

Аномальная волна как результат столкновения двух волновых групп на морской поверхности

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 14 октября 2015 г.

Путем численного моделирования нелинейной динамики морской поверхности показано, что столкновение двух относительно невысоких групп волн с близкими, но не коллинеарными волновыми векторами (2–3 волны в каждой группе, крутизна около 0.2) способно приводить к появлению отдельной аномальной волны с высотой, заметно большей, чем в линейной теории. Поскольку подобные столкновения на поверхности океана являются достаточно обыденными, по всей видимости, данный сценарий образования волн-убийц наиболее типичен для естественных условий.

DOI: 10.7868/S0370274X1522004X

Аномальные волны (“волны-убийцы”, rogue waves, freak waves) представляют собой один из интереснейших феноменов в гидродинамике морской поверхности и в то же время серьезную угрозу судоходству. По этой причине в настоящее время они являются объектом массированного исследования (см., например, обзоры [1–3], специальные выпуски журналов [4, 5] и многочисленные ссылки в них). Иногда среди умеренного волнения внезапно поднимается отдельная очень крутая волна, высота которой более чем в два раза превышает высоту соседних волн, достигая 30 м от впадины до гребня при характерной длине океанской волны 200–250 м. Такая экстремальная волна способна нанести повреждения даже крупным судам. Просуществовав в течение нескольких периодов, большая волна затем бесследно исчезает. К настоящему времени предложено несколько возможных механизмов данного явления. Если ограничиться моделью потенциальных движений жидкости в отсутствие крупномасштабных неоднородных течений, то наибольшего внимания заслуживают два механизма: линейная дисперсия и нелинейная самофокусировка (модуляционная неустойчивость [6, 7]). Пусть волнение характеризуется следующими типичными параметрами: волновым числом \tilde{k} , амплитудой \tilde{A} и числом волн в группе $\tilde{\nu}$. Линейный механизм, производящий случайную пространственно-временную фокусировку, актуален в волновых полях с малыми индексами Бенджамина–Фейра, $I_{BF} \propto \tilde{\nu} \tilde{k} \tilde{A} \lesssim 1$ (относительно широкий спектр, короткие пространственные корреляции, практически полное отсутствие когерентных структур), нелинейный – в

длиннокоррелированных полях с наличием когерентных структур, где $I_{BF} \gtrsim 1$. Следует отметить, что нелинейность действует сильнее в длинногребневых (локально квазидвумерных), чем в короткогребневых (существенно трехмерных) случайных волновых полях [8–12].

Имеются многочисленные исследования по нелинейному механизму волн-убийц (помимо уже указанных работ, см., например, [13–16] для плоских течений, [17–21] для трехмерных течений, а также ссылки там). Нас здесь, напротив, интересует случай малых I_{BF} как более типичный для природных условий. Следует все же иметь в виду, что хотя усредненный по всем волновым группам индекс I_{BF} мал, тем не менее с некоторой вероятностью имеются группы, для которых $\nu k A \sim 1$. Именно они играют главную роль в образовании аномальных волн.

Обычно считается, что так называемая теория второго порядка, пренебрегающая четырехволновыми взаимодействиями, достаточно хорошо описывает следующую ситуацию в поле с широким спектром. Благодаря дисперсии несколько волн с разными длиной и направлением могут случайно оказаться “в фазе” в данном месте в данное время. Их главные гармоники складываются по принципу линейной суперпозиции. Нелинейность же только “подстраивает” старшие гармоники (см. обзоры [1–3] и ссылки там). Однако недавние численные эксперименты [22, 23] показали, что нелинейность более существенным образом участвует в формировании волн-убийцы даже при малых I_{BF} . В частности, нелинейность удлиняет ее гребень и изменяет “время жизни”. Данная работа продолжает численное исследование влияния нелинейности на характеристики аномаль-

