

# Новый тип предельно коротких векторных солитонов в среде несимметричных молекул

С. В. Сазонов<sup>1)</sup>

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 28 октября 2015 г.

После переработки 10 ноября 2015 г.

Предсказан новый тип электромагнитных предельно коротких солитонов терагерцового диапазона, способных формироваться в системе молекул, которые обладают в стационарных состояниях постоянными дипольными моментами. Показано, что такие солитоны могут формироваться в условиях, когда обыкновенная компонента поля возбуждает квантовые переходы, а необыкновенная, кроме того, вызывает динамический сдвиг их частот. Проанализирован механизм распространения таких солитонов в условиях нестационарной штарковской инверсии квантовых уровней, сопровождаемой эффективной генерацией импульса необыкновенной волны. Подчеркивается, что рассмотренные солитоны не имеют аналогов в видимом диапазоне.

DOI: 10.7868/S0370274X15240108

Развитие нелинейной оптики в числе прочего является мощным стимулом для исследования таких фундаментальных объектов, как солитоны [1]. Сейчас в оптике известно большое количество различных солитонов длительностью от нано- до фемтосекунд [2, 3]. В последнее время солитонная тематика в теоретических и экспериментальных исследованиях может вступить в новый этап развития в связи с бурным освоением терагерцового электромагнитного диапазона [4–6] и появлением новых возможностей в создании искусственных сред с наперед заданными свойствами [7]. Такие объекты, как квантовые точки, ямы, нити и т.д., прочно вписались в современные оптические (и вообще электромагнитные) исследования, породив направления, объединенные термином “нанооптика” [8]. С другой стороны, эффективность генерации терагерцового электромагнитного излучения и получаемые в лабораторных условиях соответствующие интенсивности достигли таких значений, что пришло время принять как настоящую необходимость, развитие “нелинейной терагерцовой оптики” [9]. Часто в лабораторных условиях генерируются широкополосные терагерцовые сигналы длительностью порядка одного периода электромагнитных колебаний (предельно короткие импульсы, ПКИ) [10]. По понятным причинам при исследовании взаимодействия ПКИ с веществом становится несправедливым традиционное для нелинейной оп-

тики квазимонохроматических сигналов приближение медленно меняющихся амплитуд (ММА) [11].

Особое место сейчас занимают исследования солитонов в средах из несимметричных квантовых объектов (молекул), обладающих в стационарных квантовых состояниях постоянными дипольными моментами (ПДМ) [12–14]. Здесь, помимо прочего, удалось выявить солитонные режимы, не имеющие аналогов в резонансной и нерезонансной оптике изотропных молекул. Обусловлено это тем, что в таких средах электрическое поле импульса не только возбуждает квантовые переходы молекул, но и вызывает динамические сдвиги частот данных переходов. В [12] были рассмотрены солитонные режимы распространения линейно поляризованных импульсов, при которых одна и та же компонента поля выполняет сразу обе обозначенные функции, что описывается системой типа Максвелла–Блоха с ПДМ. Векторные модели исследовались, например, в [13, 14]. При этом функции полевых компонент были строго дифференцированы: обыкновенная составляющая возбуждала квантовый переход, а необыкновенная динамически смещала частоту перехода. В то же время нередки ситуации, когда возбуждение переходов выполняют обе компоненты, а сдвиг частот производится одной из них. Это имеет место, например, при распространении импульса поперек оптической оси при наведенном (электрическом или магнитном) двулучепреломлении [15]. Именно такая ситуация и рассматривается в настоящей работе, цель которой – выявление новых солитонных режимов распространения вектор-

<sup>1)</sup>e-mail: sazono.v.sergey@gmail.com

ных электромагнитных ПКИ в среде из молекул, обладающих ПДМ.

Будем считать, что несимметричные молекулы, обладающие ПДМ, помещены в изотропную матрицу, характеризуемую показателем преломления  $n_m$ . Пусть электромагнитный импульс распространяется вдоль оси  $y$ , перпендикулярной внешнему магнитному полю, направленному вдоль оси  $z$  и формирующей оптическую ось анизотропии в результате эффекта Коттона–Мутона. Магнитное поле вызывает зеемановское расщепление квантовых уровней. Примем, что во взаимодействии с импульсом участвуют квантовые переходы, изображенные на рис. 1. Остальные

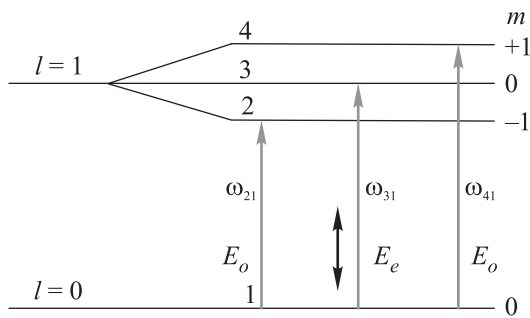


Рис. 1. Схема квантовых переходов в условиях зеемановского расщепления при распространении импульса перпендикулярно к магнитному полю. Нумерация квантовых уровней ведется снизу вверх по энергетической шкале. Обыкновенная ( $E_o$ ) компонента импульса возбуждает переходы  $1 \leftrightarrow 2$  и  $1 \leftrightarrow 4$ , необыкновенная ( $E_e$ ) – переход  $1 \leftrightarrow 3$ . Жирная двойная стрелка соответствует тому, что необыкновенная компонента вызывает еще и динамический штарковский сдвиг квантовых уровней, изменяя частоты переходов

переходы будем считать значительно удаленными по частотной шкале. Такое условие хорошо выполняется, например, для туннельных переходов в системе квантовых ям [7].

