

# Обратный каскад энергии в развитой турбулентности при нарушении симметрии спиральных мод

Е. Б. Гледзер<sup>+1)</sup>, О. Г. Чхетиани<sup>+\*1)</sup>

<sup>+</sup>Институт физики атмосферы им. Обухова РАН, 119017 Москва, Россия

<sup>\*</sup>Институт космических исследований РАН, 117810 Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 июля 2015 г.

После переработки 24 августа 2015 г.

На основе квазинормальных аппроксимаций и каскадной модели спиральной турбулентности рассматриваются взаимодействия, нарушающие симметрию положительной и отрицательной компонент полной спиральности. В идеальном случае отсутствия одной из них уравнения имеют два знакоопределенных интеграла движения, что приводит к реализации обратного каскада энергии, как это имеет место для двумерной турбулентности. Как результат неустойчивости вторых моментов, механизм которой был предложен в статье А. Belian, О. Chkhetiani, Е. Golbraikh, S. Moiseev, *Physica A* **258**, 55 (1998), генерация крупномасштабных мод рассмотрена на основе фурье-уравнений гидродинамики в предположении квазинормальности поля скорости. Определяющим в таком механизме является наличие фоновой турбулентности с крупномасштабными спиральными возмущениями и мелкомасштабными источниками энергии и спиральности. Возможность обратного каскада в случае неполного вырождения одной из компонент спиральности изучается на основе численных экспериментов с каскадной моделью. Показано, что для реализации обратного (в сторону крупных масштабов) потока энергии от мелкомасштабных возмущений необходим генерируемый внешним воздействием определенный уровень спиральных шумов в крупных модах, зависящий от степени “перемешивания” разнознаковых спиральных компонент поля скорости.

DOI: 10.7868/S0370274X15190133

1. Возможность реализации обратного каскада энергии в трехмерном потоке еще в 70-х годах прошлого века рассматривалась как результат нарушения отражательной симметрии поля скорости и соответствующей генерации спиральных возмущений во всем спектре масштабов. Для геофизических течений, в которых вращение существенно, крупномасштабная генерация (как альтернативный вариант) осуществляется через процесс двумеризации потока. Обратный каскад энергии с учетом спиральности и эффектов самоорганизации в 3D-турбулентности изучался в работах [1, 2], а в связи с численными и магнитогидродинамическими (МГД)-лабораторными экспериментами – в [3, 4, 5].

Особое внимание к спиральности как фактору самоорганизации гидродинамических течений начало проявляться с выходом работ [1, 6]. В первой из них взаимодействие двух спиральных волн и спектры энергии и спиральности рассматривались с позиции термодинамического равновесия. Во второй работе – развитие вихревых возмущений типа тропического

циклона связывалось с крупномасштабной неустойчивостью на фоне турбулентности со спиральностью. Схожие идеи высказывались на качественном уровне в [7]. В [2] триадные взаимодействия спиральных мод рассматривались с позиций возможности обратного каскада.

Помимо прямого численного счета уравнений Навье–Стокса, можно различить ряд основных подходов к исследованию влияния спиральности на трехмерную динамику турбулентного потока при существовании соответствующего не знакоопределенного невязкого интеграла движения. В первых работах данного направления [8] генерация крупномасштабных возмущений рассматривалась как результат неустойчивости фоновой изотропной неосесимметричной турбулентности. Соответствующая теория использовала гипотезу квазинормальности поля скорости, а уравнения формулировались в терминах парных корреляционных моментов однородной спиральной турбулентности. При этом изучалась эволюция слабой случайной крупномасштабной неоднородности, возникающей на фоне однородной турбулентности.

<sup>1)</sup>e-mail: lgg@ifaran.ru; ochkhetai@rssi.ru

В другом подходе уравнения представлены через собственные функции оператора ротора с коэффициентами, соответствующими положительным и отрицательным компонентам спиральности [2] (впервые представления такого рода рассматривались Крэйем (А. Сгауа, 1958), см. [9]). В таком представлении выделяются четыре различных типа взаимодействий между разноспиральными компонентами, часть из которых может осуществлять обратный каскад энергии (в частности взаимодействия мод одного знака по спиральности). Результаты соответствующих численных экспериментов приводятся в работе [10]. В ней показано, что при учете только взаимодействий спиральных мод одного знака каскад энергии аналогичен реализуемому в двумерной турбулентности.

Распространен также подход, в котором спирально-энергетические процессы имитируются с помощью каскадных моделей, модификаций GOY-модели в комплексной плоскости [11–13], а также уравнений с более простыми взаимодействиями только соседних ярусов [14]. В основном такие модели используются в связи с эффектами мелкомасштабной перемежаемости (аномальные показатели для высших моментов поля скорости), хотя они описывают и спектральные распределения энергии и спиральности и соответствующие потоки.

В настоящей работе возможность генерации крупномасштабных возмущений поля скорости рассмотрена в рамках идеологии статистической теории турбулентности с использованием фурье-уравнений гидродинамики, а также в каскадной модели турбулентности с интегралом спиральности, вид которого соответствует уравнениям гидродинамики.

**2.** Как уже отмечалось выше, в [8] была рассмотрена линейная устойчивость парных корреляционных моментов в однородной спиральной турбулентности по отношению к слабо неоднородным случайным возмущениям: поле скорости  $u_i(\mathbf{x}, t)$  представлялось в виде  $u_i = u_i^0 + u_i^1$ , где  $\mathbf{u}^0$  описывает однородную невозмущенную турбулентность, а  $\mathbf{u}^1$  – слабо неоднородное возмущение турбулентности. Основной величиной, в терминах которой формулировались уравнения, был парный смешанный момент

$$Q_{ij}^{10}(\boldsymbol{\xi}, \tau; \mathbf{x}, t) = \langle u_i^1(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t + \tau) u_j^0(\mathbf{x}, t) \rangle.$$

Этот момент задает энергетическую и спиральную величины

$$E = Q_{ii}^{10}(\boldsymbol{\xi}, \tau; \mathbf{x}, t), \quad H = \varepsilon_{ipk} \frac{\partial}{\partial \xi_p} Q_{ki}^{10}(\boldsymbol{\xi}, \tau; \mathbf{x}, t).$$

