

# Формирование вихревого течения волнами на поверхности жидкости

С. В. Филатов, М. Ю. Бражников<sup>1)</sup>, А. А. Левченко

Институт физики твердого тела РАН, 142431 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 27 июля 2015 г.

После переработки 19 августа 2015 г.

Экспериментально исследовано формирование вихревого течения в сосуде с жидкостью, совершающем гармонические колебания в вертикальном направлении. Установлено, что в цилиндрическом сосуде вихревого течения не наблюдается до тех пор, пока амплитуда колебаний не превысит порогового значения, при котором развивается параметрическая неустойчивость Фарадея и на поверхности появляются азимутальные моды. В квадратном сосуде и в цилиндрическом сосуде с нарушенной симметрией вихри наблюдаются при амплитудах ниже порога параметрической неустойчивости. Предполагается, что формирование вихревого течения обусловлено взаимодействием распространяющихся под углом друг к другу поверхностных волн.

DOI: 10.7868/S0370274X15190066

**Введение.** Гидродинамика жидкости со свободной поверхностью давно является предметом теоретических и экспериментальных исследований. В лабораторных условиях волны на поверхности жидкости могут возбуждаться различными способами: при помощи волнопродукторов [1], электрическими силами, действующими на границу раздела жидкостей с разной диэлектрической проницаемостью [2] или на поверхности заряженной жидкости [3], колебаниями сосуда с жидкостью в вертикальном направлении как целого [4]. В последнем случае в результате развития параметрической неустойчивости на поверхности жидкости возникают волны, впервые описанные Фарадеем [5]. Ранее было замечено, что при параметрическом возбуждении колебаний наряду с волновым движением на поверхности жидкости также наблюдается течение, демонстрирующее хаотическое поведение [6]. Впоследствии было показано, что это течение соленоидально и с увеличением амплитуды волн может оказаться достаточно интенсивным для формирования турбулентного каскада [7, 8] подобно обратному каскаду в двумерной турбулентности [9].

Несмотря на большое количество экспериментальных исследований, посвященных волнам Фарадея, природа возникновения в них течения до настоящего времени не выяснена. В работе [10] это течение пытались описать как средний дрейф Стокса [11] для случайного волнового поля. Однако найденное в эксперименте значение коэффициента диффузии пассивного скаляра почти на порядок превышало теоретическое.

В данном сообщении представлены результаты экспериментов, которые демонстрируют, что формирование вихревого движения не является специфической чертой волн Фарадея, а связано с двумерностью волнового движения на поверхности жидкости.

**Экспериментальная методика.** Закрепленный на виброплатформе сосуд цилиндрической или квадратной формы заполняли дистиллированной водой. Глубина обоих сосудов 10 мм, внутренний диаметр цилиндрического сосуда 65 мм, сторона квадратного – 50 мм. Сосуд совершал гармонические колебания по вертикали с амплитудой  $S$  и частотой  $\omega_p$ . В системе координат, связанной с сосудом, жидкость находится в переменном поле тяжести с ускорением, равным сумме ускорения свободного падения  $g$  и переменного ускорения сосуда  $g\beta \cos \omega_p t$ , где  $\beta = S\omega_p^2/g$  – безразмерная амплитуда переменного ускорения. Ускорение измеряли акселерометром, прикрепленным к стенке сосуда.

В такой системе возможны два механизма рождения волн. Один из них связан с наличием мениска у поверхности жидкости, соприкасающейся с вертикальной стенкой сосуда. Мениск, периодически меняющий свою форму в переменном поле тяжести, служит источником поверхностной волны. Для эффективного возбуждения стоячей волны частота колебаний платформы  $\omega_p$  должна быть близка к резонансной частоте колебаний поверхности жидкости в сосуде  $\omega_n$ . В цилиндрическом сосуде этим способом возбуждаются радиальные моды колебаний поверхности жидкости, которые описываются функцией Бесселя первого рода:

$$\eta(r, t) = A \cos(\omega_n t) J_0(k_n r), \quad (1)$$

<sup>1)</sup>e-mail: makc@issp.ac.ru

где  $n$  – номер резонанса,  $k_n$  и  $\omega_n$  – волновое число и частота моды,  $A$  – амплитуда колебаний поверхности жидкости в центре сосуда. В квадратном сосуде плоские волны, распространяющиеся перпендикулярно от каждой стенки, образуют пару стоячих волн:

$$\eta(x, y, t) = \eta_x \cos(\omega_n t) \cos(k_n x) + \eta_y \cos(\omega_n t) \cos(k_n y). \quad (2)$$

