

## О нелинейных (3+1)-уравнениях Клейна–Гордона, допускающих осциллирующие локализованные решения

Е. Г. Екомасов, Р. К. Салимов<sup>1)</sup>

Башкирский государственный университет, 450076 Уфа, Россия

Поступила в редакцию 5 мая 2015 г.

После переработки 15 июня 2015 г.

Определены некие нелинейные скалярные уравнения Клейна–Гордона, для которых численно обнаружено существование долгоживущих ( $t \sim 1000$ ) устойчивых сферически-симметричных решений в виде пульсонов. Их средняя амплитуда колебаний и частота моды быстрых колебаний не изменяются в течение всего времени счета. Показано, что для этих уравнений сохраняются волновые решения уравнения Клейна–Гордона с нулевой массой.

DOI: 10.7868/S0370274X1514012X

Нелинейные уравнения, допускающие решения в виде уединенных волн, используются во многих областях физики, например в теории поля, физике конденсированных сред и гидродинамике [1–3]. Наиболее изученными являются (1+1)- и (2+1)-модели [2–6]. Однако наибольший интерес с точки зрения нахождения устойчивых решений, интерпретируемых как классические модели частиц конечного размера, являются (3+1)-модели, которые часто возникают в различных физических приложениях (см., например, [7, 8]). Кроме того, задача поиска такого рода (3+1)-моделей достаточно актуальна с методической точки зрения. Иногда она решается достаточно нетривиальными способами, например комплефикацией пространственных и временных переменных [9, 10]. Методика численного поиска (3+1)-решений обычно подразумевает численное моделирование решений уравнений, имеющих в (1+1)-случае солитонные и солитоноподобные решения. Так, было широко численно исследовано поведение решений уравнений синус-Гордона (УСГ) [11],  $\phi^4$  [12], нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [13] для пространственно двумерного и трехмерного случаев. Кроме того, из-за невозможности существования стационарных решений для лоренц-инвариантных уравнений в случае пространственной размерности более одного [14] такие локализованные (3+1)- и (2+1)-решения могут иметь только бризероподобный вид. До сих пор не найдено нераспадающихся (2+1) и (3+1) осциллирующих решений нелинейных уравнений Клейна–Гордона для случая, когда уравнение имеет линей-

ный предел при стремлении амплитуды решения к нулю. Случай, когда уравнение

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = F(u) \quad (1)$$

не имеет такого предела и главным членом при стремлении амплитуды решения к нулю остается нелинейный, приводит к невозможности существования предела линейных волн и к локализации решений в сферически-симметричном случае. Подобные решения рассматривались, например, в [15] и в [16]. Недостатком таких моделей является невозможность излучения из какого-либо сферически-симметричного локализованного состояния, что сильно ограничивает их возможные физические приложения. С целью снятия указанных ограничений рассмотрим лоренц-инвариантную модель, имеющую решения в виде плоских волн и являющуюся модификацией рассмотренных авторами ранее [16] уравнений:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = u^{m/n} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2)^{r/s}. \quad (2)$$

Здесь  $m, n, r, s$  – целые положительные числа, причем  $m, n, s$  – нечетные, а  $r$  – четное. Уравнения такого вида интересны тем, что для плоских волн, где  $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2 = 0$ , они совпадают с уравнением Клейна–Гордона с нулевой массой:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = m^2 u, \quad (3)$$

а для случая  $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2 \neq 0$  их можно интерпретировать как уравнения Клейна–Гордона для поля с некоторой ненулевой массой, переписав их в виде

<sup>1)</sup>e-mail: salemrkk@yandex.ru

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = u[u^{(m-n)/n}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2)^{r/s}] \quad (4)$$

и считая квадратом массы  $m^2$  выражение

$$u^{(m-n)/n}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2)^{r/s}, \quad (5)$$

при стремлении  $u \rightarrow 0$ . Похожий подход применялся, например, в [17] при рассмотрении конформной модели классической теории поля с логарифмическим потенциалом, содержащей в себе конститюенты с бесконечной массой. Таким образом, модели вида (2) дают некоторый механизм появления решений с ненулевой массой, сохраняя при этом волновые решения для уравнения Клейна–Гордона с нулевой массой. Поэтому они интересны и с методической точки зрения. Хотя уравнение (2) и не допускает лагранжева формализма, уравнения вида

$$\nabla^2 u - u_{tt} = F(u)G(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2), \quad (6)$$

предоставляющие интересный механизм “переключения” между решениями с нулевой и ненулевой массой, можно приблизить к уравнениям, допускающим такой формализм выбором функций  $F(u)$  и  $G(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - u_t^2)$ . Уравнение (2) для сферической симметрии имеет вид

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = u^{m/n}(u_r^2 - u_t^2)^{r/s}. \quad (7)$$

Учитывая отсутствие в (2) линейного предела, можно ожидать локализации сферически-симметричных решений, как в ранее рассмотренных случаях. Такое сочетание волновых и трехмерно-локализованных частицеподобных решений, на наш взгляд, достаточно необычно и ново для скалярных нелинейных релятивистских моделей, имеющих либо волновые решения с единичной “световой” скоростью, подобно уравнению Борна–Инфельда [18], либо локализованные бризерные решения, как, например, уравнение синус-Гордона.