Для них была получена система уравнений

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \tilde{\nu} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} \right) (E, H) - \alpha(H, -\Delta_{\boldsymbol{\xi}} E) = (A_1, A_2),$$

где величина  $\alpha$  пропорциональна спиральности  $H_0 = \langle \mathbf{u}^0 \text{rot } \mathbf{u}^0 \rangle$  фоновой турбулентности и времени релаксации  $\tau^* = L_{\text{tur}} / E_{\text{tur}}^{1/2}$ , составленному из ее интегрального масштаба и средней энергии:

$$\alpha \sim H_0 \tau^* = \frac{H_0 L_{\text{tur}}}{E_{\text{tur}}^{1/2}}. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{\nu}$  – вязкость, включающая и используемую в данном подходе турбулентную, а в правых частях  $A_1, A_2$  содержатся члены более высокой степени теории возмущения, на основе которой получены уравнения. При их выводе в уравнения для вторых моментов, как обычно, входят третьи, а в уравнениях для третьих моментов входящие в них четвертые расщепляются по гипотезе Миллионщикова. При этом производные по времени исключаются с помощью указанного выше времени релаксации  $\tau^*$ .

Очевидно, что выписанная система приводит к неустойчивости: в спектральном представлении соответствующий инкремент при  $k \rightarrow 0$  равен  $\lambda = |\alpha|k$ , что означает рост возмущений на фоне заданной турбулентности. Важно также отметить, что область неустойчивости не попадает в область невозмущенной однородной турбулентности, а, как отмечено в [8], расположена при больших масштабах.

Следует отметить, что гипотезы квазинормальности, к которым относится и гипотеза Миллионщикова, неприменимы для турбулентных потоков с большими числами Рейнольдса с широким инерционным интервалом масштабов при рассмотрении спектров и характеристик перемежаемости именно в этом интервале масштабов. Традиционной проблемой при использовании данной гипотезы является возможность появления участков с отрицательными энергетическими спектрами, что давно замечено в численных расчетах. Между тем она не запрещает искать частные решения для спектров, в которых с точки зрения энергетики указанных нарушений нет. Именно такой подход и используется далее. Кроме того, как и в подходе работы [8], рассматривается только крупномасштабная часть турбулентности, для которой плотность распределения вероятностей (pdf) разностей скоростей в точках, разнесенных на расстояния, большие или порядка инерционного масштаба, близка к нормальному распределению. В течение последних 30 лет это было подтверждено изменениями в атмосфере и в трубах. Кроме того данный

факт имеет место и для турбулентности с относительно небольшими числами Рейнольдса. Такие распределения являются основой при построении различных квазинормальных моделей в аналитических теориях турбулентности (см., например, [9]).

С учетом сделанного замечания приведем несколько другой вывод рассмотренной неустойчивости, используя все ту же гипотезу квазинормальности, но исходя из фурье-представления уравнений. При этом будем сразу же пренебрегать в уравнениях эффектами вязкости, поскольку мы интересуемся только крупномасштабными неустойчивостями.

Рассмотрим спектральные функции

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{k}, t) u_j(\mathbf{k}_1, t) \rangle = \\ = F_{ij}(\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) = F_{ji}(-\mathbf{k}, t) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1) \end{aligned}$$

со стандартной  $\delta$ -функцией. Для второй производной по времени от  $F_{ij}$  можно получить уравнения (используя уравнения гидродинамики в фурье-форме и соотношения вида  $\frac{d^2(uu)}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}u + 2\frac{du}{dt}\frac{du}{dt} + u\frac{d^2u}{dt^2}$  и расщепляя четвертые моменты на произведения вторых)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_{ij}(\mathbf{k}, t)}{dt^2} = \\ = \Delta_{imn}(\mathbf{k}) \Delta_{jps}(\mathbf{k}) \int F_{mp}(\mathbf{q}) F_{ns}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) d\mathbf{q} + \\ + \Delta_{imn}(\mathbf{k}) F_{pj}(\mathbf{k}) \int \Delta_{mps}(\mathbf{q}) F_{ns}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) d\mathbf{q} - \\ - \Delta_{jmn}(\mathbf{k}) F_{pi}(-\mathbf{k}) \int \Delta_{mps}(\mathbf{q}) F_{ns}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) d\mathbf{q}, \quad (2) \end{aligned}$$

где

$$\Delta_{imn}(\mathbf{k}) = k_m \Delta_{in}(\mathbf{k}) + k_n \Delta_{im}(\mathbf{k}), \quad \Delta_{in}(\mathbf{k}) = \delta_{in} - \frac{k_i k_n}{k^2}.$$

В правую часть этого уравнения для  $\frac{d^2 F_{ij}(\mathbf{k}, t)}{dt^2}$  входят члены, пропорциональные  $F_{pj}(\mathbf{k})$  и  $F_{pi}(-\mathbf{k})$ , что может служить источником экспоненциальной неустойчивости, описанной выше. Рассмотрим действие турбулентных возмущений, локализованных в шаровом по волновым векторам  $\mathbf{q}$  слое  $Q_0 - \Delta Q < q < Q_0 + \Delta Q$  (далее  $q \sim Q_0$ ), на крупномасштабную турбулентность с волновыми числами  $k, k \ll Q_0$ . Здесь мы сразу разделяем по масштабам внешне задаваемую турбулентность с волновыми числами  $Q_0$  и крупномасштабную, возможно генерируемую, с волновыми числами  $k$ . В первом слагаемом в правой части уравнения (2), которое пропорционально  $k^2$ , при  $k \ll Q_0$  содержится интеграл квадрата мелко-масштабного спектра  $F_{mp}(\mathbf{q}) F_{ns}(-\mathbf{q})$ ,  $q \sim Q_0$ . Этот член аналогичен внешнему силовому воздействию и

