Письма в ЖЭТФ, том 103, вып. 3, с. 163 – 167 © 2016 г. 10 февраля

Дифракционный предел теории многократного малоуглового рассеяния нейтронов на плотной системе рассеивателей

Ф. С. Джепаров, Д. В. Львов[1)]

Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Россия

Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

После переработки 22 декабря 2015 г.

Рассмотрено многократное малоугловое рассеяние нейтронов (ММУРН) на высококонцентрированной системе неоднородностей. Предложен комбинированный подход к анализу ММУРН на основе синтеза формул Цернике–Принса и Мольер. Проведено сравнение этого подхода с имеющейся теорией ММУРН, основанной на применении эйконального приближения. Оно показало, что в пределе дифракции результаты совпадают, в то время как в пределе рефракции имеются различия, обусловленные тем, что последняя учитывает корреляции последовательных актов рассеяния. Аналитически показано, что наличие корреляций в пространственном положении рассеивателей приводит к росту числа нерассеянных нейтронов. Таким образом, получено объяснение эффекта сужения спектров ММУРН, наблюдавшегося экспериментально и в численном моделировании.

DOI: 10.7868/S0370274X16030012

Введение. Метод малоуглового рассеяния нейтронов (МУРН) часто используется для изучения наномасштабных неоднородностей вещества [1]. При большой концентрации неоднородностей существенный вклад в наблюдаемую интенсивность вносит интерференция нейтронных волн от разных рассеивателей. В теории однократного МУРН данное явление описывается с помощью структурного фактора [1]. В то же время в теории многократного МУРН (ММУРН) обычно исходят из теории Мольер [2–4], которая верна только при малых концентрациях рассеивателей и интерференцию не учитывает. Отметим, что в более поздних работах [5, 6] использовался вариант теории Мольер, где вместо дифференциального сечения рассеяния применялся формализм автокорреляционной функции плотности, которая содержит сведения о корреляциях рассеивателей. Впервые учет интерференции в ММУРН был проведен в работе [7] для монодисперсной системы рассеивателей. На основе результатов этой работы в [8] было проведено численное моделирование процесса ММУРН для полидисперсной системы рассеивателей. В обеих работах установлено, что угловое распределение ММУРН сужается с ростом концентрации рассеивателей при фиксированном отношении толщины образца к длине свободного пробега нейтрона. Этот эффект наблюдался экспериментально в [8, 9] при измерении ММУРН с помощью двухкристального дифрактометра. Однако структура теории [7] получилась сильно отличной от теории однократного МУРН, а конечные выражения для интенсивности ММУРН – слишком сложными для аналитического анализа, требующими проведения численных расчетов. В данной работе для частного случая, когда рассеяние нейтрона на одной неоднородности можно рассматривать в приближении дифракции, применен новый подход построения теории ММУРН. На его основе аналитически показано, что интерференция, возникающая при наличии корреляций в расположении неоднородностей, приводит к росту числа нерассеянных нейтронов, что, в свою очередь, объясняет результаты экспериментов [8, 9]. Заметим, что в большинстве экспериментов реализуется именно приближение дифракции. Структура статьи следующая. Сначала рассмотрено однократное МУРН на основе формализма чисел заполнения. Затем рассмотрено многократное МУРН: приведена формула Мольер и кратко описаны основные контуры теории [7]. Далее сформулированы идеи построения теории ММУРН на основе синтеза теории однократного МУРН и теории Мольер. Показано соответствие нового подхода теории [7] в пределе дифракции и проведен расчет изменения числа нерассеянных нейтронов с ростом концентрации рассеивателей.

1) e-mail: lvov@itep.ru

Однократное малоугловое рассеяние. Большинство малоугловых исследований проводится в режиме однократного рассеяния, когда толщина образца l много меньше длины свободного пробега нейтрона $l_c = 1/c\sigma_t$, где c – концентрация неоднородностей, а σ_t – полное сечение рассеяния на одной неоднородности. В этом случае метод МУРН наиболее информативен.

Расчет интенсивности рассеяния может проводиться в борновском приближении:

$$I_1(\mathbf{q}) = |f(\mathbf{q})|^2, \quad f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3 r e^{-i\mathbf{qr}} U(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где $U(\mathbf{r})$ – нейтронооптический потенциал всего образца (псевдопотенциал Ферми, усредненный по объему, содержащему большое число ядер). Представим образец в виде совокупности N одинаковых рассеивателей. Потенциал взаимодействия нейтрона с образцом выбирается в виде

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}} U_0(\mathbf{r}-\mathbf{x}), \quad (2)$$

где $U_0(\mathbf{r}-\mathbf{x})$ – нейтронооптический потенциал неоднородности с "центром" в $\mathbf{r}=\mathbf{x}$, а $n_{\mathbf{x}}$ – число заполнения узла $\mathbf{x}$. Здесь и далее предполагается, что центры зерен могут располагаться в узлах некоторой решетки, элементарная ячейка которой имеет объем Ω, а среднее значение $\langle n_{\mathbf{x}}\rangle = f$. В пределе $f \to 0$, $\Omega \to 0$, $f/\Omega = c = \text{const}$ получается случайное распределение зерен в непрерывном пространстве, а наличию корреляций в расположении зерен соответствуют соотношение $\Omega^{-2}\langle n_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{y}}\rangle = C_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq c^2$ и его очевидные обобщения для высших функций распределения.