В рассматриваемой геометрии обыкновенная компонента  $E_o$  электрического поля импульса параллельна оси  $x$ , а необыкновенная компонента  $E_e$  – оси  $z$ . Тогда гамильтониан взаимодействия в электродипольном приближении имеет вид  $\hat{V}_{\text{int}} = -\hat{d}^{(x)}E_o - \hat{d}^{(z)}E_e$ , где  $\hat{d}^{(x)}$  и  $\hat{d}^{(z)}$  – соответствующие декартовы проекции оператора дипольного момента. Собственные функции оператора энергии  $\hat{H}_0$  свободной молекулы, учитывая ее аксиальную симметрию относительно оси  $z$ , запишем в виде  $\Phi_{l,m} = f_{l,m}(z, tr) \exp(im\varphi)$ . Здесь  $f_{l,m}(z, r)$  – вещественные функции координат  $z$  и  $r$  цилиндрической системы, определяемые конкретной зависимостью  $\hat{H}_0$  от данных координат,  $\varphi$  – азимутальный угол,  $l$  и

$m$  – орбитальное и магнитное квантовые числа соответственно. Поскольку  $x = r \cos \varphi$ , приходим к выводу о том, что отличные от нуля матричные элементы оператора дипольного момента в представлении собственных функций  $\hat{H}_0$  имеют вид

$$d_{21} = (d^{(x)})_{21} = -\pi e \int_0^{\infty} r^2 dr \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1,-1} f_{0,0} dz,$$

$$d_{31} = (d^{(z)})_{31} = -2\pi e \int_0^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{+\infty} z f_{1,0} f_{0,0} dz,$$

$$d_{41} = (d^{(x)})_{41} = -\pi e \int_0^{\infty} r^2 dr \int_{-\infty}^{+\infty} f_{1,+1} f_{0,0} dz,$$

$$D_{11} = (d^{(z)})_{11} = -2\pi e \int_0^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{+\infty} z f_{0,0}^2 dz,$$

$$D_{22} = (d^{(z)})_{22} = -2\pi e \int_0^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{+\infty} z f_{1,-1}^2 dz,$$

$$D_{33} = (d^{(z)})_{33} = -2\pi e \int_0^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{+\infty} z f_{1,0}^2 dz,$$

$$D_{44} = (d^{(z)})_{44} = -2\pi e \int_0^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{+\infty} z f_{1,+1}^2 dz,$$

где  $e$  – элементарный заряд, а нумерация квантовых уровней производится снизу вверх по энергетической шкале (рис. 1). Диагональные элементы оператора дипольного момента обозначены заглавными буквами, чтобы отличить их от недиагональных элементов, вызывающих квантовые переходы между стационарными состояниями.

Таким образом, в данной геометрии обыкновенная компонента поля вызывает сигма-переходы  $1 \leftrightarrow 2$  и  $1 \leftrightarrow 4$ , для которых  $\Delta m = \pm 1$ , а необыкновенная составляющая – пи-переход  $1 \leftrightarrow 3$  ( $\Delta m = 0$ ). Она же сдвигает частоты данных переходов.

С учетом сказанного выразим квантовые средние обыкновенной,  $P_o = n \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{d}^{(x)})$ , и необыкновенной,  $P_e = n \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{d}^{(z)})$ , компонент поляризации отклика среды через концентрацию  $n$  несимметричных молекул и матричные элементы  $\rho_{\mu\nu}$  их оператора плотности  $\hat{\rho}$ :

$$P_o = n [d_{21}(\rho_{21} + \rho_{21}^*) + d_{41}(\rho_{41} + \rho_{41}^*)], \quad (1)$$

$$P_e = n \left[ d_{31}(\rho_{31} + \rho_{31}^*) + \sum_{j=1}^4 D_{jj} \rho_{jj} \right]. \quad (2)$$

Соответствующие волновые уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial y^2} - \frac{n_m^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_{o,e}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_{o,e}}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Гамильтониан же молекулы удобно представить как

$$\hat{H} = \hat{H}_1 - \hbar \hat{\Omega}, \quad (4)$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка,

$$\hat{H}_1 = \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_4 - D_{44}E_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 - D_{33}E_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 - D_{22}E_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 - D_{11}E_e \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Omega_{41} \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{31} \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_{21} \\ \Omega_{41} & \Omega_{31} & \Omega_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$\varepsilon_j$  – энергия  $j$ -го стационарного состояния ( $j = 1, 2, 3, 4$ ),  $\Omega_{21} = d_{21}E_o/\hbar$ ,  $\Omega_{31} = d_{31}E_e/\hbar$ ,  $\Omega_{41} = d_{41}E_o/\hbar$ .