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

ных волн, образующихся путем пространственно-временной фокусировки. Основной вопрос, который мы собираемся здесь прояснить, формулируется следующим образом. Если начальные данные таковы, что по линейной теории дисперсия должна приводить не к отдельной высокой волне, а к столкновению двух групп из 2–3 волн каждая, то способна ли нелинейность успеть за время столкновения так исказить линейную интерференционную картину, что в результате образуется именно одна аномальная волна? Ответ будет получен положительный. Данный результат довольно нетривиален. Он важен по той простой причине, что, как правило, самые высокие волны в линейных полях с широким спектром (в том числе в так называемых скрещенных состояниях, когда имеются два спектральных максимума) появляются через случайные столкновения более умеренных волновых групп, то и дело возникающих в рассматриваемой области, растущих за счет фокусировки и затем исчезающих. События, когда сразу фокусируется одна высокая группа, хотя и случаются, но гораздо реже. Поэтому целесообразно исследовать в деталях процесс парного столкновения волновых пакетов на водной поверхности и зависимость свойств возникающих аномальных волн от параметров, характеризующих каждый из пакетов и их взаимное расположение в условно начальный момент времени. Этому и посвящены описываемые далее численные эксперименты.

Чтобы лучше понять процесс столкновения, полезно иметь в виду простую вариационную модель, приближенно описывающую динамику отдельного волнового пакета на глубокой воде. Пусть x и y – горизонтальные координаты, z – вертикальная координата, g – ускорение свободного падения, волновой вектор \mathbf{k}_0 направлен вдоль оси x , $k_0 = |\mathbf{k}_0|$ – волновое число, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \sqrt{gk_0}$ – частота несущей волны, $v_{gr} = (1/2)\sqrt{g/k_0}$ – групповая скорость. Обозначим через $A(x, y, t)$ комплексную огибающую главной гармоники. Вертикальное отклонение свободной поверхности определяется формулой $z \approx \text{Re}[A \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - i\omega_0 t)]$. Будем исходить из соответствующего нелинейного уравнения Шредингера (НУШ):

$$2i\psi_{\hat{t}} + \psi_{\hat{x}\hat{x}} - \psi_{\hat{y}\hat{y}} + |\psi|^2\psi = 0, \quad (1)$$

записанного в безразмерных переменных $\psi = k_0 A^*$, $\hat{t} = \omega_0 t$, $\hat{x} = 2k_0(x - v_{gr}t - x_0)$, $\hat{y} = \sqrt{2}k_0(y - y_0)$. Подставив простейший гауссов анзац (см., например, [23–26] и ссылки там)

$$\psi = \sqrt{\frac{4N}{XY}} \exp \left[-\frac{\hat{x}^2}{2X^2} - \frac{\hat{y}^2}{2Y^2} + i\frac{U\hat{x}^2}{2X} - i\frac{V\hat{y}^2}{2Y} + i\phi \right] \quad (2)$$

в лагранжиан НУШ

$$\mathcal{L} = \int (i\psi_{\hat{t}}\psi^* - i\psi\psi_{\hat{t}}^* - |\psi_{\hat{x}}|^2 + |\psi_{\hat{y}}|^2 + |\psi|^4/2) d\hat{x}d\hat{y} \quad (3)$$

и проделав стандартную процедуру вывода вариационных уравнений, получим однородную систему

$$\ddot{X} = \frac{1}{X^3} - \frac{N}{X^2Y}, \quad \ddot{Y} = \frac{1}{Y^3} + \frac{N}{Y^2X} \quad (4)$$