не дает эффекта экспоненциальной неустойчивости. В двух других слагаемых в (2) интегралы берутся по указанной области волновых чисел  $q \sim Q_0$ , а также по  $q < k_0 \ll k$  для учета взаимодействий возникающих возмущений с числами  $k$  между собой, т.е. в этих интегралах  $\int \dots d\mathbf{q} = \int_{q \sim Q_0} \dots d\mathbf{q} + \int_{q < k_0} \dots d\mathbf{q}$ . Используя с учетом  $Q = q + k$  во второй сумме в (2) разложение при  $k \ll Q$  в слое  $Q \approx q \sim Q_0$ ,  $\Delta_{mps}(\mathbf{Q} - \mathbf{k}) \approx \Delta_{mps}(\mathbf{Q}) - k_\alpha \frac{\partial \Delta_{mps}(\mathbf{Q})}{\partial Q_\alpha} + \frac{1}{2} k_\alpha k_\beta \frac{\partial^2 \Delta_{mps}(\mathbf{Q})}{\partial Q_\alpha \partial Q_\beta}$ , и разложение для интеграла при  $q < k_0 \ll k$ ,  $\Delta_{mps}(\mathbf{q}) \left[ F_{ns}(\mathbf{k}) + q_\alpha \frac{\partial F_{ns}(\mathbf{k})}{\partial k_\alpha} \right]$ , и представляя решение уравнений (2) в виде (спиральная турбулентность)  $F_{ij}(\mathbf{k}, t) = \Delta_{ij}(\mathbf{k}) F(k, t) + \varepsilon_{ijl} k_l H(k, t)$ , можно провести интегрирование по угловым переменным  $\mathbf{Q} = (Q \cos \theta, Q \sin \theta \sin \varphi, Q \sin \theta \cos \varphi)$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ , и таким же для  $\mathbf{q}$ . При этом слагаемые с нечетными степенями по  $Q_\alpha, q_\alpha$  обращаются в нуль, а для четных степеней определяются различные соотношения между индексами в суммах. Учитывая, что третья сумма в (2) получается из второй формальными заменами  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}, i \leftrightarrow j$ , в результате можно получить уравнения для  $F(k, t), H(k, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F(k, t)}{dt^2} = -F(k, t) A_F - \frac{4g}{5} k^4 H + k^2 C_0, \\ \frac{d^2 H(k, t)}{dt^2} = -H(k, t) A_H + \frac{4}{5} F(k, t) B_H, \\ A_F = A_H = k^2 \frac{8f}{15} + I_0 \left( \frac{4}{3} F + \frac{4}{15} k \frac{\partial F}{\partial k} \right), \\ B_H = gk^2 + \frac{I_0}{3} \left( 2H + k \frac{\partial H}{\partial k} \right), \quad (3) \end{aligned}$$

с внешними параметрами  $f, g, I_0$ :

$$\begin{aligned} f = 4\pi \int_{Q \sim Q_0} F(Q) Q^2 dQ, \quad g = 4\pi \int_{Q \sim Q_0} H(Q) Q^2 dQ, \\ I_0 = \frac{1}{5} k_0^5, \quad k_0 \ll k \ll Q_0. \end{aligned}$$

Здесь константа  $C_0$ , которая появилась из первого слагаемого в правой части (2), пропорциональна интегралам по  $Q \sim Q_0$  от  $Q^2 F^2(Q)$  и  $Q^4 H^2(Q)$  (сюда входят квадраты функций  $F, H$  в отличие от их первых степеней в  $f, g$  в (3)). “Силовой” член  $k^2 C_0$  влияет на асимптотику  $F, H \sim \text{const}$  решений при  $k \rightarrow 0$ : при  $k \lesssim k_0$  члены  $\sim I_0$  в уравнениях (3) отсутствуют, а оставшиеся, линейные по  $F, H$ , при  $k \rightarrow 0$  дают  $F = \frac{15C_0}{8f}, H = \frac{4g}{5} \frac{F^2}{C_0}$ . Уравнения (3) получены с условием  $k|H(k)| \ll F(k)$ .

Дроби в (3) появились в результате указанного выше интегрирования по угловым переменным. Ве-

личины  $f$  и  $g$  задают внешние мелкомасштабные воздействия, причем если  $f$  равна энергии внешне заданной турбулентности

$$E = \frac{1}{2} \int F_{ii}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = 4\pi \int F(Q) Q^2 dQ,$$

то величина  $g$  не является спиральностью, которая имеет вид

$$H_0 = i \int \varepsilon_{ijl} Q_l F_{ji}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = 8\pi i \int H(Q) Q^4 dQ.$$

Однако если учесть узость слоя интегрирования  $Q_0 - \Delta Q < Q < Q_0 + \Delta Q$ ,  $\Delta Q \ll Q_0$ , то приближенно  $|g| \approx |H_0|/2Q_0^2$ .

Если в (3) ограничиться только линейными по  $F$ ,  $H$  членами при  $C_0 = 0$ , то для экспоненциально возрастающих решений  $F, H \sim \exp(\lambda t)$ ,  $\lambda > 0$ , имеем

$$\frac{\lambda}{k} = \pm i \sqrt{\frac{8f}{15}} + \sqrt{\frac{3}{10}} \frac{k|g|}{\sqrt{f}}. \quad (4)$$

Согласно (4) рост крупномасштабной турбулентности обусловлен инкрементом, пропорциональным величине  $\frac{k|g|}{\sqrt{f}}$ , которую можно приближенно записать через спиральность  $H_0$  и энергию  $E \sim f$  как

$$\frac{k|g|}{\sqrt{f}} \sim \frac{|H_0| Q_0^{-1} k}{E^{1/2} 2Q_0}. \quad (5)$$

По форме эта формула оказывается близка к выписанной выше для  $\alpha$  формуле (1), если сопоставить энергию турбулентности  $E_{\text{tur}}$  с  $E = f$ , масштаб  $L_{\text{tur}}$  с  $Q_0^{-1}$  и учесть, что в данном подходе генерируемый и генерирующий масштабы заранее разнесены (множитель  $k/Q_0$ ). Однако она не может рассматриваться как решение для спектральных функций  $F$  и  $H$ . Связано это с тем, что функция  $F(k)k^2$  является спектром энергии и не может быть отрицательной, к чему приводит первое слагаемое в формуле для  $\lambda/k$  (функции  $F$  и  $H$  – осциллирующие). Кроме того, имеется стандартное неравенство  $k|H(k)| < F(k)$  для спиральной турбулентности, которое, очевидно, не выполняется.