В результате имеем систему уравнений для элементов матрицы плотности:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_1, \hat{\rho}] + i [\hat{\Omega}, \hat{\rho}]. \quad (7)$$

В случае структур типа квантовых ям характерные частоты переходов между низшими квантовыми состояниями  $\omega_{\mu\nu} \sim 10^{12}c^{-1}$ , а частоты переходов на высшие, удаленные состояния  $\sim 10^{14}c^{-1}$  [16]. Пусть при этом характерная длительность широкополосного терагерцового ПККИ  $\tau_p \sim 10^{-13}c$ . Тогда для исключения материальных переменных можно считать выполненным условие [17, 18]

$$\varepsilon \equiv \omega_{\mu\nu}\tau_p \ll 1, \quad (8)$$

где частоты переходов  $\omega_{\mu\nu} = (\varepsilon_\mu - \varepsilon_\nu)/\hbar$ .

Считая также, что величины  $(D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu})E_e/\hbar$  одного порядка с  $\omega_{\mu\nu}$ , в нулевом приближении по малому параметру  $\varepsilon$  можно пренебречь первым коммутиатором в правой части (7).

Оператор  $\hat{\Omega}$  не коммутирует сам с собой в различные моменты времени, так как обыкновенная и необыкновенная компоненты поля в общем случае несинхронно меняются со временем. Однако условие (8) позволяет записать решение (7) при  $\hat{H}_1 = 0$  в виде

$$\hat{\rho} = \hat{U} \hat{\rho}^{(0)} \hat{U}^+. \quad (9)$$

Здесь  $\hat{\rho}^{(0)}$  – оператор плотности до импульсного воздействия, а оператор эволюции  $\hat{U}$  представляется в приближенной форме:

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left( i \int_{t_0}^t \hat{\Omega} dt' \right) \Bigg|_{\|\hat{\Omega}\| \rightarrow \infty}^{t \rightarrow t_0}, \quad (10)$$

где  $\|\hat{\Omega}\|$  – норма оператора  $\hat{\Omega}$ .

Детальное обоснование (10) содержится в работе [19]. Заметим, что неравенство (8) и соответствующий ему оператор эволюции (10) иногда называют приближением внезапного возмущения [20]. Данный метод нахождения решения операторного уравнения (7) при  $H_1 = 0$  эквивалентен также методу Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) в теории линейных систем с большими коэффициентами, зависящими от времени [21, 22].

Вводя обозначение  $\hat{\theta} = \int_{t_0}^t \hat{\Omega} dt'$  и используя (6), непосредственной проверкой легко установить тождества  $\hat{\theta}^3 = \theta^2 \hat{\theta}$ ,  $\hat{\theta}^5 = \theta^4 \hat{\theta}$ , ...,  $\hat{\theta}^4 = \theta^2 \hat{\theta}^2$ ,  $\hat{\theta}^6 = \theta^4 \hat{\theta}^2$ , ..., где  $\theta \equiv \sqrt{\sum_{j=2}^4 \theta_{j1}^2}$ ,  $\theta_{j1} = \int_{t_0}^t \Omega_{j1} dt'$ . Данные рекуррентные соотношения позволяют просуммировать символический ряд в (10):

$$\exp \left( i \int_{t_0}^t \hat{\Omega} dt' \right) = \hat{I} - 2 \frac{\hat{\theta}^2}{\theta^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{\hat{\theta}}{\theta} \sin \theta.$$

Раскрывая далее в пределе (10) неопределенности по правилу Лопиталья, найдем приближенный оператор эволюции:

$$\hat{U} = \hat{I} - 2 \frac{\hat{\Omega}^2}{|\Omega|^2} \sin^2 \frac{\psi}{4} + i \frac{\hat{\Omega}}{|\Omega|} \sin \frac{\psi}{2}, \quad (11)$$

где  $|\Omega| = \sqrt{\sum_{j=2}^4 \Omega_{j1}^2} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{(d_{21}^2 + d_{41}^2)E_e^2 + d_{31}^2 E_e^2}$ ,

$$\psi = 2 \int_{-\infty}^t |\Omega| dt', \quad (12)$$

а начальное время в (12) формально отнесено к  $-\infty$ .