Связь частоты и волнового числа определяется дисперсионным соотношением, в которое входят поверхностное натяжение  $\sigma$  и плотность  $\rho$  жидкости, а также глубина  $h$  слоя [12]:

$$\omega^2 = \left( gk + \frac{\sigma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kh). \quad (3)$$

Другой механизм возбуждения волн связан с параметрической неустойчивостью плоской поверхности жидкости в переменном поле тяжести. Для наблюдения параметрического резонанса частота вынужденных колебаний сосуда  $\omega_p$  должна быть в два раза больше частоты резонансной моды  $\omega_n$ . Из-за наличия затухания поверхностных волн этот механизм в отличие от предыдущего является пороговым: усиления волны не происходит, пока амплитуда переменного ускорения не превысит критического значения  $\beta_c$ . Величина порога оказывается больше, если частота колебаний сосуда отличается от удвоенной резонансной частоты.

При параметрическом возбуждении поверхностных волн в цилиндрическом сосуде, кроме радиальных мод (1), также могут возбуждаться и азимутальные моды:

$$h(r, \varphi, t) = A \cos(\omega t) J_m(k_{n,m} r) \cos(m\varphi). \quad (4)$$

Допустимые значения волновых чисел здесь определяются из условия отсутствия протекания жидкости через вертикальную стенку сосуда,  $k_{n,m} = \mu_n^{(m)}/R$ , где  $n, m$  – целые числа,  $R$  – радиус сосуда,  $\mu_n^{(m)}$  – корни уравнения  $J'_m(x) = 0$ .

Для визуализации течения на поверхности в воду добавляли порошок из полиамида РА 12 со средним диаметром частиц 25–30 мкм либо стеклянные сферы диаметром 50 мкм. Плотность стеклянных сфер была немного меньше плотности воды. Поверхность жидкости освещали фотовспышкой в стробоскопическом режиме и фотографировали с большой выдержкой. В результате получали изображения треков пробных частиц.

Для нахождения горизонтальной составляющей скорости течения жидкости поверхность с пробными частицами фотографировали с частотой около

5.5 кадра/с при длительности фотовспышки 1 мс. Поле скоростей определяли из парных изображений с помощью программы PIVlab [13]. Завихренность вычисляли как

$$\Omega(x, y) = \partial V_x / \partial y - \partial V_y / \partial x, \quad (5)$$

где  $V_x, V_y$  – компоненты скорости в  $x$ - и  $y$ -направлениях.

**Экспериментальные результаты и их обсуждение.** На рис. 1 показана фотография поверхности воды, декорированной порошком из полиамида

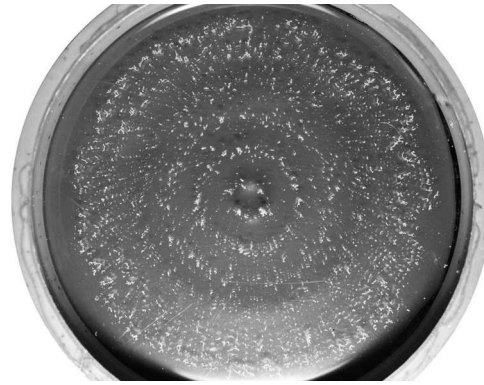


Рис. 1. Фотография поверхности воды при колебаниях цилиндрического сосуда на частоте 25 Гц с амплитудой, меньшей критической для возбуждения параметрического резонанса

да, в цилиндрическом сосуде. При колебаниях виброплатформы на частоте 25 Гц с амплитудой ниже пороговой для данной частоты на поверхности жидкости возбуждается радиальная мода  $n = 6$  с длиной волны  $\lambda \approx 10$  мм. В зависимости от плотности и смачиваемости пробные частицы дрейфуют либо к узлам, либо к пучностям стоячих волн [14]. На фотографии хорошо видны концентрические круги, сформированные частицами, которые собираются в узлах стоячей волны. Заметим, что на этом снимке вихревого движения не наблюдается.

