Письма в ЖЭТФ, том 54, вып. 3, стр. 179 — 181 10 августа 1991 г.

"СОХРАНЕНИЕ ЧИСЛА ВОЛН" И НАСЛЕДОВАНИЕ СИММЕТРИЙ ПРИ УСРЕДНЕНИИ ПО УИЗЕМУ

В.Р.Кудашев

Башкирский государственный университет
450074, Уфа

Поступила в редакцию 13 июня 1991 г.

Обнаружена простая связь между уравнениями Уизема, имеющими инварианты Римана и законами сохранения типа "сохранение числа волн", возникающими при усреднении по методу Уизема.

1. Эффективность метода Уизема [1] при описании ряда нелинейных процессов (наиболее известна постановка задачи Гуревича и Питаевского [2]), с одной стороны, и обнаружение обобщенного метода годографа [3,4], с другой стороны, привели к большому циклу работ в этой области (см., например, [4-7] и данные там ссылки).

Основная цель настоящей статьи состоит в сообщении простой связи, существующей между уравнениями Уизема в "римановой форме" и законами сохранения для этих уравнений типа закона "сохранения числа волн". Одним из простейших следствий этой связи является физически наглядная формулировка принципа наследования высших симметрий при усреднении однофазных периодических решений ряда нелинейных уравнений по методу Уизема.

2. Напомним, что, как правило, уравнения Уизема в "римановой форме" входят в класс полугамильтоновых систем гидродинамического типа [4,5], т.е. диагональных систем вида (правило суммирования по повторяющимся индексам не подразумевается !)

$$r^i_t = \varphi^i(r) r^i_x, \quad r^i = r^i(t,x), \quad i = 1,...,N, \tag{1}$$

где $r^i_t = D_t r^i \equiv dr^i/dt$, $r^i_x = D_x r^i \equiv dr^i/dx$, причем $\varphi^i \neq \varphi^k$ при $i \neq k$ и кроме того $\varphi^i(r)$ удовлетворяют соотношениям

$$\partial_j c^{ik} = \partial_k c^{ij}, \quad \partial_j \equiv \partial/\partial r^j, \quad (i \neq j \neq k \neq i), \tag{2}$$

где

$$c^{ik} = (\partial_k \varphi^i)/(\varphi^k - \varphi^i), \qquad (i \neq k). \tag{3}$$

Известно [4,5], что уравнения (1) имеют законы сохранения гидродинамического типа

$$D_t \rho(r) = D_x \sigma(r), \tag{4}$$

где плотность ρ и ток σ - функции, зависящие от r^i и не зависящие от r^i_x, r^i_{xx}, ...

Наше наблюдение состоит в том, что если известен закон сохранения (4), т.е. пара (ρ, σ) с $(\partial_i \rho) \not\equiv 0$, то уравнения (1) могут быть записаны в виде

$$(\partial_i \rho) r^i_t = (\partial_i \sigma) r^i_x, \quad i = 1,...,N. \tag{5}$$

Действительно, расписывая (4) имеем

$$D_t\rho = \sum_i (\partial_i\rho)\varphi^i r_x^i = \sum_i (\partial_i\sigma) r_x^i. \tag{6}$$

Из (6), при $r_x^i \not\equiv 0$, получаем

$$\varphi^i = (\partial_i\sigma)/(\partial_i\rho), \qquad i = 1, ..., N, \tag{7}$$

откуда следует (5). Справедливо и обратное, если известны (ρ, φ^i), то ток σ восстанавливается из совместной (при условии (2)) системы уравнений

$$\partial_i\sigma = \varphi^i(\partial_i\rho), \qquad i = 1, ..., N. \tag{8}$$

Отметим, что если $\partial_i\varphi^i = 0$, то из (8) следует просто $\sigma = \varphi^i\rho$ [8].

При анализе (1), с помощью обобщенного метода годографа, существенное значение имеют симметрии гидродинамического типа [4], т.е. уравнения

$$r_\tau^i = \psi^i(r) r_x^i, \qquad r^i = r^i(\tau, t, x), \qquad i = 1, ..., N, \tag{9}$$

коммутирующие с (1) $(\partial_\tau r_t^i = \partial_t r_\tau^i)$, а также гидродинамические законы сохранения для (9)

$$D_\tau\rho(r) = D_x\bar\sigma(r), \tag{10}$$

где ρ - та же плотность, что и в (4). Аналогично (5) по паре $(\rho, \bar\sigma$ имеем для (9)

$$(\partial_i\rho) r_\tau^i = (\partial_i\bar\sigma) r_x^i, \qquad i = 1, ..., N, \tag{11}$$