Будем считать, что до импульсного воздействия все молекулы находились в основном состоянии, поэтому отличен от нуля лишь один элемент начальной матрицы плотности:  $\rho_{11}^{(0)} = 1$ . Отсюда, а также из (6), (9) и (11) имеем ( $j = 2, 3, 4$ )

$$\rho_{11} = \cos^2 \frac{\psi}{2}, \quad \rho_{jj} = \left( \frac{\Omega_{j1}}{|\Omega|} \right)^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad (13)$$

$$\rho_{j1} = i \frac{\Omega_{j1}}{2|\Omega|} \sin \psi. \quad (14)$$

При этом недиагональные элементы  $\hat{\rho}$ , соответствующие запрещенным переходам,  $\rho_{\mu\lambda} = \frac{\Omega_{\mu 1} \Omega_{\lambda 1}}{|\Omega|^2} \sin^2 \frac{\psi}{2}$ , где  $\mu \neq \lambda = 2, 3, 4$ .

Прямая подстановка  $\rho_{31}$  и  $\rho_{41}$  из (14) в (1) даст тождественный нуль в правой части (1). Поэтому от нулевого приближения по параметру  $\varepsilon$  необходимо перейти к первому. Для этого в правую часть (7) подставим матричные элементы  $\hat{\rho}$ , найденные в нулевом приближении [23]. Тогда для  $j = 2, 3, 4$  получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{j1} + \rho_{j1}^*) = \left( \omega_{j1} - \frac{D_{j1}}{\hbar} E_e \right) \frac{\Omega_{j1}}{|\Omega|} \sin \psi, \quad (15)$$

где  $D_{j1} = D_{jj} - D_{11}$  – ПДМ перехода  $1 \leftrightarrow j$ .

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_o}{\partial t} = \frac{n}{\hbar} & \left[ (d_{21}^2 \omega_{21} + d_{41}^2 \omega_{41}) - \right. \\ & \left. - \left( d_{21}^2 \frac{D_{21}}{\hbar} + d_{41}^2 \frac{D_{41}}{\hbar} \right) E_e \right] E_o \frac{\sin \psi}{|\Omega|}. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя (15) и (13) в (2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_e}{\partial t} = n d_{31} & \left( \omega_{31} - \frac{D_{31}}{\hbar} E_e \right) \frac{\Omega_{31}}{|\Omega|} \sin \psi + \\ & + n \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ D_{21} \frac{\Omega_{21}^2}{|\Omega|^2} + D_{31} \frac{\Omega_{31}^2}{|\Omega|^2} + D_{41} \frac{\Omega_{41}^2}{|\Omega|^2} \right] \sin^2 \frac{\psi}{2} \right\}. \end{aligned}$$

При дифференцировании выражения в фигурных скобках примем к сведению, что использованный выше для исключения материальных переменных метод ВКБ подразумевает медленное изменение компонент поля друг относительно друга в сравнении с их абсолютным изменением [19–22, 24]. В [25–27] обсуждаемое приближение именно в данном смысле названо адиабатическим. В связи с этим пренебрежем производной по времени от последнего выражения в квадратных скобках, учитывая лишь производную от  $\sin^2(\psi/2)$ . Тогда после простых преобразований найдем

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} = \frac{n}{\hbar} \left[ d_{31}^2 \omega_{31} E_e + \left( d_{21}^2 \frac{D_{21}}{\hbar} + d_{41}^2 \frac{D_{41}}{\hbar} \right) E_o \right] \frac{\sin \psi}{|\Omega|}. \quad (17)$$

Отсюда и из (16) видно, что правые части (3) пропорциональны малому параметру  $\varepsilon$  (см. (8)). В этих условиях можно использовать приближение однонаправленного распространения [18, 28, 29], что позволяет редуцировать волновые уравнения (3) к первому порядку:

$$\frac{\partial E_{o,e}}{\partial y} + \frac{n_m}{c} \frac{\partial E_{o,e}}{\partial t} = -\frac{2\pi}{cn_m} \frac{\partial P_{o,e}}{\partial t}. \quad (18)$$

Подстановка сюда (16) и (17) приводит к системе двух нелинейных волновых уравнений для  $E_o$  и  $E_e$ .

Сначала заметим, что при  $d_{31} = 0$  данные уравнения переходят в систему, исследованную в [30], где не учитывался важный здесь пи-переход.

В рассматриваемом нами случае зеемановского расщепления квантовых уровней  $d_{31} \equiv d$ ,  $d_{21} = d_{41} = d/\sqrt{2}$ ,  $\omega_{31} = (\omega_{21} + \omega_{41})/2 \equiv \omega_0$  [31]. Тогда подстановка (16) и (17) в (18) приводит к системе

$$\frac{\partial \Omega_o}{\partial y} + \frac{n_m}{c} \frac{\partial \Omega_o}{\partial t} = -\alpha \Omega_o \frac{1 - \tau_c \Omega_e}{|\Omega|} \sin \psi, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Omega_e}{\partial y} + \frac{n_m}{c} \frac{\partial \Omega_e}{\partial t} = -\alpha \frac{\Omega_e + \tau_c \Omega_o^2}{|\Omega|} \sin \psi, \quad (20)$$

где  $\alpha = \frac{2\pi d^2 n \omega_o}{\hbar c n_m}$ ,  $\tau_c = \frac{D}{d \omega_o}$ ,  $D = \frac{D_{21} + D_{41}}{2}$ ,  $\Omega_{o,e} = \frac{d E_{o,e}}{\hbar}$ , переменная  $\psi$  связана с  $|\Omega|$  соотношением (12), в котором в новых обозначениях  $|\Omega| = \sqrt{\Omega_o^2 + \Omega_e^2}$ .