При постепенном увеличении амплитуды колебаний виброплатформы амплитуда колебаний поверхности жидкости плавно нарастает. При достижении некоторого значения амплитуды переменного ускорения  $\beta$  наблюдается резкое усиление колебаний поверхности и возникает азимутальная мода (4) с числом  $m$  порядка 10. Эту амплитуду переменного ускорения принимали за пороговое значение  $\beta_c$ . Появление азимутальной моды сопровождается формированием вихревого движения на поверхности (рис. 2). На фотографии отчетливо видна система из трех концентрических поясов вихрей. В каждом поясе со-

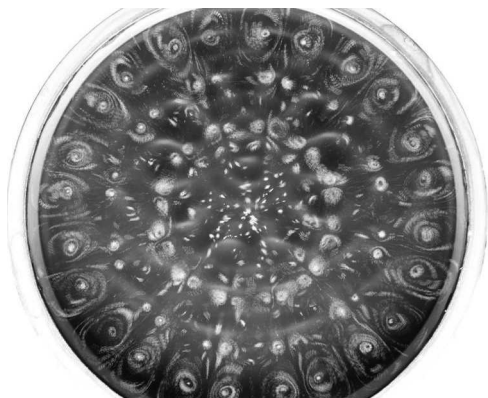


Рис. 2. Распределение вихрей на поверхности воды в цилиндрическом сосуде. Частота колебаний сосуда  $\omega_p/2\pi = 45$  Гц, амплитуда переменного ускорения  $\beta = 0.36$ , пороговое ускорение  $\beta_c = 0.26$ . Видна азимутальная мода  $n = 4$ ,  $m = 6$ ,  $\omega/2\pi = 22$  Гц

держится по 12 пар вихрей, вращающихся в противоположных направлениях. Наибольшие размеры имеют вихри внешнего пояса вблизи стенки сосуда. При дальнейшем увеличении амплитуды накачки возникают крупномасштабные течения, разрушающие концентрическое расположение вихрей.

Переход от цилиндрического сосуда к сосуду квадратной формы радикально отражается на условиях формирования системы вихрей. На рис. 3 показаны распределения завихренности (5) на поверхности воды в квадратном сосуде при накачке на частоте 45.5 Гц до и после наступления параметрической неустойчивости. До порога  $\beta/\beta_c \approx 0.9$  наблюдается симметричная система небольших вихрей (рис. 3а), которые образуют квадратную решетку с периодом, равным длине поверхностных волн на частоте 45.5 Гц ( $\lambda \approx 6$  мм). Симметричная структура сохраняется и при незначительном превышении порогового значения ускорения,  $\beta/\beta_c \approx 1.1$  (рис. 3б). При дальнейшем повышении уровня накачки происходят слияние и укрупнение вихрей вследствие нелинейности.

На рис. 4 приведены фурье-образы вихревых структур, представленных на рис. 3. При накачке с амплитудой, меньшей критического значения, на поверхности доминирует структура с обратным периодом  $\approx 10$  см<sup>-1</sup> (рис. 4а) в обоих направлениях, что соответствует волновому числу волны на частоте накачки. На рис. 4б, помимо первоначальной структуры, видна структура с обратным периодом около 6 см<sup>-1</sup>, амплитуды Фурье которой в несколько раз превышают амплитуды Фурье первоначальной структуры. Возрастание периода решетки вихрей