Запишем амплитуду рассеяния:

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3 r e^{-i\mathbf{qr}} \sum_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}} U_0(\mathbf{r}-\mathbf{x}) = \\ = \sum_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{qx}} f_0(\mathbf{q}), \quad (3)$$

где $f_0(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3 r e^{-i\mathbf{qr}} U_0(\mathbf{r})$ – амплитуда рассеяния на одной неоднородности. Интенсивность рассеяния на образце

$$I_1(\mathbf{q}) = |f_0(\mathbf{q})|^2 \sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \langle n_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\rangle, \quad (4)$$

где треугольные скобки означают среднее по расположению неоднородностей. Выделяя слагаемые с $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, проводя усреднение и переходя к континуальному пределу, получаем

$$I_1(\mathbf{q}) = N|f_0(\mathbf{q})|^2 + |f_0(\mathbf{q})|^2 \int\limits_V d^3x d^3y C_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \quad (5)$$

где N – число неоднородностей, а V – объем образца. Если неоднородности в образце распределены однородно (но не обязательно изотропно), то $C_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = C_2(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. Тогда, вычисляя интеграл, имеем

$$I_1(\mathbf{q}) = N|f_0(\mathbf{q})|^2 \left[1 + c\int\limits_V d^3x \frac{C_2(\mathbf{x})}{c^2} e^{-i\mathbf{qx}}\right]. \quad (6)$$

При больших расстояниях $C_2(\mathbf{x}) \to c^2$. Чтобы подынтегральная функция при больших x стремилась к нулю, добавим и вычтем 1 из функции $C_2(\mathbf{x})/c^2$. Получаем

$$I_1(\mathbf{q}) = N|f_0(\mathbf{q})|^2 \left[1 + c\int\limits_V d^3x \varkappa(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{qx}} + c\delta_V(\mathbf{q})\right], \quad (7)$$

$$\varkappa(\mathbf{x}) = \frac{C_2(\mathbf{x})}{c^2} - 1. \quad (8)$$

Здесь интеграл $\delta_V(\mathbf{q}) = \int\limits_V d^3x e^{-i\mathbf{qx}}$ отличен от нуля только при $q \le 2\pi/D$, где $D \sim V^{1/3}$, т.е. по отношению к наблюдаемым в эксперименте векторам рассеяния является дельта-функцией.

Если расположение неоднородностей изотропно, то, переходя к сферическим координатам, для всех $q \ge 2\pi/D$ имеем

$$I_1(q) = N\sigma(q)\left[1 + c\int\limits_0^\infty 4\pi r^2 dr \frac{\sin qr}{qr}\varkappa(r)\right], \quad (9)$$

где $\sigma(\mathbf{q}) = \sigma(q)$ – дифференциальное сечение для одного рассеивателя. Данное выражение представляет собой известную формулу Цернике–Принса [1]. Первое слагаемое в нем описывает некогерентное рассеяние, а второе – когерентное рассеяние нейтронов с учетом их интерференции.

Теория Мольер многократного малоуглового рассеяния. При изучении современных материалов часто невозможно изготовить (при сохранении внутренней структуры) столь тонкий образец, чтобы малоугловое рассеяние нейтронов на нем было однократным. В этом случае приходится анализировать спектры многократного МУРН, что является значительно более сложной задачей. На данный момент универсального метода ее решения не существует. Обычно анализ экспериментальных данных проводят исходя из теории Мольер, верной при малой концентрации рассеивающих центров. Интенсивность рассеяния определяется выражением

$$I_M(\mathbf{q}) = \int d^2x e^{i\mathbf{qx}} e^{-lc[\sigma_0 - \sigma(\mathbf{x})]}, \quad (10)$$

где l – толщина образца, а

$$\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{k_0^2} \int d^2 q e^{-\mathbf{qx}} \sigma(\mathbf{q}). \tag{11}$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma(x = 0) \equiv \sigma_t$ – полное сечение рассеяния.