Система (19), (20) инвариантна относительно замены  $E_o \rightarrow -E_o$ , но теряет инвариантность при  $E_e \rightarrow -E_e$ . Отсюда следует асимметрия по нелинейности относительно обыкновенной и необыкновенной компонент: отсутствие на входе в среду обыкновенной составляющей приводит к ее отсутствию в самой среде; в то же время обыкновенная компонента способна породить необыкновенную, если последней нет на входе. Это свойство является следствием аксиальной симметрии рассматриваемой задачи.

Введя комплексную переменную  $\Omega = \Omega_e + i\Omega_o$ , перепишем (19), (20) в виде

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{n_m}{c} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\alpha \frac{\Omega}{|\Omega|} (1 - i\tau_c \Omega_o) \sin \psi. \quad (21)$$

Представляя  $\Omega$  в показательной форме  $\Omega = |\Omega| \exp(i\phi)$ , найдем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial \tau} = -2\alpha \sin \psi, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \alpha \tau_c \frac{\Omega_o}{|\Omega|} \sin \psi,$$

где введено “локальное время”  $\tau = t - n_m y/c$ .

Учитывая, что  $\Omega_o = |\Omega| \sin \phi$ ,  $\Omega_e = |\Omega| \cos \phi$ , и принимая во внимание (22) и (12), перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\tau_c \sin \phi \frac{\partial |\Omega|}{\partial y}.$$

Интегрируя, будем иметь  $\cos \phi = \tanh[\tau_c |\Omega| - F(\tau)]$ , где  $F(\tau)$  – произвольная функция.

В результате получаем

$$\Omega_e = |\Omega| \cos \phi = |\Omega| \tanh[\tau_c |\Omega| - F(\tau)], \quad (23)$$

$$\Omega_o = |\Omega| \sin \phi = |\Omega| \operatorname{sech}[\tau_c |\Omega| - F(\tau)]. \quad (24)$$

Таким образом, решения (23), (24) системы (19), (20) выражаются через решения уравнения синус-Гордона (22), интегрируемого методом обратной задачи рассеяния [32, 33]. Возьмем, например, односолитонное решение уравнения (22),  $\psi = 4 \arctg(\exp \xi)$ ,  $|\Omega| = \tau_p^{-1} \operatorname{sech} \xi$ , где  $\xi = (t - y/v)/\tau_p$ ,  $v$  и  $\tau_p$  – скорость в лабораторной системе и длительность солитона соответственно, связанные между собой соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{n_m}{c} + 2\alpha\tau_p^2. \quad (25)$$

Тогда из (23), (24) приходим к солитону системы (19), (20):

$$\Omega_e = \frac{1}{\tau_p} \operatorname{sech} \xi \tanh \left[ \frac{\tau_c}{\tau_p} \operatorname{sech} \xi - F(\tau) \right], \quad (26)$$

$$\Omega_o = \frac{1}{\tau_p} \operatorname{sech} \xi \operatorname{sech} \left[ \frac{\tau_c}{\tau_p} \operatorname{sech} \xi - F(\tau) \right]. \quad (27)$$

Используя также (13), запишем соответствующие выражения для населенностей квантовых уровней:

$$\rho_{11} = \tanh^2 \xi,$$

$$\rho_{33} = \cos^2 \phi \operatorname{sech}^2 \xi = \tanh^2 \left[ \frac{\tau_c}{\tau_p} \operatorname{sech} \xi - F(\tau) \right] \operatorname{sech}^2 \xi, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \rho_{22} + \rho_{44} &= \sin^2 \phi \operatorname{sech}^2 \xi = \\ &= \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\tau_c}{\tau_p} \operatorname{sech} \xi - F(\tau) \right] \operatorname{sech}^2 \xi. \end{aligned}$$

Выясним смысл функции  $F(\tau)$ . Очевидно, что  $\phi$  есть угол между плоскостью поляризации импульса и оптической осью, формируемой постоянным внешним магнитным полем. При отсутствии ПДМ имеем  $\tau_c = 0$  и угол  $\phi$  задается характером поляризации импульса на входе в среду. Например, при  $F(\tau) = \operatorname{arctanh}(\sin \omega\tau)$ , где  $\omega$  – некоторая частота, имеем циркулярную поляризацию. Если же  $F(\tau) = \gamma = \operatorname{const}$ , приходим к линейной поляризации. Допустим, что  $\gamma = 0$ . Тогда при  $\tau_c = 0$  из (26) и (27) получаем импульс, поляризованный вдоль обыкновенной волны. При этом  $\Omega_e = 0$ . Если же  $\gamma = \pm\infty$ , приходим к противоположной ситуации – линейной поляризации импульса вдоль оптической оси:  $\Omega_o = 0$ . В любом случае при отсутствии ПДМ характер поляризации импульса в среде остается таким, каким был задан на входе.