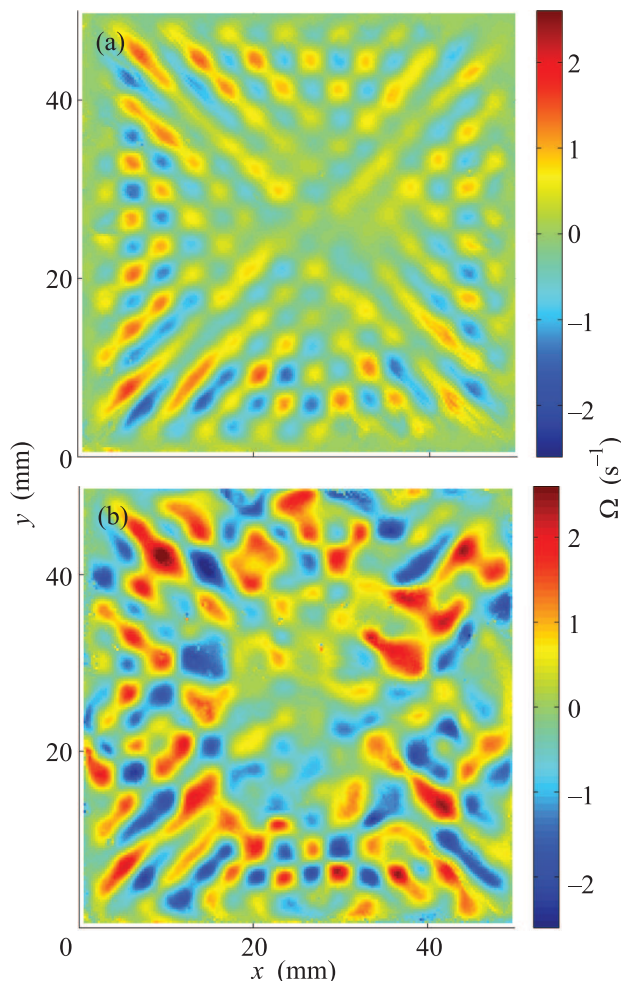


Рис. 3. (Цветной онлайн) Завихренность  $\Omega$  на поверхности воды в квадратном сосуде при разных амплитудах колебаний на частоте 45.5 Гц; до порога возникновения параметрической неустойчивости (амплитуда переменного ускорения  $\beta = 0.4$ , а) и после развития параметрической неустойчивости ( $\beta = 0.48$ , б). Пороговое ускорение  $\beta_c = 0.44$

связано с появлением на поверхности воды стоячих волн с частотой  $\omega_p/2$ , длина волны которых совпадает с периодом вихревой структуры, возникающей при переходе через порог неустойчивости Фарадея.

Зависимость интегральной завихренности  $|\Omega|$  движения на поверхности воды от амплитуды переменного ускорения  $\beta$  в квадратном сосуде показана на рис. 5. При изменении амплитуды переменного ускорения  $\beta$  от 0.11 до 0.55 завихренность  $|\Omega|$  возрастает почти на два порядка, причем ее быстрый рост наблюдается при ускорениях выше порога параметрической неустойчивости. При накачках ниже порогового значения изменение завихренности как функции амплитуды ускорения  $\beta$  хорошо

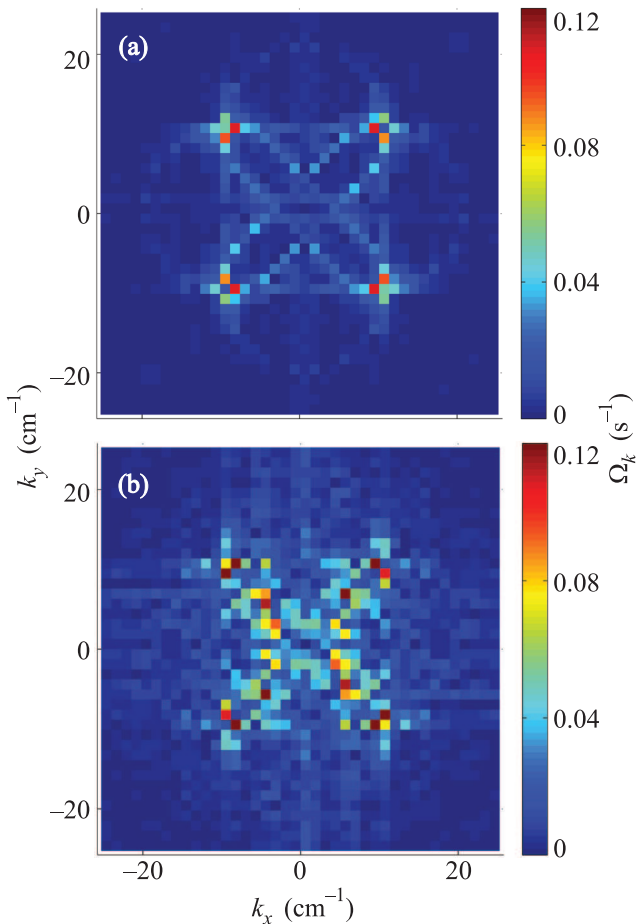


Рис. 4. (Цветной онлайн) Фурье-образы полей завихренности, представленных на рис. 3

описывается степенной зависимостью  $|\Omega| \sim \beta^{1.7}$ . Поскольку при прочих равных условиях амплитуда возбуждаемых на поверхности стоячих волн  $A$  прямо пропорциональна амплитуде переменного ускорения  $\beta$ , зависимость интегральной завихренности от амплитуды волн будет иметь тот же показатель. Оценка дает  $|\Omega| \sim A^2$  [15]. Отличие, по-видимому, вызвано неоднородностью поля завихренности: вблизи края сосуда она больше, чем в центре (рис. 3а).

