Письма в ЖЭТФ, том 101, вып. 9, с. 708 – 711 © 2015 г. 10 мая

Динамика спина в модели Френкеля с учетом изменения инерционных свойств электрона

С. Л. Лебедев[1)]

Сургутский государственный университет, 628412 Сургут, Россия

Поступила в редакцию 10 марта 2015 г.

В области значений параметров $\gamma \gg 1$, $a_e \lesssim \chi \ll 1$ (γ – лоренц-фактор, $a_e = \frac{1}{2}(g-2)$, $\chi = \sqrt{(eF_{\mu\nu}p_\nu)^2}/m_e^3$) уравнения движения модели Френкеля приводят к обобщению системы уравнений Лоренца и Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ). Модификация связана с учетом френкелевской добавки $m_{\rm Fr}$ к массе электрона и может представлять интерес для планируемых в настоящее время экспериментов с релятивистскими пучками. Полученное уравнение Френкеля–БМТ содержит продольную часть с зависящим от времени коэффициентом, не равным нулю при $g = 2$. В случае постоянных фоновых полей уравнения траектории и спина могут быть проинтегрированы с требуемой точностью, если известна первообразная функции $m_{\rm Fr}(\tau)$. Для спин-орбитального вклада Δm_{so} в сдвиг массы найдено новое представление через геометрические инварианты мировых линий. Показано, что скорость изменения Δm_{so} определяется величиной $\sim(a_e + m_{\rm Fr}/m_e)$. Указано на принципиальную возможность периодического изменения спинового света вдоль траектории пучка.

DOI: 10.7868/S0370274X15090106

1. Введение. Обсуждаемые в последнее время новые конфигурации экспериментов в физике релятивистских пучков связаны с эффектами каналирования и beamstrahlung'а [1–3]. Ожидаемые в этих экспериментах значения динамического параметра[2)]

$$\chi = \frac{\sqrt{(eF_{\mu\nu}p_\nu)^2}}{m_e^3} \tag{1}$$

сравнимы с единицей и, таким образом, являются оптимальными для наблюдения эффектов квантовой электродинамики (QED) интенсивных полей. С другой стороны, вполне оправдало себя описание поляризации релятивистских электронов с помощью классического уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) [1, 4], в котором эффекты QED учитываются феноменологически введением аномального магнитного момента (АММ) электрона $a_e \simeq \alpha/2\pi$ ($\alpha/2\pi$ – так называемое швингеровское значение АММ). Не будучи лагранжевым, уравнение БМТ может быть выведено как линейное по спину приближение из предложенной Френкелем [5] (лагранжевой) модели "релятивистского волчка" [6]. Эта модель, однако, содержит добавку к массе электрона

$$m_{\rm Fr} = \frac{1}{2}{\rm tr}(\hat{\mu}\hat{F}) = -\frac{1}{2}\mu_{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \quad \frac{m_{\rm Fr}}{m_e} \sim \chi \tag{2}$$

($\hat{F} = \|F_{\alpha\beta}\| = {\rm const}$ и $\hat{\mu}(\tau) = \|\mu_{\alpha\beta}\|$ – тензоры электромагнитного поля и магнитного момента), которой обычно пренебрегают. Действительно, в современных ускорителях с энергиями электронов $E_e \gtrsim 1$ ГэВ характерные значения χ лежат в интервале $\chi \simeq 10^{-6}$–10^{-5} [1, 2], что значительно меньше $a_e \simeq 10^{-3}$. Это позволяло не принимать во внимание поправки, связанные с $m_{\rm Fr}$ (если, разумеется, рассматривать уравнение БМТ в рамках подхода Френкеля). Поскольку планируемые эксперименты делают значения $\chi \lesssim 1$ вполне достижимыми, следует выяснить, в какой степени отличие $m_{\rm Fr}$ от нуля может повлиять на динамику поляризации релятивистского электрона. В данной работе, отталкиваясь от френкелевских уравнений движения, мы получаем с известной точностью уравнение спина, в котором присутствуют и $m_{\rm Fr}$, и a_e. Мы находим решение этого уравнения для произвольного постоянного поля, предполагая только медленность изменения $m_{\rm Fr}$. В заключение найденные решения используются для вычисления спин-орбитального вклада в сдвиг массы (СМ) [7] и доказывается сделанное ранее [8] утверждение о медленном изменении Δm_{so} как функции собственного времени. Периодические осцилляции Δm_{so} указывают на изменение излучательной способности пучка вдоль трека.