для продольного, $X(t)$, и поперечного, $Y(t)$, размеров пакета. При этом $4\pi N = \int |\psi|^2 d\hat{x}d\hat{y} = \text{const}$, $U = \dot{X}$, $V = \dot{Y}$. Заметим, что при $Y \sim X$ параметр N пропорционален квадрату локального индекса Бенджамина–Фейра. Если $N \sim 1$, то дисперсионные и нелинейные вклады в правых частях оказываются одного порядка, так что разделить эволюцию волнового пакета на линейную и нелинейную стадии не представляется возможным. Решения системы дифференциальных уравнений (4) довольно подробно исследованы [23, 24, 26]. Они описывают три главные стадии эволюции волнового пакета. Стадия фокусировки соответствует баллистическому режиму с $U \approx \text{const} < 0$, $V \approx \text{const} < 0$. Затем наступает стадия наибольшего сжатия пакета, детали и длительность которой зависят от начальных условий и могут быть довольно разнообразными при разных N . И наконец, наступает стадия дефокусировки в баллистическом режиме с $U \approx \text{const} > 0$, $V \approx \text{const} > 0$. Стоит отметить, что имеются подтверждения неплохого соответствия гауссова вариационного анзаца применительно к волнам на воде, причем даже в его более общем недиагональном варианте [23].

В наших численных экспериментах два почти гауссовых пакета, ориентированных вдоль соответствующих волновых векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 (достаточно близких, но не коллинеарных), в начальный момент времени центрировались в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Для простоты параметр N и начальные значения X_0, Y_0, U_0, V_0 брались одинаковыми для обоих пакетов и соответствовали баллистической стадии фокусировки. Начальные положения центров \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 подбирались с учетом групповых скоростей так, чтобы столкновение происходило примерно на стадии максимального сжатия. При этом начальные размеры пакетов должны быть, с одной стороны, не слишком большими, чтобы пакеты существенно не перекрывались, а с другой – не слишком малыми, чтобы дисперсия не успела их раньше времени дефокусировать. Несмотря на эти ограничения, параметрическая область “благоприятных” для формирования большой волны начальных условий $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, включающая в се-

бя состояния с двумя максимумами, оказывается все же довольно широкой.

Параметр N выбирался исходя из требования, чтобы крутизна волн на стадии максимального сжатия составляла около 0.2 для каждого пакета в отдельности. В таких случаях при столкновении формировалась предельно нелинейная аномальная волна с резким гребнем. При увеличении N волна оказывалась еще выше, но вычисления приходилось прекращать из-за начинающегося обрушения гребня, требующего в нашем численном методе слишком мелкого пространственного и временного разрешения. При меньших же N нелинейность не срабатывала в полной мере.

Для расчета нелинейной динамики свободной поверхности жидкости использовалась модель полностью нелинейных слабо трехмерных волн, описанная в работах [27, 28]. Вычислительная область представляла собой квадрат со стороной 2π с периодическими граничными условиями. Для презентации результатов они перемасштабировались на квадрат со стороной 5 км, так что, например, безразмерному волновому числу 50 соответствовала длина волны 100 м, что типично для Мирового океана.

На рис. 1 приведен пример формирования аномальной волны путем столкновения двух пакетов. На первой стадии, пока пакеты разъединены, происходит их почти независимая фокусировка. Затем две области повышенной амплитуды начинают перекрываться (начало столкновения). В этот момент каждая группа состоит из 2–3 волн с крутизной около 0.2. Длина гребней составляет около 3–4 длин волн, угол между их направлениями равен примерно 0.2–0.3 рад. Далее следует наиболее интересная стадия, когда нелинейность резко усиливается и начинает трансформировать интерференционную картину от двух наложенных друг на друга волновых пакетов. Вместо группы из все тех же 2–3 волн суммарной амплитуды, которые наблюдались бы в случае линейной суперпозиции главных гармоник, мы получаем предельно короткую группу практически всего в одну длину волны, т.е. отдельную аномальную волну, как ясно видно из рис. 1с и 2 (см. для сравнения рис. 3, где показана волновая картина при столкновении пакетов вдвое меньшей начальной амплитуды). При этом важно, что амплитуда волны-убийцы оказывается заметно большей, чем сумма амплитуд каждой группы, даже если учитывать только главную гармонику (см. рис. 4). Необходимо также отметить бризерный (осциллирующий) тип данной аномальной волны: состояние с высоким гребнем сменяется состоянием с глубокой впадиной и наоборот,