Пусть теперь присутствует ПДМ и  $\tau_c \neq 0$ . В этом случае характер поляризации не меняется только при  $y = \pm\infty$ : импульс на входе в среду и внутри нее поляризован вдоль оптической оси. Это согласуется

со сделанным выше выводом о том, что необыкновенная компонента не способна породить обыкновенную, если последняя отсутствует на входе. Во всех других случаях характер поляризации в среде отличен от таковой на входе в нее.

На рис. 2 приведены профили солитонных компонент при  $\gamma = 0.89$ , что в отсутствие ПДМ соответствовало бы одинаковым профилям обеих со-

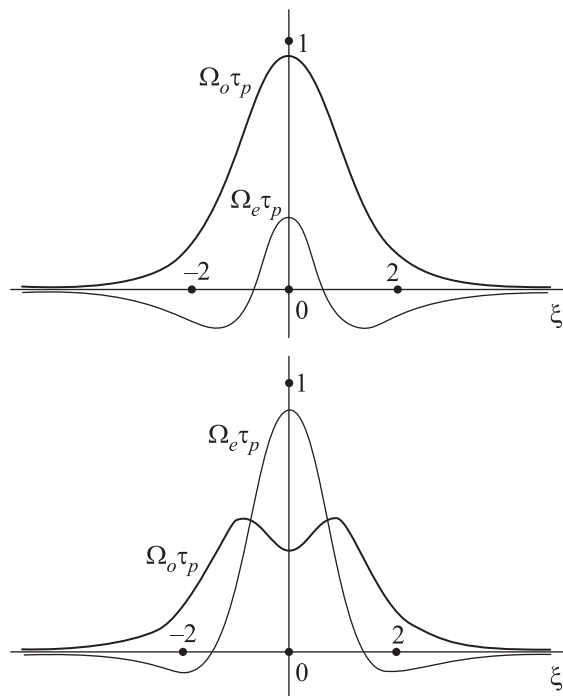


Рис. 2. Профили обыкновенной (жирные линии) и необыкновенной компонент солитона при  $\gamma = 0.89$  и  $\tau_c/\tau_p = 1.2$  (вверху),  $\tau_c/\tau_p = 2.5$  (внизу)

ставляющих и равенству их амплитуд. Понятно, что при этом плоскость поляризации импульса была бы наклонена под углом  $\pi/4$  к оптической оси.

Отдельно рассмотрим случай  $F(\tau) = \gamma = 0$  в силу того, что он представляет интерес в связи с генерацией необыкновенной компоненты импульса в среде при ее отсутствии на входе. Тогда, как видно из (26), (27), при  $\tau_p \gg \tau_c$  имеем  $\Omega_o \gg \Omega_e$ , что достаточно близко к солитону уравнения синус-Гордона в отсутствие ПДМ. С уменьшением длительности  $\tau_p$  наблюдаются рост необыкновенной компоненты и уменьшение обыкновенной. При достижении критического значения  $0.833\tau_c$  в центре профиля обыкновенной компоненты начинает проявляться провал (рис. 3), глубина которого растет с дальнейшим укорочением длительности. Случай  $\tau_p < 0.833\tau_c$  соответствует эффективной инверсии квантовых уровней. Действительно, как видно из (16) и (26), при