---

1) e-mail: lsl@iff.surgu.ru

2) С некоторыми исключениями используются система единиц, в которой $\hbar = 1 = c$, постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ и метрика, в которой 4-вектор $A_\alpha = (\mathbf{A}, iA_0)$; дуальный тензор определяется как $F^*_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$. Мы используем также диадные обозначения $[A, B]$ для тензора с элементами $A_\alpha B_\beta - A_\beta B_\alpha$ и (в отдельных случаях) точку для указания свертки по лоренцевым индексам.

2. Уравнения траектории и спина. Уравнения движения заряда в модели Френкеля могут быть представлены в виде ($\tilde{\kappa}_0 \equiv e/\mathcal{M}$)

$$\ddot{x} = \tilde{\kappa}_0 \hat{F}\dot{x} - \frac{\dot{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}}\dot{x} + \frac{1}{\mathcal{M}}\frac{d}{d\tau}\hat{\mu}a, \qquad (3)$$

$$\dot{S} = \kappa \hat{F} S + (\kappa - \tilde{\kappa}_0)\dot{x}(\dot{x}\hat{F}S) + \frac{\dot{x}}{\mathcal{M}} S \cdot \frac{d}{d\tau}\hat{\mu}a. \qquad (4)$$

В правых частях уравнений (3) и (4) мы отбросили градиентные члены, поскольку силы Штерна–Герлаха в транспортных системах ускорителей обычно малы [1]. Уравнение (3) содержится в работе [5]. Уравнение (4) получено из оригинального френкелевского ($\dot{\hat{\mu}} = \kappa[\hat{F}, \hat{\mu}] + \kappa[\dot{x}, \hat{\mu}a]$) с помощью подстановки

$$S = \frac{1}{\mu}\dot{x}\hat{\mu}^*, \quad \hat{\mu} = \mu[\dot{x}, S]^*, \qquad (5)$$

где S_α – единичный 4-вектор спина,

$$\mu = \hbar\,\kappa/2 = g\,\mu_{\rm B}/2, \quad \mu_{\rm B} = e\hbar/2m_e c. \qquad (6)$$

Пространственная подобность S_α и $\mu_{\alpha\beta}$ выражается уравнениями

$$\dot{x}S = 0, \qquad (7\text{а})$$

$$\dot{x}\hat{\mu} = 0 \qquad (7\text{б})$$

(условия Тамма и Френкеля соответственно). Вектор $a_\alpha(\tau)$ в уравнениях траектории и спина – лагранжев множитель, соответствующий связи (7б). Важно, что масса

$$\mathcal{M} = m_e + m_{\rm Fr}, \qquad (8)$$

(см. (2)) отличается от массы электрона и, вообще говоря, зависит от собственного времени. Тем не менее членом $-\frac{\dot{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}}\dot{x}$ в правой части (3) мы в дальнейшем пренебрегаем. (С помощью соотношения (9) можно показать, что этот член значительно меньше также отбрасываемого последнего члена в правой части (3), если a_e, $\chi \ll 1$.) Для вектора $\hat{\mu}a$ Френкелем получено уравнение

$$\hat{\mu}a = \hat{\mu}\left(\hat{F}\dot{x} - \frac{1}{\kappa}\ddot{x}\right),$$

которое можно переписать в виде

$$\hat{\mu}a = \mathfrak{Fr}\hat{\mu}\hat{F}\dot{x} - \frac{\hat{\mu}}{\kappa\mathcal{M}}\frac{d}{d\tau}\hat{\mu}a. \qquad (9)$$

Здесь

$$\mathfrak{Fr} \equiv 1 - \frac{2}{g}\frac{m_e}{\mathcal{M}} = \mathcal{O}(a_e, \chi). \qquad (10)$$