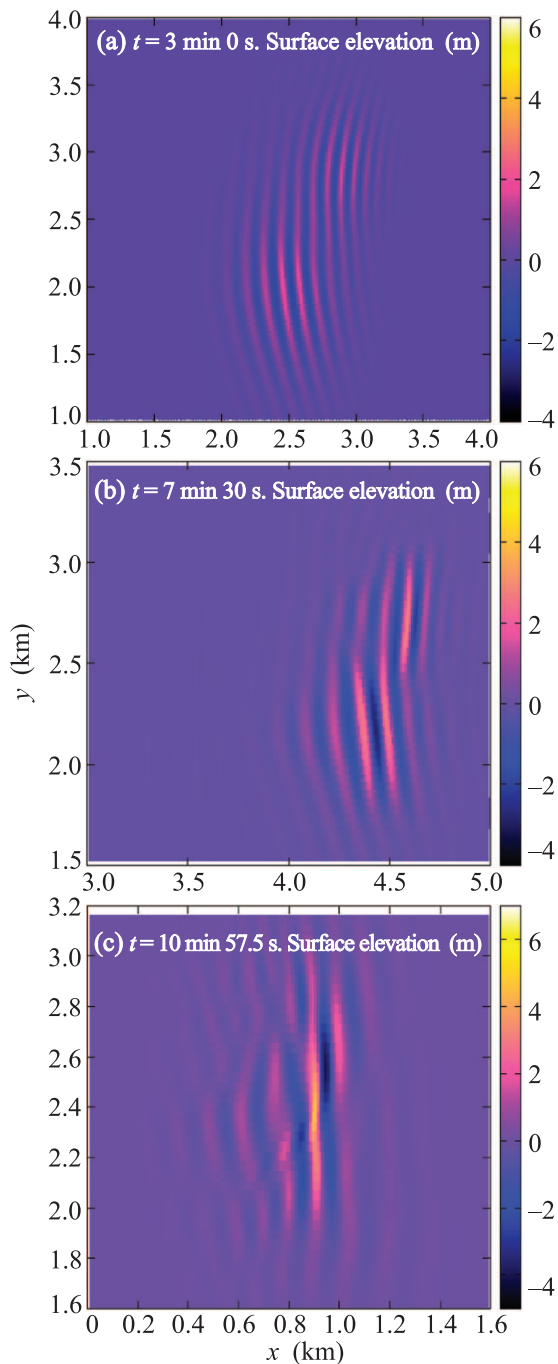


Рис. 1. (Цветной онлайн) Последовательные стадии столкновения двух волновых пакетов. (а) – Фокусировка. (б) – Начало столкновения. (с) – Появление аномальной волны. Значения параметров: $N = 1.5$, $X_0 = 30$, $Y_0 = 40$, $U_0 = -0.05$, $V_0 = -0.10$, $\mathbf{k}_1 = (40, 4)$, $\mathbf{k}_2 = (50, -4)$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $\mathbf{r}_1 = (0.5\pi, 0.75\pi)$, $\mathbf{r}_2 = (0.7\pi, 1.18\pi)$

что также следует из рис. 4. Указанное свойство обусловлено именно предельной краткостью группы при