Так как в квадратном сосуде вихревое движение наблюдается при амплитудах накачки значительно ниже порога параметрической неустойчивости, формирование вихревого движения здесь не может быть приписано особенностям параметрической неустойчивости Фарадея. Тот факт, что структуры вихревого и волнового движения коррелируют между собой, позволяет предположить, что волны непосредственно участвуют в формировании вихрей. Принципиальное отличие волн в квадратном сосуде, где вихри

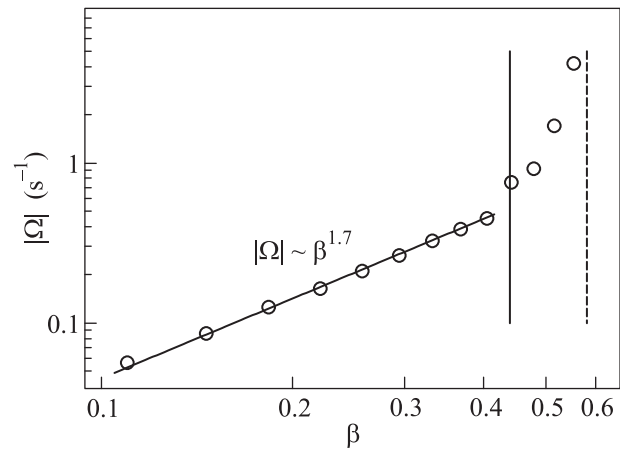


Рис. 5. Зависимость суммарного модуля завихренности  $|\Omega| = \int |\Omega(x, y)| dx dy$  на поверхности воды в квадратном сосуде от амплитуды переменного ускорения  $\beta$ . Сплошная вертикальная линия соответствует пороговой амплитуде переменного ускорения  $\beta_c = 0.44$

наблюдаются, начиная с самых малых амплитуд накачки, от волн в цилиндрическом сосуде, где вихри появляются только при достижении порога неустойчивости, связано с количеством одновременно возбуждаемых мод колебаний поверхности жидкости на фиксированной частоте. В квадратном сосуде ввиду симметричности всегда возбуждается пара мод (2). В цилиндрическом сосуде две разные моды, радиальная (1) и азимутальная (4), возбуждаются только после превышения порога параметрической неустойчивости. Можно предположить, что изменение симметрии цилиндрического сосуда, которое приведет к возбуждению азимутальных мод при амплитудах накачки, меньших порогового значения, также сделает возможным формирование вихревого движения при этих же амплитудах.

Для проверки данного предположения симметрия цилиндрического сосуда была нарушена установкой двух пластиковых столбиков диаметром 6.5 мм, размещаемых диаметрально противоположно вблизи стенки сосуда. На рис. 6 показано поле завихренности до и после установки столбиков. В сосуде без вставок на поверхности жидкости возбуждается только радиальная волна и вихревого движения не наблюдается. После установки столбиков на поверхности хорошо возбуждаются азимутальные моды и появляется серия вихрей вдоль стенки сосуда аналогично системе вихрей на рис. 2.

Поскольку обе моды возбуждаются на одной частоте, их волновые векторы должны быть близки по модулю (в пределах резонансной ширины мод) и иметь разные направления. В квадратном сосуде