Поэтому необходимо искать решения уравнений (3), для которых

$$F(k, t) > 0, \quad k|H(k)| < F(k), \quad (6)$$

при ограничениях на параметры  $f > 0$  и  $g$  задаваемого мелкомасштабного воздействия. Поскольку, как и в (6),  $Q|H(Q)| < F(Q)$ , имеем

$$|g| < 4\pi \int_{Q \sim Q_0} |H(Q)| Q^2 dQ < 4\pi \int_{Q \sim Q_0} F(Q) Q dQ.$$

Отсюда

$$|g| < \frac{f}{Q_0}. \quad (7)$$

Найти такие решения можно, если вначале выделить из уравнений (3) стационарные решения для  $F$  и  $H$ , а затем исследовать их устойчивость. Решения получаются, если функции  $A_F, A_H, B_H$  равны нулю. При  $k < k_c$  решения для  $F > 0$  и  $H$  имеют вид

$$F_0(k) = \frac{2fk_c^2}{7I_0} \left[ \left( \frac{k_c}{k} \right)^5 - \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right],$$

$$H_0(k) = \frac{3gk_c^2}{4I_0} \left[ \left( \frac{k_c}{k} \right)^2 - \left( \frac{k}{k_c} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

При  $k \rightarrow k_c$  условие  $k_c|H_0| < F_0$  приводится к виду  $\frac{|g|k_c}{f} < 1$ , что при  $|g| < f/Q_0$  и  $k_c \ll Q_0$  выполняется. Вблизи  $k_c, k < k_c$  функции (8) можно представить в виде разложения по степеням  $1 - \frac{k}{k_c}$  с главными членами

$$F_0(k) = F_c \left( 1 - \frac{k}{k_c} \right), \quad H_0(k) = H_c \left( 1 - \frac{k}{k_c} \right),$$

$$F_c = \frac{2fk_c^2}{I_0}, \quad H_c = \frac{3gk_c^2}{I_0}.$$

Эти формулы для  $F_c, H_c$  можно рассматривать как определяющие величину граничного волнового числа  $k_c$  (ниже которого  $F_c > 0$ ) и амплитуду  $H_c$  через заданную амплитуду  $F_c$  при условии  $k_c \ll Q_0$ :  $k_c = \sqrt{\frac{F_c I_0}{2f}}, H_c = \frac{3F_c g}{2f}$ .

Решения уравнений (3) (при  $C_0 = 0$ ) ищем в виде  $F = F_0 + F', H = H_0 + H'$ . Переходя к переменной  $x = -\ln(k/k_c)$ ,  $x > 0$  и функциям  $\Phi = e^{-5x} F', \Psi = e^{-2x} k_c H'$ , получим уравнения, для которых можно исследовать асимптотики при  $x \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow k_c$ ) и при  $x \sim 1$  ( $k \ll k_c$ ). В случае первой асимптотики получаем экспоненциально растущие решения:

$$\Phi_l = x^\alpha A_f \exp(\lambda \tau), \quad \Psi_l = x^\alpha A_h \exp(\lambda \tau),$$

$$(\lambda^2 - \alpha)A_f = \varepsilon A_h, \quad (\lambda^2 + \alpha)A_h = -\varepsilon \alpha A_f,$$

$$\lambda = |\varepsilon| C_\lambda, \quad \alpha = \varepsilon^2 C_\alpha, \quad C_\lambda = (C_\alpha^2 - C_\alpha)^{1/4}, \quad (9)$$

$$A_h = -\frac{\varepsilon A_f}{(1 - 1/C_\alpha)^{1/2} + 1},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{8}{15}} f k_c^2 t, \quad \varepsilon = -\frac{3gk_c}{2f}, \quad p = \frac{I_0}{2fk_c^2}.$$

Здесь  $A_f, A_h$  – малые начальные возмущения. Условие применимости (9):  $x > pA_f$ , или  $\frac{A_f I_0}{2fk_c^2} < x \ll 1$ . Малый параметр  $\varepsilon$  в (9), который согласно (7)

$|\varepsilon| < 3k_c/2Q_0 \ll 1$ , определяет относительную роль внешне задаваемой спиральности для области волновых чисел  $k < k_c \ll Q_0$ . При  $C_\alpha > 1$  имеется экспоненциальный рост возмущений:

$$\lambda\tau = t \frac{|g|k_c^2}{\sqrt{f}} C_\lambda (6/5)^{1/2}. \quad (10)$$

Условие  $k|H'| < k_c|H'| < F'$  по отношению амплитуд  $A_f, A_h$  в (9), очевидно, выполняется. Заметим, что решение (9) для спиральности  $\Psi_l, A_h$  существует, если  $C_\alpha > 1$ , что также определяет существование положительных значений инкремента  $\lambda$ .

В случае второй указанной выше асимптотики в линейном приближении имеем

$$\begin{aligned} \Phi_r &= \exp\left(\lambda\tau - \frac{7}{5}e^{-5x}\lambda^2\right) A'_f, \\ \Psi_r &= \exp\left(\lambda\tau - \frac{7}{5}e^{-5x}\lambda^2\right) A'_h + \\ &+ \exp\left(\lambda\tau + \frac{7}{5}e^{-5x}\lambda^2\right) B'_h, \quad A'_h = -\varepsilon\frac{7}{8}A_f, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $A'_f, B'_h$  определяются через  $A_f$  (см. ниже).