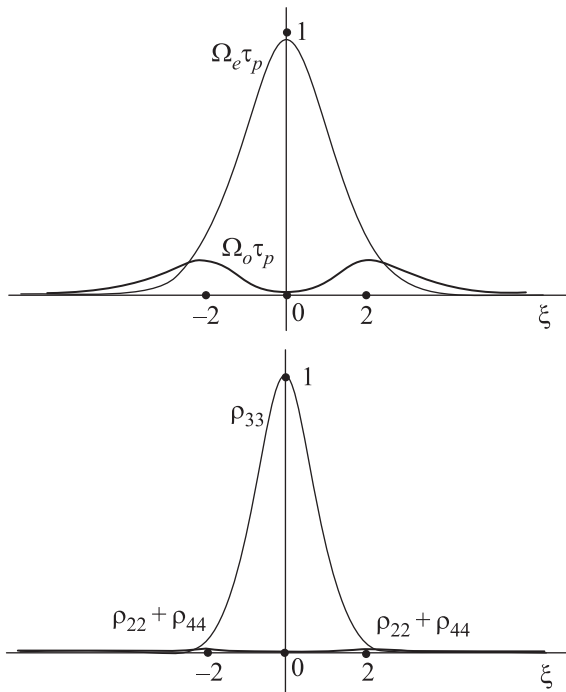


Рис. 3. Профили солитонных компонент (вверху) и соответствующая им динамика населенностей квантовых уровней (внизу) в процессе генерации импульса необыкновенной волны при  $\tau_c/\tau_p = 5$ . Жирными линиями обозначены профиль обыкновенной компоненты и создаваемые ей суммарные населенности уровней 2 и 4. Светлые линии соответствуют профилю обыкновенной компоненты и динамике населенности третьего уровня. В условиях эффекта взаимной инверсии уровней 2 и 4, с одной стороны, и уровня 3, с другой, квантовые переходы  $1 \leftrightarrow 2$  и  $1 \leftrightarrow 4$  оказываются подавленными. Сильное возбуждение перехода  $1 \leftrightarrow 3$  соответствует эффективной генерации необыкновенной компоненты

$d_{21} = d_{41} = d/\sqrt{2}$ ,  $\omega_{31} = (\omega_{21} + \omega_{41})/2 \equiv \omega_0$  эффективная средняя частота переходов  $1 \leftrightarrow 2$  и  $1 \leftrightarrow 4$ ,  $\omega_{ef} = \omega_0 - DE_e/\hbar = \omega_0(1 - \tau_c \Omega_e) = \omega_0(1 - \tau_c \cos \phi/\tau_p)$ , в месте нахождения центра импульса становится отрицательной. Это можно интерпретировать как относительную штарковскую инверсию квантовых уровней: состояние 1 по энергии лежит выше состояний 2 и 4. Как видно из (17), между состояниями 1 и 3 такой взаимной инверсии не происходит. Поэтому центр импульса соответствует максимуму необыкновенной компоненты, вызывающей здесь на переходе  $1 \leftrightarrow 3$  индуцированное излучение. При  $\tau_p \ll \tau_c$  отмеченное различие между переходами  $1 \leftrightarrow 2$  и  $1 \leftrightarrow 4$ , с одной стороны, и переходом  $1 \leftrightarrow 3$ , с другой, становится наиболее рельефным. Именно этим обусловлен сильный провал в профиле обыкновенной компоненты, так как в условиях инверсии уровней ста-

новится невозможным индуцированное излучение из состояний 2 и 4 на уровень 1. Понятно, что здесь наблюдается значительное доминирование необыкновенной компоненты над обыкновенной (рис. 3). Только на периферийных участках импульса, где необыкновенная компонента поля спадает до значений, соответствующих  $\omega_{ef} > 0$ , индуцированное излучение становится возможным, что и способствует появлению двух симметричных бугров в профиле обыкновенной компоненты импульса. Благодаря инверсии квантовых состояний на переходах  $1 \leftrightarrow 2$  и  $1 \leftrightarrow 4$ , на них сильно ослаблено и вынужденное поглощение, которое проявляет себя также лишь на периферийных участках импульса, где  $\omega_{ef} > 0$ . Таким образом, при  $\tau_p \ll \tau_c$  переходы  $1 \leftrightarrow 2$  и  $1 \leftrightarrow 4$  практически выключаются из взаимодействия с импульсом, что выражается, в частности, слабой динамической заселенностью уровней 2 и 4. В то же время, как видно из (28), при прохождении солитона уровень 1 во всех случаях сначала полностью опустошается, а затем возвращается к исходному состоянию.

Разобранный выше механизм соответствует генерации необыкновенной компоненты, при задании на входе только обыкновенной составляющей. Этот эффект следует рассматривать как поворот плоскости поляризации короткого ( $\tau_p \ll \tau_c$ ) импульса практически на  $\pi/2$  по мере его распространения в среде несимметричных молекул, обладающих ПДМ.

Проведем некоторые численные оценки. Возьмем для квантовых ям в полупроводниковых гетероструктурах  $D/d \sim 1$  [34]. Тогда  $\tau_c \sim 1/\omega_0$  и в силу (8) условие  $\tau_p \ll \tau_c$  удовлетворяется автоматически. При  $\omega_0 \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$  имеем  $\tau_p \sim 10^{-13} \text{ с}$ , что соответствует широкополосному импульсу, захватывающему терагерцовый диапазон. Дистанция, на которой должен произойти указанный выше поворот плоскости поляризации на  $\pi/2$  за счет ПДМ, соответствует длине формирования солитона. По порядку величины последняя равна дисперсионной длине  $l_d$ . Из (22) следует оценка  $l_d \approx (2\alpha\tau_p)^{-1} \sim \frac{cn_m}{\omega_c \omega_0 \tau_p}$ , где  $\omega_c = \frac{4\pi d^2 n}{\hbar}$  – коллективная частота. Взяв  $d \sim 5 \cdot 10^{-18} \text{ СГСЕ}$ ,  $n \sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , получим  $\omega_c \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ . Положив, как и выше,  $\omega_0 \tau_p \sim 0.1$ , получим  $l_d \sim 1 \text{ см}$ . При этом интенсивность сигнала  $I \approx \frac{c}{4\pi}(E_o^2 + E_e^2) \approx \approx \frac{c}{4\pi} \left( \frac{\hbar |\Omega|}{d} \right)^2 \sim \frac{c}{4\pi} \left( \frac{\hbar}{d\tau_p} \right)^2 \sim 10^9 \text{ Вт/см}^2$ .