Используя соотношение (9) рекуррентно, можно убедиться в том, что последние слагаемые в правых частях уравнений (3) и (4) имеют порядок $\mathcal{O}(\mathfrak{Fr}\chi^2/\tau_{\rm C})$, где $\tau_{\rm C} = 1/m_e$ – комптоновское время электрона. В то же время оставшееся слагаемое $\tilde{\kappa}_0\hat{F}\dot{x}$ в уравнении (3) с учетом $m_{\rm Fr}$ дает вклады порядка $\mathcal{O}(\chi/\tau_{\rm C})$ и $\mathcal{O}(\chi^2/\tau_{\rm C})$. Удерживаемые в уравнении спина (4) первое и второе слагаемые имеют, соответственно, порядки $\mathcal{O}(\chi/\tau_{\rm C})$ и $\mathcal{O}(\mathfrak{Fr}\chi/\tau_{\rm C})$. Таким образом, с включением членов $\sim\chi^2/\tau_{\rm C}$, $\mathfrak{Fr}\chi/\tau_{\rm C}$ система уравнений (3), (4) перепишется как

$$\ddot{x} = \tilde{\kappa}_0\hat{F}\dot{x}, \qquad (11)$$

$$\dot{S} = \kappa\hat{F}S + \kappa\mathfrak{Fr}\,\dot{x}(\dot{x}\hat{F}S). \qquad (12)$$

Главным отличием уравнения (12) от уравнения БМТ является зависимость параметра $\tilde{\kappa}_0$ и, следовательно, $\mathfrak{Fr} = 1 - \tilde{\kappa}_0/\kappa$ от собственного времени. При $g = 2$ второй член в правой части (12) не обращается в нуль, если $m_{\rm Fr} \neq 0$. Система уравнений (11), (12), очевидно, сохраняет длины векторов S и $\dot{x}$ ($\dot{x}^2 = -1$, $S^2 = 1$), а также связь (7а), поскольку

$$S\ddot{x} + \dot{S}\dot{x} = 0. \qquad (13)$$

Будем называть уравнение (12) уравнением Френкеля–БМТ (Ф–БМТ). В случае постоянного поля решение уравнения Ф–БМТ может быть найдено точно, если считать известной зависимость $\mathcal{M}(\tau)$.

3. Решение уравнения Ф – БМТ для случая $\hat{F} = \mathrm{const}$. Метод Хонига, Шукинга и Вишвешвары [9], применявшийся для нахождения решений уравнения БМТ, основан на использовании репера Френе: $e^{(0)} \equiv \dot{x}$, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$, 4-векторы которого удовлетворяют уравнению Лоренца (каждый по отдельности), а также системе уравнений Френе–Серре в пространстве Минковского:

$$\begin{cases} \dot{e}^{(0)} = ke^{(1)}\,, \\ \dot{e}^{(1)} = ke^{(0)} + \tau_1 e^{(2)}\,, \\ \dot{e}^{(2)} = -\tau_1 e^{(1)} + \tau_2 e^{(3)}\,, \\ \dot{e}^{(3)} = -\tau_2 e^{(2)}. \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь k, τ_1 и τ_2 – кривизна, первое и второе кручения мировой линии $x(\tau)$. Уравнения Лоренца и система (14) оказывались совместными при условии $\dot{k} = \dot{\tau}_1 = \dot{\tau}_2 = 0$, причем для k, τ_1 и τ_2 авторы [9] нашли явные выражения через полевые инварианты $\alpha' = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$, $\beta = \mathbf{EH}$. В нашем случае необходимо потребовать, чтобы в дополнение к (14) векторы $e^{(A)}$ удовлетворяли уравнению (11):

$$\dot{e}^{(A)} = \tilde{\kappa}_0\hat{F}e^{(A)}, \quad A = \overline{0,3}. \qquad (15)$$

Уравнение (15) гарантирует постоянство длин векторов $e^{(A)}$ и их попарных скалярных произведений – необходимое условие для того, чтобы репер $\{e^{(A)}\}$

был репером Френе. Однако теперь вместе с зависимостью $\tilde{\kappa}_0$ от собственного времени от τ будут зависеть и коэффициенты k, τ_1, τ_2. В связи с этим следует определить условия совместности уравнений (15) и (14).