Произвольность константы  $C_\alpha > 1$  в (9) отражает тот факт, что было использовано только условие регулярности решения при  $k \rightarrow k_c$ . Диапазон ее изменения (или ее порядок) задается формой решений при всех  $x$ . Его можно оценить, если решения (9), (11) “сшить” при некоторой величине  $x = x_s$ , для которой хотя и грубо, но можно считать, что оба решения имеют место. Приблизительно  $x_s \approx 0.2-0.5$ . При этом определяются и величины амплитуд  $A'_f, A'_h, B'_h$  в зависимости от  $A_f$ . Для  $\Phi_l, \Phi_r$  имеем

$$A'_f \exp\left(-\frac{7}{5}e^{-5x_s}\lambda^2\right) \approx A_f \exp[\alpha \ln(x_s)]. \quad (12)$$

С учетом временной экспоненциальной зависимости решение для  $\Phi(x_s, \tau)$  в точке “сшивки”  $x_s$  имеет вид

$$A_f \exp\left[\varepsilon C_\alpha^{1/2} (1 - C_\alpha^{-1})^{1/4} \tau - \varepsilon^2 C_\alpha \ln(1/x_s)\right].$$

Отсюда определяется время  $\tau = \tau_s$ , при котором решение достигает уровня заданной амплитуды  $A_f$  ( $\Phi(x_s, \tau) = A_f$ ),

$$\tau_s = |\varepsilon| \ln(1/x_s) \left(\frac{C_\alpha^2}{1 - C_\alpha^{-1}}\right)^{1/4}. \quad (13)$$

Функция от  $C_\alpha$  в скобках, равная  $\frac{C_\alpha^3}{C_\alpha - 1}$ , имеет минимум при  $C_\alpha = 1.5$ , т.е. наиболее быстрый рост возмущений для  $\Phi(x, \tau)$  наблюдается для коэффициентов  $C_\alpha \approx 2-5$  с учетом формы функций  $\Phi(x, \tau)$  при  $x < x_s$ .

Аналогично для функций  $\Psi_l, \Psi_r$  в точке  $x = x_s$  из (9), (11) имеем  $\exp\left(-\frac{7}{5}e^{-5x_s}\lambda^2\right) A'_h + \exp\left(\frac{7}{5}e^{-5x_s}\lambda^2\right) B'_h \approx \exp[\alpha \ln(x_s)] A_h$ , а используя выражения для  $A_h, A'_h$  через  $A_f$  (см. (9), (11)), определяем и  $B'_h$ .

Из (10) следует, что инкремент  $\Lambda, \Lambda/k_c = \alpha$ ,

$$\alpha = \frac{|g|k_c\sqrt{6C_\lambda^2/5}}{\sqrt{f}} \sim \frac{|H_0|Q_0^{-1}k_s}{E^{1/2}} \frac{1}{2Q_0} \sqrt{6C_\lambda^2/5}, \quad (14)$$

имеет тот же вид, что и в (1), (5), с измененным множителем, зависящим от формы степенного решения в (9).

Формулы (8), (9), (11) показывают, что сама логика построения решений, удовлетворяющих неравенствам (6) для спиральных турбулентных течений, приводит к сценарию генерации крупномасштабной неустойчивости, представленному в [8] и описанному нами выше: неустойчивость возникает на фоне заданной спиральной турбулентности. В предлагаемом здесь подходе она задается интегралами  $f$  и  $g$  в (3) и формулами (8).

Рассмотрим этот механизм крупномасштабной генерации поля скорости с помощью динамической каскадной модели, в которой средние величины определены не как статистика по ансамблю реализаций, как в рассмотренном выше подходе, а с использованием временных средних по промежуткам времени, в течение которых величины, связанные с энергией и спиральностью, находятся в равновесном состоянии.

**3.** Далее представлены результаты для каскадной модели с интегралом спиральности, который по форме соответствует интегралу для уравнений Навье–Стокса как разность двух положительно определенных квадратичных форм. В другом виде уравнения в случае неизотропной системы описаны в [15]. В компенсированных безразмерных переменных, которые интегрированно описывают совокупность фурье-амплитуд поля скорости в сферических слоях с волновыми числами  $k_j$  (спектру “-5/3” соответствуют  $|y_j| \sim |z_j| \sim \text{const}$ ,  $y_j$  – “положительные” спиральные моды, а  $z_j$  – “отрицательные”, все комплексные, волновое число  $j$ -го яруса каскада  $k_j = q^j$ ,  $q = 2$  – коэффициент дробления масштабов, спирально-положительные и спирально-отрицательные компоненты скорости  $u_j^\pm$  яруса  $j$  про-

порциональны  $q^{-j/3}\{y_j, z_j\}$ , уравнения имеют вид системы:

$$\begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} &= iq^{\frac{2}{3}(j-1)} \sum_{m=1}^4 B_j^m \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\} - R^{-1} k_j^2 y_j + f_j, \\ \frac{dz_j}{dt} &= iq^{\frac{2}{3}(j-1)} \sum_{m=1}^4 B_j^m \{\mathbf{z}, \mathbf{y}\} - R^{-1} k_j^2 z_j + g_j. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь блоки  $B_j^m \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  соответствуют следующим четырём типам взаимодействий:

$$\begin{aligned} B_j^1 &= \beta_1 z_{j-2} z_{j-1} + \beta_2 y_{j-1}^* z_{j+1} + \beta_3 y_{j+1}^* z_{j+2}, \\ B_j^2 &= \beta_4 z_j - 2y_{j-1} + \beta_5 z_{j-1}^* y_{j+1} + \beta_6 z_{j+1}^* z_{j+2}, \\ B_j^3 &= \beta_7 y_j - 2y_{j-1} + \beta_8 y_{j-1}^* y_{j+1} + \beta_9 y_{j+1}^* y_{j+2}, \\ B_j^4 &= \beta_{10} y_j - 2z_{j-1} + \beta_{11} z_{j-1}^* z_{j+1} + \beta_{12} z_{j+1}^* y_{j+2}, \end{aligned}$$

с коэффициентами  $\beta_j$ , которые обеспечивают сохранение в отсутствие вязкой диссипации ( $\text{Re}^{-1} = 0$ ) и внешних сил  $f_j, g_j$  интегралов энергии и спиральности:

$$E = \sum_{j=1}^N E_j = \sum_{j=1}^N q^{-\frac{2}{3}(j-1)} (|y_j|^2 + |z_j|^2),$$

$$H = \sum_{j=1}^N H_j = \sum_{j=1}^N q^{\frac{1}{3}(j-1)} (|y_j|^2 - |z_j|^2),$$

$$\beta_1 = \beta_3 \frac{q-1}{q(q+1)}, \quad \beta_2 = -\beta_3 \frac{1+q^2}{q(q+1)},$$

$$\beta_5 = \beta_4 \frac{1+q^2}{1+q}, \quad \beta_6 = -\beta_4 \frac{q(q-1)}{1+q}, \quad \beta_{12} = \beta_{10} q,$$

$$\beta_7 = -\beta_9 \frac{1}{q}, \quad \beta_8 = -\beta_9 \frac{1+q}{q}, \quad \beta_{11} = \beta_{10} (1-q).$$

Коэффициенты  $\beta_3, \beta_4, \beta_9, \beta_{10}$  – произвольные, поэтому блоки взаимодействий  $B_m$  являются независимыми. Далее значения этих коэффициентов принимаются равными 0 или 1: в краткой записи если  $\beta_3 = \beta_4 = \beta_9 = \beta_{10} = 1$ , то задана конфигурация {1111}, если  $\beta_3 = 1, \beta_4 = 0, \beta_9 = 0, \beta_{10} = 1$ , – конфигурация {1001}, если  $\beta_3 = 0, \beta_4 = 1, \beta_9 = 1, \beta_{10} = 0$ , – конфигурация {0110} (см. рис. 1 и 2).