Решения (23), (24) являются общими в том смысле, в котором можно считать общими решения уравнения синус-Гордона (22). Коль скоро последнее интегрируемо, отталкиваясь от (22)–(24) и (12), можно утверждать, что система (19), (20) также интегрируема. Следовательно, для последней в принципе мож-

но решить граничную задачу, задав поле импульса на входе в среду (при  $y = 0$ ).

Подставив в (23), (24) вместо  $|\Omega|$  соответствующие многосолитонные решения уравнения (22) для  $\partial\psi/\partial\tau$ , будем иметь многосолитонные решения системы (19), (20). Легко видеть, что данные решения, опять-таки в силу того, что они выражаются через решения уравнения (22), содержат в себе фундаментальное свойство солитонов упруго взаимодействовать между собой.

Проведенное в настоящей работе исследование позволяет, помимо прочего, говорить о возможности наблюдения в терагерцовой области электромагнитного спектра солитонов, не имеющих аналогов в видимой и ближней инфракрасной областях. Действительно, видимая область частот  $\omega_{\mu\nu}$  соответствует электронно-оптическим квантовым переходам. Выполнение здесь условия (8) ведет к необходимости учета процессов ионизации (переходов в непрерывный спектр) и, как следствие, к радикальному изменению соответствующих физических процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект # 13-02-00199а).

1. Ю. С. Кившарь, Г. П. Агравал, *Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам*, Физматлит, М. (2005) [Yu. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical solitons. From fibers to photonic crystals*, Academic Press, N.Y. (2003)].
2. А. И. Маймистов, *Квант. электрон.* **30**, 287 (2000).
3. Н. Leblond and D. Mihalache, *Phys. Rep.* **523**, 61 (2013).
4. G. Kh. Kitaeva, *Las. Phys. Lett.* **5**, 559 (2008).
5. M. I. Bakunov and S. V. Bodrov, *JOSA B* **11**, 2549 (2014).
6. J. A. Fülöp, L. Pálfalvi, M. C. Hoffmann, and J. Hebling, *Opt. Express* **19**, 15090 (2011).
7. В. Я. Демиховский, Г. А. Вугальтер, *Физика квантовых низкоразмерных структур*. Логос, М. (2000).
8. Л. Новотный, Б. Хехт, *Основы нанооптики*, Физматлит, М. (2009) [L. Novotny and B. Hecht, *Principles of nano-optics*, Cambridge University Press (2006)].
9. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **146**, 483 (2014).

10. С. В. Сазонов, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 281 (2012).
11. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Основы оптики фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, М. (1978).
12. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138**, 134 (2000).
13. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **121**, 1012 (2002).
14. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **127**, 289 (2005).
15. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **142**, 842 (2012).
16. В. Г. Вакс, *Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков*, Наука, М. (1983).
17. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, *Письма в ЖЭТФ* **51**, 252 (1990).
18. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, В. А. Ущаповский, *ЖЭТФ* **100**, 762 (1991).
19. С. В. Сазонов, *Оптика и спектроскопия* **94**, 453 (2003).
20. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, *УФН* **125**, 377 (1978).
21. Н. Н. Моисеев, *Асимптотические методы нелинейной механики*, Наука, М. (1981).
22. А. Найфэ, *Введение в методы возмущений*, Мир, М. (1984) [A. H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley and Sons, Toronto (1981)].
23. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, *J. Phys. B: At., Mol. and Opt. Phys.* **27**, L7 (1994).
24. С. В. Сазонов, *ЖЭТФ* **124**, 803 (2003).
25. J. H. Eberly, *Quant. Semiclass. Opt.* **7**, 373 (1995).
26. M. Fleischhauer, *Phys. Rev. A* **54**, 794 (1996).
27. N. V. Vitanov, *Phys. Rev. A* **58**, 2295 (1998).
28. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math., Nucl. and Gen.* **6**, 1337 (1973).
29. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн*, Наука, М. (1979).
30. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 573 (2006).
31. И. И. Собельман, *Введение в теорию атомных спектров*, Наука, М. (1977).
32. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, М. (1980).
33. Дж. Лэм, *Введение в теорию солитонов*, Мир, М. (1983) [G. L. Lamb, Jr., *Elements of soliton theory*, Wiley, N.Y. (1980)].
34. S. Kočinac, Z. Ikonić, and V. Milanović, *Opt. Commun.* **140**, 89 (1997).