причем $\bar\sigma$ удовлетворяет совместной системе

$$\partial_i\partial_k\bar\sigma = \bar c^{ik}\partial_i\bar\sigma + \bar c^{ki}\partial_k\bar\sigma, \qquad (i \neq k), \tag{12}$$

где

$$\bar c^{ik} = c^{ki}(\partial_k\rho)/(\partial_i\rho), \qquad \partial_j\bar c^{ik} = \partial_k\bar c^{ij}, \qquad (i \neq k \neq j \neq i). \tag{13}$$

3. Хорошо известно, что уравнение Кортевега - де Вриза (КдВ)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{14}$$

и его высшие симметрии (см., например, [9])

$$u_{t_{2n+1}} + D_x R^n u = 0, \tag{15}$$

$(n = 1, 2, ...;\ R = D_x^2 + 2u/3 - D_x^{-1}u_x/3;\ t_3 = t)$ имеют однофазное периодическое решение (кноидальную волну) с фиксированным периодом $u = \varphi(\theta) = \varphi(\theta + 1)$ [1,2,5,6,10]

$$\varphi(\theta) = 2a\,dn^2(2K(m)\theta, m) + r_1 + r_2 - r_3, \tag{16}$$

где $a = r_3 - r_1$, $m = (r_2 - r_1)/(r_3 - r_1)$ - модуль функции Якоби dn, $K(m)$ - полный эллиптический интеграл первого рода, $r_1 \le r_2 \le r_3$,

$$\theta_x = \kappa = \frac{(a/6)^{1/2}}{2K(m)}, \tag{17}$$

$$\theta_{t_{2n+1}} = \omega_{2n+1} = -\kappa U_{2n+1}, \tag{18}$$

где $\omega_3 \equiv \omega$, $U_3 \equiv U = (r_1 + r_2 + r_3)/3$ (рекуррентные выражения для прочих U_{2n+1} имеются в [10]).

Полагая r^i - медленно меняющимися функциями от (x, t_{2n+1}) и следуя методу Уизема [1], стандартным образом (см., например, [5,6]) получаем из (17), (18) коммутирующие законы сохранения "числа волн"

$$\partial\kappa/\partial t_{2n+1} = \partial\omega_{2n+1}/\partial x, \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{19}$$

Поскольку известно, что величины r^i являются инвариантами Римана [1,2,5] то из (5), (11) и законов сохранения волн (19) получаем, что при усреднении кноидальных волн уравнения КдФ по методу Уизема, высшие симметрии (15) наследуются в виде (ср. с [5,10])

$$(\partial_i\kappa) r^i_{t_{2n+1}} = (\partial_i\omega_{2n+1}) r^i_x, \qquad (i = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, ...). \tag{20}$$

При $n = 1$ имеем из (18) обычные уравнения Уизема [1,2,5,6], в форме

$$(\partial_i\kappa) r^i_t = (\partial_i\omega) r^i_x, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{21}$$

Отметим, что если подставить в (20) ω_{2n+1} из (18), то получим [10]

$$r^i_{t_{2n+1}} + (Q_i U_{2n+1}) r^i_x = 0, \qquad (i = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, ...), \tag{22}$$

где

$$Q_i = 1 + \frac{\kappa}{(\partial_i\kappa)} \frac{\partial}{\partial r_i}, \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{23}$$

Ясно, что форма уравнений Уизема (20 - (23) и их связь с законами сохранения "числа волн" (19) естественным образом переносится на уравнения Уизема (для которых известны инварианты Римана), возникающие при усреднении однофазных периодических решений других нелинейных уравнений. Примеры использования уравнений Уизема и гидродинамических симметрий в форме (22) в случае нелинейного уравнения Шредингера и уравнения sine-Gordon имеются в [11].

В заключение выражаю благодарность Свинолупову С.И., Шарапову С.Е. за интерес к работе.

1. Whitham G.B. Proc. Roy. Soc., 1965, A283, 238.
2. Гуревич А.В., Питаевский Л.П. ЖЭТФ, 1973, 65, 590.
3. Царев С.П. Докл. АН СССР, 1985, 282, 534.
4. Царев С.П. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1990, 54, 1048.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П. УМН, 1989, 44, 29.
6. Гуревич А.В., Крылов А.Л., Эль Г.А. ЖЭТФ, 1990, 98, 1605.
7. Дубровин Б.А. Функцион. анализ и его прилож.,1990, 24, 25.
8. Павлов М.В. ТМФ, 1987, 71, 351.
9. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Докл. АН СССР, 1979, 244, 57.
10. Кудашев В.Р., Шарапов С.Е. ТМФ, 1991, 87, 40.
11. Kudashev V.R., Sharapov S.E. Phys. Lett., 1991, A154, 445; Phys. Lett., 1991 (submitted).