В численных экспериментах число Рейнольдса  $R = 10^8$  дает возможность развития  $N = 20$  уровней каскада. Внешние силы задавались в виде  $f_j = a_j F_j r_j, g_j = b_j F_j r_j$ , где  $r_j$  – случайные числа, равномерно распределенные на отрезке  $[-1, 1]$ . Величины  $\text{Re}(a_j) = 0.1, \text{Im}(a_j) = -1.0$  определяли относительную роль при возбуждении внешним воздействием действительной ( $\text{Re}$ ) и мнимой ( $\text{Im}$ ) частей

спирально-положительной компоненты  $\dot{y}_j$  уравнений (15). Так же возбуждалась спирально-отрицательная компонента  $\dot{z}_j$  системы. При этом либо использовалось возбуждение внешними силами только одной компоненты ( $\dot{y}_j$ ), а вторая ( $\dot{z}_j$ ) генерировалась через нелинейные взаимодействия, что обеспечивало приток положительной спиральности, либо внешние силы одинаково воздействовали на обе компоненты ( $a_j = b_j, \text{Re}(a_j) = 0.05, \text{Im}(a_j) = -0.5$ ). Приток спиральности от таких сил в среднем был равен нулю. Амплитуда внешних сил  $F_j \equiv F_j^\pm$  задавалась тремя способами (знаки “ $\pm$ ” указывают на наличие или отсутствие притока спиральности при действии внешних сил на соответствующих ярусах):

1)  $F_j^\pm = 1.0, j = 2, 3$  (крупномасштабное возбуждение на ярусах 2, 3); на остальных ярусах  $F_j = 0$ ;

2)  $F_j^\pm = 1.0, j = 10, 11$  (узкоспектральное мелкомасштабное возмущение на ярусах 10, 11); на остальных ярусах  $F_j = 0$ ;

3)  $F_j^\pm = 1.0, j = 10, 11; F_j^\pm = 0.05, j = 2-9$  (крупномасштабный шум и узкоспектральное мелкомасштабное возмущение); на остальных ярусах  $F_j = 0$ .

Во всех вариантах задания внешнего воздействия использовались силы с притоком спиральности и его отсутствием. При действии внешних сил только на крупные масштабы система (15) должна сформировать известное колмогоровское распределение энергии (спектр “ $-5/3$ ”) и такое же распределение спиральности в более мелкомасштабном диапазоне спектра. Это продемонстрировано на рис. 1а для энергии и на рис. 1б для спиральности (сплошные линии на рисунках отвечают закону “ $-5/3$ ”; номера ярусов  $j \sim \ln(k)$ , поэтому на рис. 1 оси соответствуют стандартным,  $\ln(E), \ln(k)$ ). Рис. 1 показывает, что исследуемая система адекватно описывает каскады энергии и спиральности с соответствующими известными спектральными распределениями “ $-5/3$ ” при накачке в крупных масштабах (ярусы 2–3).

Рис. 2 показывает результаты для случая, когда основное внешнее спиральное воздействие  $F_j^+ = 1.0$  осуществляется на мелких масштабах (ярусы 10, 11), а рост наиболее крупных мод зависит от внешних шумов промежуточных масштабов. Основная цель рисунка – продемонстрировать увеличение энергии крупных масштабов (ярусы 2–4), когда мелкомасштабная накачка возбуждает обратный поток энергии. При этом необходимы определенные условия на шумы промежуточных масштабов и наличие в них спиральности.

На рис. 2, где  $E_j$  представлены в линейном масштабе, сплошными квадратами обозначены величины  $E_j$  при отсутствии внешних шумов на ярусах

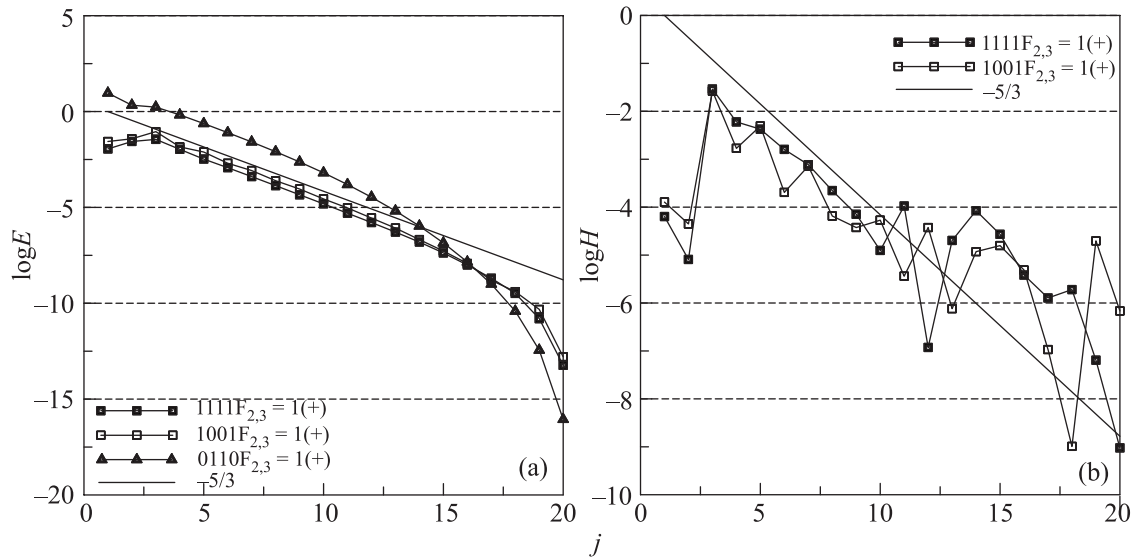


Рис. 1. (а) – Энергии  $E_j$  ярусов каскада для конфигураций  $\{1111\}$ ,  $\{1001\}$ ,  $\{0110\}$  при крупномасштабном ( $j = 2, 3$ ) внешнем воздействии. (б) – Спиральности  $H_j$  для конфигураций  $\{1111\}$ ,  $\{1001\}$