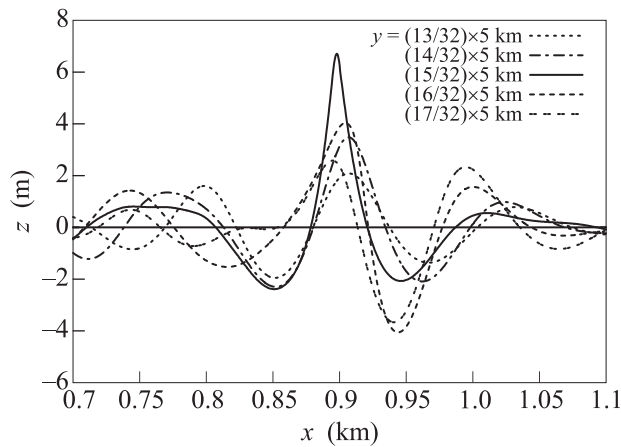


Рис. 2. Несколько волновых профилей с рис. 1с, которые подтверждают наличие отдельной аномальной волны. Похожие профили ранее неоднократно наблюдались в численных экспериментах со случайными волновыми полями (например, в работах [22, 28]), что свидетельствует о реалистичности рассматриваемого сценария образования волн-убийц

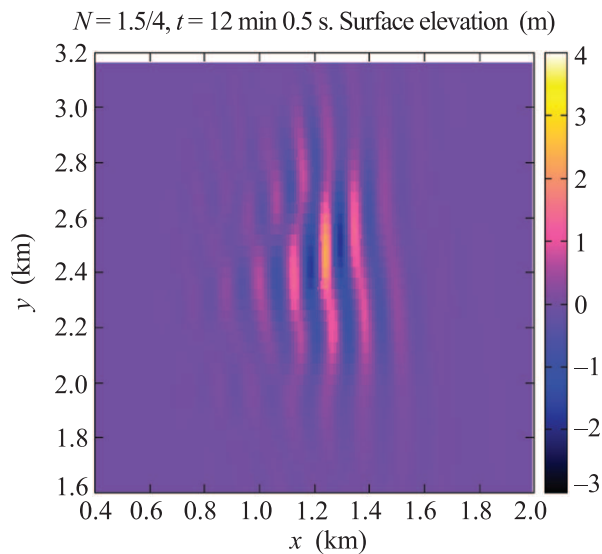


Рис. 3. (Цветной онлайн) Волновая картина при столкновении пакетов вдвое меньшей начальной амплитуды, чем на рис. 1. Видны существенные различия по сравнению с рис. 1с, обусловленные почти линейным характером взаимодействия в данном случае

двукратной разнице между фазовой и групповой скоростями. Период этих осцилляций примерно равен удвоенному периоду волны. Совершив около десятка подобных колебаний, большая волна расширяется в поперечном направлении (т.е. ее гребень удлиняется), уменьшая при этом свою амплитуду, а затем пе-

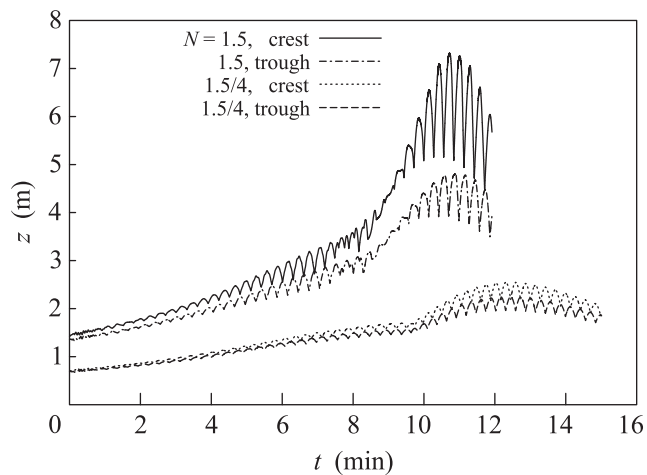


Рис. 4. Зависимости от времени высоты самого высокого гребня и глубины самой глубокой впадины при значениях параметров, как на рис. 1, а также аналогичные характеристики при вдвое меньшей начальной амплитуде. Видно, что сильная нелинейность привела не только к резкой асимметрии “верх–низ” за счет старших гармоник, но и к примерно 2.5-кратному увеличению средней амплитуды максимальной волны (полу-сумма огибающих) по сравнению со слабо нелинейным режимом