Для вектора $e^{(0)} = \dot{x}$ уравнение (15) выполнено по определению. Дифференцируя обе части (15) при $A = 0$ и используя первое из уравнений (14), получаем

$$\left(\dot{k} - \frac{\dot{\tilde{\kappa}}_0}{\tilde{\kappa}_0}\, k\right) e^{(1)} + k\dot{e}^{(1)} = \tilde{\kappa}_0\, k\hat{F}e^{(1)}. \tag{16}$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на $e^{(1)}$, находим, что $\dot{k} = \left(\dot{\tilde{\kappa}}_0/\tilde{\kappa}_0\right) k$, т.е. $e^{(1)}$ действительно удовлетворяет уравнению (15). Аналогичным путем приходим к равенствам

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{\tau}_1}{\tau_1} = \frac{\dot{\tau}_2}{\tau_2} = \frac{\dot{\tilde{\kappa}}_0}{\tilde{\kappa}_0}, \tag{17}$$

которые выражают пропорциональность всех геометрических коэффициентов величине $\tilde{\kappa}_0$. При этом векторы $e^{(2)}$ и $e^{(3)}$ удовлетворяют (15), а отношения геометрических коэффициентов не зависят от собственного времени:

$$\frac{k}{\tau_1} = \mathrm{const}, \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Легко проверяется, что явные формулы для определения k, τ_1 и τ_2 имеют тот же вид, что и в работе [9], с заменой $m_e \to \mathcal{M}$ (для их получения используются только уравнения (14), (15) и алгебраические свойства матрицы $\hat{F}$):

$$k^2 = -\tilde{\kappa}_0^2 e^{(0)}\hat{F}\hat{F}e^{(0)}, \tag{19а}$$

$$k^2(\tau_1^2 - k^2) = -\tilde{\kappa}_0^2\alpha' k^2 - \tilde{\kappa}_0^4\beta^2\,, \tag{19б}$$

$$k\tau_2 = \tilde{\kappa}_0^2\beta. \tag{19в}$$

Уравнения (19) демонстрируют упомянутую выше пропорциональность: k, τ_1, $\tau_2 \propto \tilde{\kappa}_0$.

Теперь решение уравнения (12) может быть найдено достаточно просто. Условие (7а) приводит к тому, что в разложении вектора S по тетрадному базису:

$$S = C_A(\tau)e^{(A)} = C_1e^{(1)} + C_2e^{(2)} + C_3e^{(3)}, \tag{20}$$

слагаемое с $e^{(0)}$ отсутствует ($C_0 = 0$). Продифференцируем уравнение (20):

$$\dot{S} = \dot{C}_A(\tau)e^{(A)} + C_A\dot{e}^{(A)} =$$
$$= \kappa C_A\left[\hat{F}e^{(A)} + \mathfrak{Fr}\, e^{(0)}(e^{(0)}\cdot\hat{F}\cdot e^{(A)})\right].$$

После использования уравнений (14) и (15) получаем

$$\dot{C}_A(\tau)e^{(A)} = \tilde{a}\, \times$$
$$\times\left[-\tau_1C_2e^{(1)} + (\tau_1C_1 - \tau_2C_3)e^{(2)} + \tau_2C_2e^{(3)}\right]. \tag{21}$$

Обратим внимание на исчезновение в правой части (21) слагаемого с вектором $e^{(0)}$; здесь введено обозначение $\tilde{a}$ для "аномалии":

$$\tilde{a} \equiv \frac{\kappa}{\tilde{\kappa}_0}\mathfrak{Fr} = \frac{g}{2}\frac{\mathcal{M}}{m_e} - 1. \tag{22}$$

Согласно (21) коэффициенты C_A удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = -\tilde{a}\tau_1C_2, \\ \dot{C}_2 = \tilde{a}(\tau_1C_1 - \tau_2C_3), \\ \dot{C}_3 = \tilde{a}\tau_2C_2. \end{cases} \tag{23}$$

Вводя "медленную" фазу

$$\Phi(\tau) = \int_0^\tau \tilde{a}\,\tau_1 d\tau \tag{24}$$

и учитывая, что $\tau_1 = \Lambda\tilde{\kappa}_0$ ($\tau_1 > 0$), где Λ не зависит от τ, имеем

$$C_2(\Phi) = C_2(0)\cos\left(\sqrt{1 + \tau_2^2/\tau_1^2}\,\Phi\right),$$

$$C_1(\Phi) = C_1(0) - \frac{C_2(0)}{\sqrt{1 + \tau_2^2/\tau_1^2}}\sin\left(\sqrt{1 + \tau_2^2/\tau_1^2}\,\Phi\right),$$

$$C_3(\Phi) = C_3(0) + \frac{C_2(0)}{\sqrt{1 + \tau_1^2/\tau_2^2}}\sin\left(\sqrt{1 + \tau_2^2/\tau_1^2}\,\Phi\right), \tag{25}$$

$$\Phi(\tau) = \Lambda\kappa_0\left(\frac{g}{2} - 1\right)\tau + \Lambda\kappa_0\int_0^\tau \frac{m_{\mathrm{Fr}}}{m_e}\, d\tau, \tag{26}$$