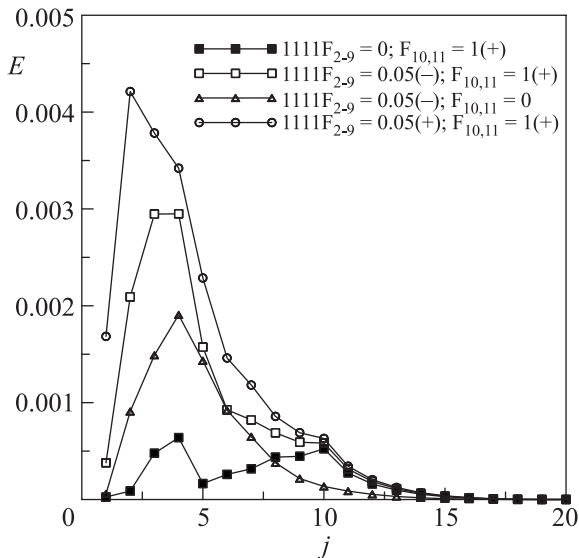


Рис. 2. Энергии  $E_j$  ярусов каскада для конфигурации  $\{1111\}$  при внешнем возмущении в мелкомасштабных ярусах  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ), но без внешних шумов на модах  $j = 2-9$  (закрытые квадраты); с внешними бесспиральными шумами на модах  $j = 2-9$  (открытые квадраты); с внешними бесспиральными шумами на модах  $j = 2-9$ , но без возмущений в мелкомасштабных ярусах  $j = 10, 11$  ( $F = 0$ ) (треугольники); с внешними возмущениями в мелкомасштабных ярусах  $j = 10, 11$  ( $F = 1$ ) и внешними спиральными шумами на модах  $j = 2-9$  (кружки)

$j = 2-9$ . Возбуждения на  $j = 10, 11$  не вызывают генерации крупномасштабных мод с энергией выше возмущений на  $j = 10, 11$ .

Если внести шумы (бесспиральные) на ярусах  $j = 2-9$  ( $F^- = 0.05$ ), но убрать возмущения на  $j = 10, 11$  ( $F = 0$ ), то уровень крупномасштабной энергии увеличится (треугольники на рис. 2). Это та доля, которую дают крупномасштабные шумы внешних сил.

Если к бесспиральным шумам на ярусах  $j = 2-9$  ( $F^- = 0.05$ ) добавить возмущения на  $j = 10, 11$  ( $F^+ = 1.0$ ), то энергии  $E_j$  при  $j < 10$  станут еще больше (открытые квадраты на рис. 2). Это та доля, которую дают возмущения  $F = 1$  при  $j = 10, 11$ .

Наконец, если шумы при  $j = 2-9$  ( $F^+ = 0.05$ ) дают приток спиральности (положительный) к модам на ярусах  $j = 2-9$  и имеется возбуждение при  $j = 10, 11$  ( $F^+ = 1.0$ ) с таким же притоком спиральности, то уровень энергий  $E_j$  при  $j < 10$  станет еще выше (кружки на рис. 2). Сопоставление энергий  $E_j$ , отмеченных на рис. 2 кружками и черными квадратами, показывает, что внесение возмущений на ярусы  $j = 2-9$  внешними силами с амплитудой  $F^+ = 0.05$  дает увеличение энергий на ярусах  $j = 2-4$  почти в 10 раз и в 4-5 раз, если эти силы бесспиральные.

Эффекты, связанные с распределенными по спектру источниками спиральности, обсуждались также в [16].

Во всех расчетах, в которых  $F_j = 1$ ,  $j = 10, 11$ , величины энергий  $E_j$  вниз по спектру ( $j > 10$ ) практически не меняются, т.е. имеет место именно крупномасштабная генерация энергии (обратный поток энергии). В то же время спиральности во всех расчетах демонстрируют противоположное поведение:

каскад спиральности осуществляется только в мелких масштабах. Аналогичная динамика энергии и спиральности с соответствующими потоками энтропии вниз и энергии вверх по спектру от масштаба внешней накачки имеет место для двумерной турбулентности с одним существенным отличием: в системе (15) потоки энергии осуществляются как вниз по спектру от масштаба  $j = 10, 11$  действия возмущений  $F = 1$ , так и вверх по спектру в диапазоне действия внешних шумов при  $j = 2-9$ .

Таким образом, рис. 2 показывает, что передача энергии от возмущений мелких масштабов к более крупным возможна при наличии слабого внешнего силового воздействия на поле скорости с этими масштабами (внешне генерируемые шумы). При этом эффект усиливается, если возмущения мелких масштабов и шумов осуществляют знакоопределенный приток спиральности. В таком случае одна из знакоопределенных компонент интеграла спиральности становится малой, а интеграл спиральности проявляет тенденцию к знакоопределенности, что приводит к динамике, близкой к двумерной, с соответствующей возможностью реализации обратного каскада энергии.

В рассмотренной системе рост крупномасштабных возмущений связан с внешними шумами на промежуточных масштабах, начиная с масштаба накачки. Поэтому здесь нет обратного каскада энергии в классическом его понимании, когда промежуточные возмущения, образующие инерционный интервал, свободны от внешнего воздействия и энергия передается от уровня к уровню только нелинейными взаимодействиями. Передача энергии без внешних шумов становится возможной только в предельном случае, рассмотренном в работе [10], когда, кроме энергии, имеется второй знакоопределенный интеграл и система приобретает свойства чистой двумерной турбулентности. В системе (15) это возможно, если оставить в уравнениях только взаимодействия блока  $B_j^3$ . При этом уравнения становятся аналогичными каскадной модели двумерной турбулентности (типа GOY), в которой классический обратный каскад имеет место. Отсутствие „чистого“ инерционного интервала вверх по спектру от масштаба накачки усложняет задачу определения соответствующих спектральных закономерностей, поскольку появляется зависимость от величин внешних шумов на этих уровнях. При этом согласно рис. 2 и данным по потокам поток энергии вверх от масштаба накачки, несомненно, имеет место.