Для проверки предположения о существовании локализованных состояний уравнения вида (6) исследовались численно. Численное исследование уравнений с такой правой частью достаточно специфично: из-за нелинейности при малых амплитудах сложно использовать неявный разностный метод. Поэтому при численном исследовании использовался псевдоспектральный метод, ранее уже применявшийся для решения уравнений типа Клейна–Гордона [19]. При этом решение раскладывалось в ряд по тригонометрическим функциям. Коэффициенты разложения находились разностным методом по времени с

помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Количество функций составляло порядка 1000 для конечной длины  $R = 20-30$ . Исследовались уравнения вида (6) для различных значений параметров  $m, n, r, s$ . Долгоживущие бризероподобные решения со временем наблюдения, превышающим время жизни пульсонов УСГ [17], были получены, например, для уравнения

$$u_{rr} + 2\frac{u_r}{r} - u_{tt} = u^{3/13}(u_r^2 - u_t^2)^{2/13}, \quad (8)$$

а также для уравнений с параметрами  $m = 3, n = 11, r = 2, s = 11$  и  $m = 3, n = 9, r = 2, s = 9$ .

В уравнениях с параметрами  $m = 1, n = 13, r = 2, s = 13$  и  $m = 1, n = 11, r = 2, s = 11$  изначально локализованные решения сразу же расплывались. Начальные условия определялись следующим разложением:

$$u(r, 0) = \sum_{i=1}^{880} \frac{a_i}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{ir}{2\pi L}\right), \quad (9)$$

где  $a_i = a_0 \exp(-i^2/1000)$ ,  $a_0 = 0.2; 0.3; 0.6$ .

На рис. 1 показано поведение полученного решения уравнения (8) для начального условия  $a_0 = 0.3$ .

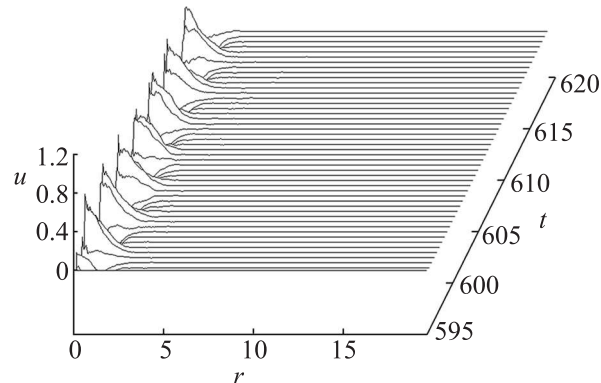


Рис. 1. Линии уровня функции  $u(r, t)$  для уравнения (8) для больших времен

Видно, что колебания пульсона представляют собой некоторую нелинейную суперпозицию нескольких мод колебаний. Надо отметить, что поведение локализованных решений нельзя объяснить влиянием граничных условий, так как исследованное поведение пульсона для значений  $R = 30$  и  $20$  не меняется. На рис. 2 и 3 показано поведение центральной части пульсона  $u(0, t)$  для уравнения (8). Из сравнения решений на двух разных отрезках времени видно, что установившаяся частота моды быстрых колебаний не изменяется в течение всего длительного

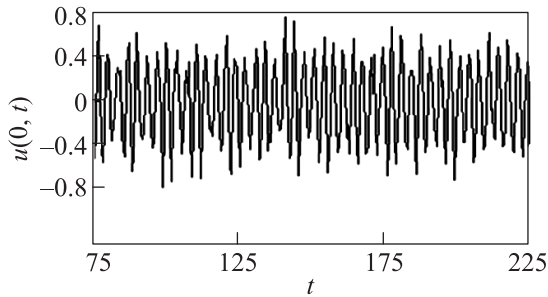


Рис. 2. Поведение амплитуды в центре пульсона для уравнения (8) для малых времен

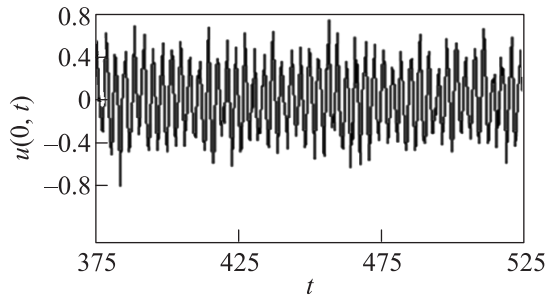


Рис. 3. Поведение амплитуды в центре пульсона для уравнения (8) для больших времен

времени счета, т.е. полученные решения параметрически стабильны. Для детального исследования поведения амплитуды решения рассмотрим величину

$$c(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |u(0, t)| dt. \quad (10)$$

Соответствующий график представлен на рис. 4. Из

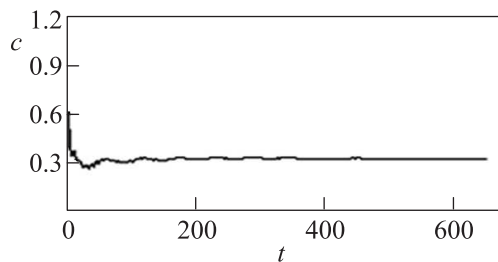


Рис. 4. Эволюция во времени величины  $c(t)$  для уравнения (8)

рисунка следует, что максимальная амплитуда колебаний стабилизируется со временем.