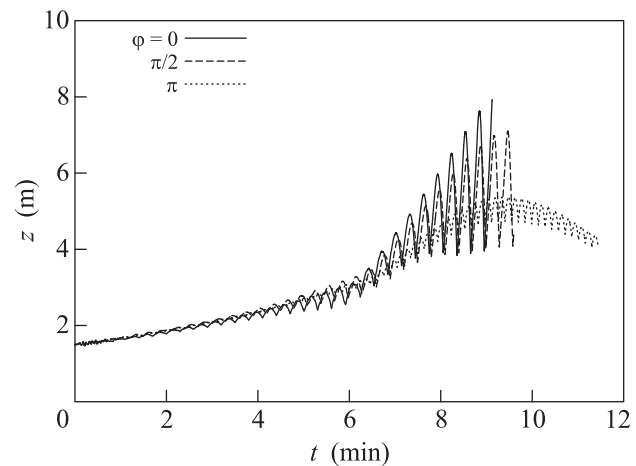


Рис. 5. Зависимости от времени высоты самого высокого гребня для трех значений ϕ_1 при $\phi_2 = 0$ и параметрах $N = 1.2$, $X_0 = Y_0 = 30$, $U_0 = V_0 = -0.07$, $\mathbf{k}_1 = (40, 6)$, $\mathbf{k}_2 = (40, -6)$, $\mathbf{r}_1 = (\pi, 0.72\pi)$, $\mathbf{r}_2 = (\pi, 1.28\pi)$

реходит в режим окончательной дефокусировки (на рисунке не показано).

Были проведены вычисления также и с другими начальными условиями. В частности, было замечено сильное влияние разности фаз $\phi = \phi_2 - \phi_1$ на процесс образования аномальной волны (при прочих равных параметрах). Если столкновение начиналось

таким образом, что интерференционный максимум линейной теории должен был пройти через середину объединенной группы, то аномальная волна развивалась скорее и была выше. Если же разность фаз приводила к интерференционному минимуму на середине группы, то волна оказывалась не столь высокой. Пример подобной зависимости поведения решения от разности фаз приведен на рис. 5 и 6.

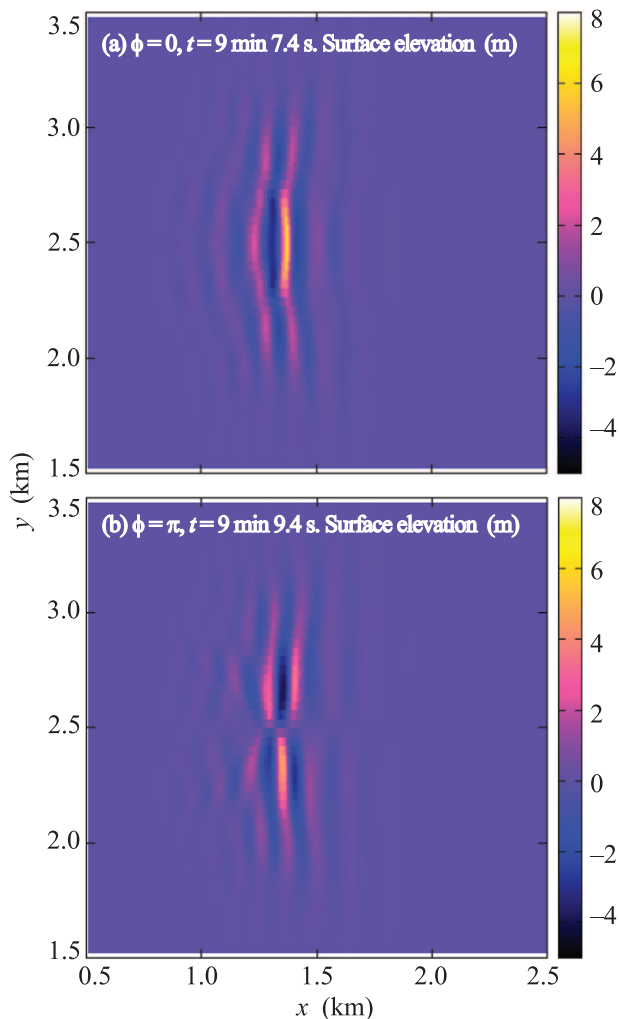


Рис. 6. (Цветной онлайн) Пример влияния разности фаз на волновую картину при столкновении двух волновых пакетов с параметрами, как на рис. 5