4. В настоящей работе отправной точкой при рассмотрении генерации крупномасштабных возму-

щений в поле скорости можно считать статью [10]. В ней из фурье-уравнений гидродинамики искусственно выбраны взаимодействия спиральных мод одного знака. Это дает знакоопределенный интеграл спиральности и аналогичный двумерному обратный каскад энергии. В данной работе при моделировании каскадов энергии и спиральности в трехмерной турбулентности используются два разных подхода.

В первом подходе, восходящем к методикам работ [8], реализуется идеология статистической теории турбулентности, в которой для замыкания цепочки уравнений для моментов применяется гипотеза Миллионщикова с узкоспециальной целью – определить в условиях спиральной турбулентности критерии генерации крупномасштабных возмущений. При таком подходе гипотеза не создает проблем с возможной отрицательностью спектра энергии, поскольку среди существующих решений выделяются только энергетически положительно определенные (также удовлетворяющие известному неравенству, связанному со спиральностью). Эти решения представлены формулами (9), (11). Они описывают экспоненциально растущие решения на фоне заданной формулами (8) спиральной турбулентности. Существенно, что в таком подходе спиральность не должна быть вырожденной, т.е. должна иметь определенный знак: в формуле (10) для инкремента отличие от нуля величины  $|g|$ , связанной со спиральностью, является определяющим.

Во втором из подходов (в динамической каскадной системе) фоновая (затравожная) турбулентность генерируется внешними шумами, связанными с внешними силами. Их присутствие также является определяющим при возбуждении крупномасштабных мод под действием узкоспектральных сил в середине инерционного диапазона волновых чисел. И в этом случае эффект усиливается, если возмущения мелких масштабов и шумов осуществляют знакоопределенный приток спиральности.

В заключение коснемся вопроса о возможных пороговых эффектах генерации крупномасштабных возмущений спиральной накачкой энергии в более мелких масштабах. Если для спиральности  $H_0$  в (1) или (5) существует критический минимум  $H_{cr}(H_0 > H_{cr})$ , то по размерности он должен определяться энергией  $E_0$  турбулентности и неким критическим масштабом  $L_{cr}$ ,  $H_{cr} = E_0/L_{cr}$ , что фактически задает порог не по спиральности, а по масштабу, выше которого при заданном  $H_0$  осуществляется возбуждение возмущений. При этом сам масштаб фактически должен определяться внешними по отношению к турбулентному течению факторами. В подходе с



использованием гипотезы Миллионщикова имеется критический масштаб  $\sim 1/k_c$ , связанный с существованием стационарного состояния (8), на фоне которого могут развиваться неустойчивые решения (9). При росте спиральности  $H_0 = g/2Q_0^2$ , как следует из множителя  $x^\alpha$  в (9), область генерации по масштабам также увеличивается, возрастая от критических величин  $\sim 1/k_c$ .

В подходе с каскадной моделью оценить существование пороговых эффектов труднее из-за произвола в выборе взаимодействующих блоков  $B_j^i$  в (15). Исследование трехмодовых взаимодействий в этих блоках показывает, что  $B_j^1$ ,  $B_j^4$  дают только прямой каскад передачи энергии (к мелким масштабам). Обратный каскад возможен в блоках  $B_j^2$ ,  $B_j^3$  (наряду с прямым). Поэтому выбранный в численных расчетах для рис. 2 уровень внешних сил  $F^+ = 0.05$  на ярусах  $j = 2-9$  связан с равными весами  $\beta_3 = \beta_4 = \beta_9 = \beta_{10} = 1$  блоков в уравнениях (15). Если оставить только блоки  $B_j^2$ ,  $B_j^3$ , то соответствующие величины  $F^+$ ,  $j = 2-9$  можно уменьшить с возбуждением на ярусах  $j = 2-4$  энергий той же амплитуды, что и на рис. 2. Кроме того, генерация энергии на крупных ярусах имеет место также и при бесспиральном силовом воздействии на промежуточных масштабах  $j = 2-9$  (треугольники на рис. 2).

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект # 14-27-00134).

1. R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **59**, 745 (1973).
2. G. Knorr, J. P. Lynov, and H. L. Pécseli, Z. Naturforsch. A **45**, 1059 (1990).
3. A. Pouquet and P. D. Mininni, Philos. T. Roy. Soc. A **368**, 1635 (2010).
4. Q. Chen, S. Chen, and G. L. Eyink, Phys. Fluids **15**, 361 (2003).
5. H. Xia, D. Byrne, G. Falkovich, and M. Shats, Nat. Phys. **7**, 321 (2011).
6. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, А. В. Тур, Г. А. Хоменко, В. В. Яновский, ЖЭТФ **85**, 1979 (1983).
7. A. Tsinober and E. Levich, Phys. Lett. A **99**, 321 (1983).
8. A. Belian, O. Chkhetiani, E. Golbraikh, and S. Moiseev, Physica A **258**, 55 (1998).
9. M. Lesieur, *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers (1997).
10. L. Biferale, S. Musacchio, and F. Toschi, Phys. Rev. Lett. **108**, 164501 (2012).
11. Е. Б. Гледзер, ДАН **209**, 1046 (1973).
12. K. Ohkitani and M. Yamada, Prog. Theor. Phys. **81**, 329 (1989).
13. L. Biferale, Annu. Rev. Fluid. Mech. **35**, 441 (2003).
14. А. В. Шестаков, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, Выч. мех. спл. сред. **5**, 193 (2012).
15. Е. Б. Гледзер, ДАН **419**, 488 (2008).
16. A. Shestakov, E. Golbraikh, R. Stepanov, and P. Frick, *14-th European Turbulence Conference*, 1-4 Sept., Lyon (2013).