Уравнение (8) при условии малости правой части стремится к пределу обычного волнового уравнения. Поэтому численно исследовалось также поведение сферических волновых решений, или “излуче-

ния”. Для этого моделировалось поведение волны с начальными условиями вида

$$u(r, 0) = A \cos(\omega r) \exp[-\alpha(r - r_0)^2], \quad (11)$$

$$u_t(r, 0) = A\omega \sin(\omega r) \exp[-\alpha(r - r_0)^2] + 2A\alpha(r - r_0) \cos(\omega r) \exp[-\alpha(r - r_0)^2]. \quad (12)$$

Результаты такого моделирования для  $A = 0.8$ ,  $\omega = 15$ ,  $r_0 = 10$ ,  $\alpha = 0.8$  представлены на рис. 5. Начальное состояние при этом распадается на сфе-

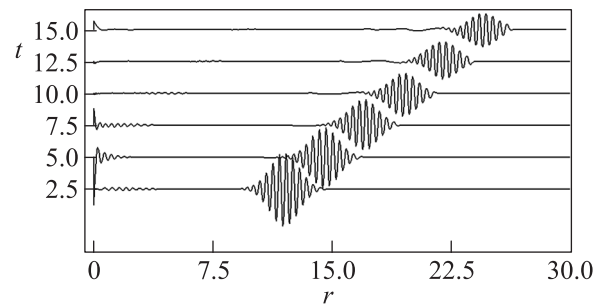


Рис. 5. Эволюция во времени величины сферической волны для уравнения (8)

рическую волну, движущуюся с единичной “световой” скоростью, и некоторое локализованное состояние. Амплитуда полученной сферической волны изменяется по закону  $\sim 1/r$ , как для обычного волнового уравнения. Нелинейность проявляет себя в появлении “хвоста”, движущегося за обычным линейным решением, и возникновении локализованного образования при  $r$  вблизи нуля. Следует отметить, что из-за наличия симметрии растяжения по переменным  $r, t$  в уравнении (2) подобные сферические волны не будут ограничены по амплитуде.

Таким образом, было показано, что внесение в уравнение Клейна–Гордона нелинейности, зависящей от лоренц-инвариантной суммы квадратов первых производных, позволяет получить в рамках одной скалярной модели трехмерно-локализованные и волновые решения, что достаточно ново и заслуживает изучения.

1. *Encyclopedia of Nonlinear Science*, ed. by A. Scott, Routledge, N.Y. (2004).
2. О. М. Браун, Ю. С. Кившарь, *Модель Френкеля-Конторовой: Концепции, методы, приложения*, Физматлит, М. (2008).
3. T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press, N.Y. (2010).
4. C. J. K. Knight, G. Derks, A. Doelman, and H. Susanto, *J. Diff. Eq.* **254**, 408 (2013).

5. D. Saadatmand and J. Kurosh, *Braz. J. Phys.* **56**, 43 (2013).
6. J. A. Gonzalez, A. Bellorin, and L. E. Guerrero, *Solitons Fractals* **33**, 143 (2007).
7. B. A. Malomed, *J. Opt. Soc. Am. B* **31**(10), 2060 (2014).
8. N. K. Efremidis, K. Hizanidis, B. A. Malomed, and P. D. Trapani, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 113901 (2007).
9. A. S. Fokas, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 190201 (2006).
10. N. S. Manton and P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press, UK (2004).
11. G. L. Alfimov, W. A. B. Evans, and L. Vazquez, *Nonlinearity* **13**, 1657 (2000).
12. G. Fodor, P. Forgacs, P. Grandclement, and I. Racz, *Phys. Rev. D* **74**, 124 (2006).
13. S. Richard, Y. B. Tasgal, and B. A. Malomed, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 243902 (2007).
14. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М. (1988).
15. V. Koutvitsky and E. Maslov, *Math. Phys.* **47**, 022302 (2006).
16. Е. Г. Екомасов, Р. К. Салимов, *Письма в ЖЭТФ* **100**, 538 (2014).
17. В. Г. Маханьков, *Физика элементарных частиц и атомного ядра* **14**, 123 (1983).
18. Б. М. Барбашов, Н. А. Черников, *ЖЭТФ* **50**, 1296 (1966).
19. С. П. Попов, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* **54**(12), 1954 (2014).