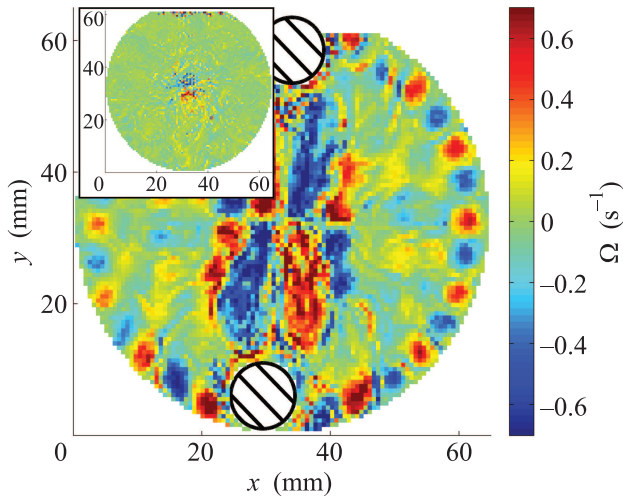


Рис. 6. (Цветной онлайн) Поле завихренности  $\Omega$  в цилиндрическом сосуде, в котором установлены два пластиковых столбика. На вставке – завихренность до установки столбиков. Цветовая шкала для завихренности общая

независимо от частоты накачки угол между волновыми векторами возбужденных волн составляет  $90^\circ$ . В цилиндрическом сосуде радиальную моду (1) на большом удалении от центра сосуда можно рассматривать как плоскую волну, волновой вектор которой направлен перпендикулярно стенке сосуда. Резонансную моду с малым радиальным числом  $n$  и большим азимутальным числом  $m$  по аналогии с модами шепчущей галереи для акустических волн можно рассматривать как распространяющуюся вдоль границы сосуда волну. Поэтому мы полагаем, что за формирование вихревого движения здесь отвечает взаимодействие двух поверхностных волн, волновые векторы которых направлены под углом друг к другу.

**Заключение.** В настоящей работе экспериментально показано, что стоячие волны на поверхности жидкости в сосуде, который совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой переменного ускорения ниже порога параметрической неустойчивости, могут генерировать вихревое течение. В квадратном сосуде структура вихревого движения имеет вид квадратной решетки с периодом, равным длине стоячих волн. В цилиндрическом сосуде вихревое движение наблюдается только при возникновении азимутальных мод, которые возможны при амплитудах накачки выше по-

рога параметрической неустойчивости. Искусственное понижение симметрии цилиндрического сосуда, которое разрешает генерацию азимутальных мод при малых амплитудах накачки, позволяет формировать вихревое движение при накачке значительно ниже порога параметрической неустойчивости Фарадея. Исходя из этих наблюдений и принимая во внимание степенную зависимость завихренности от амплитуды волн, можно утверждать, что в сосудах разной симметрии вихревое движение возникает тогда, когда на поверхности жидкости распространяется пара волн с неколлинеарными волновыми векторами.

Авторы благодарны В.В. Лебедеву и его группе за полезные обсуждения на совместных семинарах. Работа выполнена при поддержке РНФ (грант # 14-22-00259).

1. T. H. Havelock, *Phil. Mag.* **8**, 569 (1929).
2. В. А. Калиниченко, С. В. Нестеров, Н. Л. Никитин, С. Я. Секерж-Зенькович, *Изв. АН СССР, ФАО* **4**, 432 (1982).
3. М. Ю. Бражников, А. А. Левченко, Л. П. Межов-Деглин, *Приборы и техника эксперимента* **45**, 31 (2002) [*Instr. Exp. Tech.* **45**, 758 (2002)].
4. J. Miles and D. Henderson, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 143 (1990).
5. M. Faraday, *Phil. Trans. R. Soc. London* **121**, 299 (1831).
6. R. Ramshankar, D. Berlin, and J. P. Gollub, *Phys. Fluids A* **2**, 1955 (1990).
7. A. von Kameke, F. Huhn, G. Fernandez-Garcia, A. P. Munuzuri, and V. Perez-Munuzuri, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 074502 (2011).
8. N. Francois, H. Xia, H. Punzmann, S. Ramsden, and M. Shats, *Phys. Rev. X* **4**, 021021 (2014).
9. R. Kraichnan, *Phys. Fluids* **10**, 1417 (1967).
10. O. N. Mesquita, S. Kane, and J. P. Gollub, *Phys. Rev. A* **45**, 3700 (1992).
11. G. G. Stokes, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **8**, 441 (1847).
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика*. Физматлит, М. (2003).
13. W. Thielicke and E. J. Stamhuis, *J. Open Res. Soft.* **2**(1), e30 (2014).
14. S. Lukaschuk, P. Denissenko, and G. Falkovich, *Eur. Phys. J. Special Topics* **145**, 125 (2007).
15. V. V. Lebedev, V. M. Parfenyev, and S. Vergeles, to be published.