$\kappa_0 \equiv e/m_e$. В решении (25) начало отсчета фазы выбрано так, чтобы $\dot{C}_2(0) = 0$, а в уравнении (26) сделана замена $m_{\mathrm{Fr}}/\mathcal{M} \simeq m_{\mathrm{Fr}}/m_e$. Поскольку $|\tilde{a}| \ll 1$, вращение 4-вектора S относительно тетрады – "медленное". Сумма $C_A^2(\tau) = C_A^2(0)$.

Уравнение (11) может быть проинтегрировано по такой же схеме. Вводя "быструю" фазу Φ_1:

$$\Phi_1(\tau) = \int_0^\tau \frac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_0}\, d\tau \cong \tau - \int_0^\tau \frac{m_{\mathrm{Fr}}}{m_e}\, d\tau, \tag{27}$$

для 4-скорости получаем

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d\Phi_1}\left(1 - \frac{m_{\mathrm{Fr}}}{m_e}\right) = \exp\,(\kappa_0\hat{F}\Phi_1)\dot{x}(0). \tag{28}$$

(Метод "распутывания" выражений типа $\exp\,(\kappa_0\hat{F}\Phi_1)$ см. в работах [9–11]). Таким образом, единственной неопределенной величиной в решениях (25) и (28) остается интеграл $\int_0^\tau (m_{\mathrm{Fr}}/m_e)\, d\tau$, который также можно вычислять по теории возмущений, основанной на соотношении (9). Разумеется, присутствие этого интеграла в фазах Φ и Φ_1 не противоречит отбрасыванию члена $-\dot{\mathcal{M}}\dot{x}/\mathcal{M}$ в правой части уравнения (3). Ввиду малости последнего (он вносит в правую часть (3) вклад $\sim \mathfrak{Fr}^2\chi^3/\tau_{\rm C}$) эволюцию $\mathcal{M}$ в уравнениях (11), (12) следует рассматривать в духе адиабатического подхода (см. например, [12]). Функция $m_{\rm Fr}/m_e$ может быть в принципе найдена по отличию траектории заряда от лоренцевской. Затем эти данные можно использовать для определения поляризации с помощью уравнений (25), (26).

4. Спин-орбитальный вклад в сдвиг массы. Сдвиг массы релятивистского заряда, возникающий вследствие взаимодействия орбитального и спинового токов, определяется выражением [8]

$$\Delta m_{so} = \frac{\mu e}{8\pi\sqrt{3}}\,\frac{\dot{x}\wedge\ddot{x}\wedge\dddot{x}\wedge S}{\sqrt{\ddot{x}^2}}. \tag{29}$$

Мнимая часть СМ определяет вероятность излучения в единицу собственного времени: $\lambda = -2\Im\Delta m$ (см. [13]). Соответственно $-2\Im\Delta m_{so}$ представляет вклад спина в эту вероятность. Покажем, что скорость изменения Δm_{so} пропорциональна аномалии (22). Подстановка уравнений (14) и (20) в (29) дает

$$\Delta m_{so} = -i\frac{\mu e}{8\pi\sqrt{3}}\,k\tau_1 C_3(\tau). \tag{30}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $e^{(0)}\wedge e^{(1)}\wedge \wedge e^{(2)}\wedge e^{(3)} = -i$). Пренебрегая слагаемыми, пропорциональными $\dot{\mathcal{M}}$, в соответствии с последним из уравнений (23) находим

$$\frac{d}{d\tau}\Delta m_{so} = -i\frac{\mu e}{8\pi\sqrt{3}}\,k\tau_1\tau_2\tilde{a}\,C_2(\tau). \tag{31}$$

