**(2), 314 (2011).
12. R. S. Denner and L. N. Wilson, *Exploding wires* **2**, 145 (1962).
13. H. Matsuo and Y. Nakamura, *J. Appl. Phys.* **52**(7), 4503 (1981).
14. П. Н. Баронец, *Изв. АН СССР. МЖГ* **3**, 182 (1984).
15. К. Чу, Р. Гросс, *Ударные волны в физике плазмы*, в сб.: *Физика высокотемпературной плазмы*, Мир, М. (1972), с. 262.
16. М. А. Цикулин, Е. Г. Попов, *Излучательные свойства ударных волн в газах*, Наука, М. (1977).
17. *The Scientific Papers of G.I. Taylor, v. III, Aerodynamics and the Mechanics of Projectiles and Explosion*, ed. by G. K. Batchelor, Cambridge University Press (1963).
18. У. Юсупалиев, *Краткие сообщения по физике* **7**, 3 (2012).
19. У. Юсупалиев, Н. Н. Сысоев, *Краткие сообщения по физике* **8**, 3 (2013).