В целом столкновения групп при $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ оказывались в наших численных экспериментах несколько более эффективными, чем столкновения с заметно различными $|\mathbf{k}_1|$ и $|\mathbf{k}_2|$. Это говорит о том, что поперечная фокусировка в некотором смысле важнее продольной. Другими словами, трехмерность пространства играет принципиально важную

роль при формировании волн-убийц в случайных полях с малыми индексами Бенджамин–Фейра.

Таким образом, в данной работе продемонстрирован специфический существенно нелинейный механизм образования аномальных волн при столкновении двух довольно небольших и не очень высоких волновых групп под углом около 0.2–0.3 рад. К сожалению, наша модель не позволяет исследовать столкновения под большими углами.

1. C. Kharif and E. Pelinovsky, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **22**, 603 (2003).
2. K. Dysthe, H. E. Krogstad, and P. Müller, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **40**, 287 (2008).
3. M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, and F. T. Arecchi, *Phys. Rep.* **528**, 47 (2013).
4. Special Issue, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 535 (2006).
5. Special Issue, *Eur. Phys. J. Special Topics* **185**, 1 (2010).
6. V. E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
7. T. B. Benjamin and J. E. Feir, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
8. M. Onorato, A. R. Osborne, and M. Serio, *Phys. Fluids* **14**, L25 (2002).
9. O. Gramstad and K. Trulsen, *J. Fluid Mech.* **582**, 463 (2007).
10. M. Onorato, T. Waseda, A. Toffoli, L. Cavaleri, O. Gramstad, P. A. E. M. Janssen, T. Kinoshita, J. Monbaliu, N. Mori, A. R. Osborne, M. Serio, C. T. Stansberg, H. Tamura, and K. Trulsen, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 114502 (2009).
11. M. Onorato, L. Cavaleri, S. Fouques, O. Gramstad, P. A. E. M. Janssen, J. Monbaliu, A. R. Osborne, C. Pakozdi, M. Serio, C. T. Stansberg, A. Toffoli, and K. Trulsen, *J. Fluid Mech.* **627**, 235 (2009).
12. A. Toffoli, O. Gramstad, K. Trulsen, J. Monbaliu, E. Bitner-Gregersen, and M. Onorato, *J. Fluid Mech.* **664**, 313 (2010).
13. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **21**, 283 (2002).
14. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *JETP Lett.* **81**, 255 (2005).
15. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Prokofiev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 677 (2006).
16. A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 204502 (2011).
17. M. Onorato, A. R. Osborne, and M. Serio, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 014503 (2006).
18. P. K. Shukla, I. Kourakis, B. Eliasson, M. Marklund, and L. Stenflo, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 094501 (2006).
19. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **74**, 036305 (2006).
20. V. P. Ruban, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 044502 (2007).

21. В. П. Рубан, ЖЭТФ **137**, 599 (2010).
22. В. П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **97**, 788 (2013).
23. В. П. Рубан, ЖЭТФ **147**, 1068 (2015).
24. L. Bergé, Phys. Lett. A **189**, 290 (1994).
25. L. Bergé, J. J. Rasmussen, E. A. Kuznetsov, E. G. Shapiro, and S. K. Turitsyn, J. Opt. Soc. Am. B **13**, 1879 (1996).
26. L. Bergé, Phys. Rep. **303**, 259 (1998).
27. V. P. Ruban and J. Dreher, Phys. Rev. E **72**, 066303 (2005).
28. V. P. Ruban, Eur. Phys. J. Special Topics **185**, 17 (2010).