В случае ортогональных полей ($\beta = 0$) правая часть (31) обращается в нуль, а коэффициент C_3 становится интегралом движения (см. (19в) и (25)). Коэффициенты C_2 и C_3 могут быть выражены через спиновые инварианты $S\hat{F}\dot{x}$, $S\hat{F}\hat{F}\dot{x}$ и $S\hat{F}^*\dot{x}$. Действительно, $C_2 = Se^{(2)}$, $C_3 = Se^{(3)}$, а для нахождения векторов $e^{(2)}$ и $e^{(3)}$ можно воспользоваться формулами (8а) и (9а) из работы [9] (с заменой m_e на $\mathcal{M}$), например

$$e^{(3)} = \frac{\tilde{\kappa}_0^5\beta}{k^3\tau_1\tau_2}\left[\beta\hat{F}\dot{x} - (\dot{x}\hat{F}\hat{F}\dot{x})\hat{F}^*\dot{x}\right]. \tag{32}$$

Используя соотношения (19) и (32), правую часть уравнения (30) можно переписать в виде (ср. с [8])

$$\Delta m_{so} = i\frac{\mu e}{8\pi\sqrt{3}}\,\frac{\tilde{\kappa}_0^3}{k}\times$$
$$\times\left[(\dot{x}\hat{F}\hat{F}\dot{x})(S\hat{F}^*\dot{x}) - (\dot{x}\hat{F}\hat{F}^*\dot{x})(S\hat{F}\dot{x})\right]. \tag{33}$$

Заметим, что кручение τ_2 определяется с точностью до знака, который связан с выбором правой или левой тройки векторов $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $e^{(3)}$ [9]. Этот знак проявит себя как в коэффициенте C_3, так и в выражении $e^{(0)}\wedge e^{(1)}\wedge e^{(2)}\wedge e^{(3)}$ (см. (32)). Наш выбор (19в) соответствует правой тройке, а Δm_{so}, как и должно быть, от этого выбора не зависит.

На основании уравнений (25), (30) можно заключить, что классическая теория приводит к вариациям в знаке спинового вклада $-2\Im\Delta m_{so}$ в вероятность излучения поляризованного электрона при условии

$$|C_3(0)| < \frac{|C_2(0)|}{\sqrt{1+\tau_1^2/\tau_2^2}}. \tag{34}$$

Как следует из соотношений (19) и (25), период осцилляций имеет величину порядка $2\pi\gamma/(\Lambda\kappa_0\tilde{a}\sqrt{1+\tau_2^2/\tau_1^2}) = 2\pi\gamma/|\kappa_0|H_{RF}\tilde{a}$ (H_{RF} – магнитное поле в системе покоя частицы). Такая зависимость может привести к нестационарности спинового света (эксперимент и теория спинового света в магнитном поле обсуждаются в работах [14, 15]). Поскольку $\tau_2 \propto \beta$, эффект возможен только при одновременном наличии (неортогональных) полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Нужно, однако, заметить, что формула (29) является асимптотической (см. [8]) и для окончательного решения вопроса об осцилляциях требуется рассмотреть поправку к Δm_{so} (29) следующего порядка по $1/\gamma$.

1. S.R. Mane, Yu.M. Shatunov, and K. Yokoya, Rep. Prog. Phys. **68**, 1997 (2005).
2. J. Esberg and U.I. Uggerhøj, J. Phys: Conf. Ser. **198**, 012007 (2009).
3. U.I. Uggerhøj, Electromagnetic processes in strong crystalline fields. CERN-SPSC-2010-010/SPSC-SR-059 (2010).
4. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М. (1989).
5. J. Frenkel, Zs. Phys. **37**, 243 (1926).
6. И.М. Тернов, В.А. Бордовицын, УФН **132**, 345 (1980).
7. S.L. Lebedev, in *Proc. Int. Conf. "I.Ya. Pomeranchuk and Physics at the Turn of Centuries"*, World Scientific, Singapore (2003), p. 440; hep-th/0508166.
8. S.L. Lebedev, Int. Jour. Mod. Phys. A **29**, 1450186 (2014).
9. E. Honig, E.L. Schucking, and C.V. Vishveshwara, J. Math. Phys. **15**, 774 (1974).
10. D. Zwanziger, Phys. Rev. B **139**, 1318 (1965)
11. А.И. Никишов, В.И. Ритус, ЖЭТФ **56**, 2035 (1969).
12. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Механика*, Наука, М. (1988).
13. В.И. Ритус, ЖЭТФ **80**, 1288 (1981).
14. A.E. Bondar and E.L. Saldin, Nucl. Instr. Meth. **195**, 577 (1982).
15. В.А. Бордовицын, И.М. Тернов, В.Г. Багров, УФН **165**, 1083 (1995).