Многократное малоугловое рассеяние с учетом корреляций в расположении рассеивателей было рассмотрено в работе [7]. В ней была построена теория процесса в рамках эйконального приближения. В частности, в [7] получено выражение для наблюдаемой интенсивности ММУРН при учете парных корреляций.

Теория эйконала для ММУРН при высокой концентрации неоднородностей. Теория Мольер верна только при нескоррелированном расположении неоднородностей и, следовательно, при высокой их концентрации неприменима. Расчеты угловых распределений нейтронов должны быть основаны на теории ММУРН [7, 8], верной при больших концентрациях рассеивателей, когда становятся существенными корреляции в их пространственном положении. При этом вклад в интенсивность дает интерференция волн, рассеянных на разных неоднородностях (эффект межчастичной интерференции, МЧИ). В теории используется эйкональное приближение, в котором амплитуда рассеяния неполяризованных нейтронов на неполяризованном образце имеет вид [10]

$$f(\mathbf{q}) = \frac{k}{2\pi i} \int d^2\rho [S(\boldsymbol{\rho}) - 1] \exp(-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}), \tag{12}$$

$$S(\boldsymbol{\rho}) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar v}\int\limits_{-\infty}^{\infty} U(\mathbf{r})dz\right], \quad \mathbf{r} = (\boldsymbol{\rho}, z),$$

где $\mathbf{k}_0 = (0, 0, k)$ – начальный волновой вектор нейтрона, v – его скорость, ρ – прицельный параметр, $\mathbf{q}$ – вектор рассеяния. Возможность применения амплитуды рассеяния на образце к результатам, полученным на двухкристальном дифрактометре, доказана в [11].

Эйкональное приближение применимо, если выполняется соотношение $U_0/E \ll 1$, где U_0 – характерная энергия взаимодействия нейтрона с неоднородностью, а E – кинетическая энергия нейтрона. Для типичных неоднородностей конденсированных сред и тепловых нейтронов $U_0/E \sim 10^{-6}$–10^{-5} и данное приближение выполняется с очень хорошей точностью.

Нормированное угловое распределение нейтронов по импульсу $I(\mathbf{q})$ выражается формулами

$$I(\mathbf{q}) = \Sigma(\mathbf{q})/\Sigma_0, \quad \Sigma(\mathbf{q}) = |f(\mathbf{q})|^2, \quad \Sigma_0 = \int \frac{d^2q}{k^2}\Sigma(\mathbf{q}). \tag{13}$$

Для расчетов удобнее использовать фурье-представление этих величин:

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2q}{k^2} e^{i\mathbf{qx}} \Sigma(\mathbf{q}) =$$

$$= \int d^2\rho S\left(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{x}}{2}\right) S^*\left(\boldsymbol{\rho} + \frac{\mathbf{x}}{2}\right), \tag{14}$$

$$I(\mathbf{x}) = \Sigma(\mathbf{x})/\Sigma_0, \quad \Sigma_0 = \Sigma(\mathbf{x} = 0). \tag{15}$$

В случае, когда пространственные корреляции в расположении рассеивателей отсутствуют, можно точно провести усреднение фурье-образа углового распределения по случайному положению рассеивателей [7] исходя из соотношения

$$\left\langle \exp\left(\sum_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}} R_{\mathbf{x}}\right)\right\rangle = \exp\left[c\int\limits_V d^3x \langle e^{R_{\mathbf{x}}} - 1\rangle_\alpha\right]. \tag{16}$$

В результате усреднения получается формула Мольер (10), (11).

При наличии корреляций точное усреднение невозможно. В этом случае раскладываем $I(\mathbf{x})$ в ряд по числам заполнения на основе соотношения

$$\exp\left(\sum_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}} R_{\mathbf{x}}\right) = 1 + \sum_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}}(e^{R_{\mathbf{x}}} - 1) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{x}\neq\mathbf{y}} n_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{y}} (e^{R_{\mathbf{x}}} - 1)(e^{R_{\mathbf{y}}} - 1) + \ldots \tag{17}$$

В итоге в случае, когда рассеиватели представляют собой тождественные сферы с радиусом R, а нейтронооптический потенциал равен U_0 внутри гранулы и нулю вне ее, получаем [7]

$$I(\mathbf{x}) = I(x_1, x_2) = I_M(\mathbf{x}) \exp\left\{\frac{c^2 L}{2}[K(\mathbf{x}) + O(c)]\right\}, \tag{18}$$

$$K(\mathbf{x}) = \int d^2 r_1 \int d^2 r_2 \varkappa_0(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) Q(\mathbf{x}, \mathbf{r}_1) Q(\mathbf{x}, \mathbf{r}_2),$$

$$\varkappa_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz \varkappa(\sqrt{x^2 + z^2}), \tag{19}$$

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = e^{-i\phi(\mathbf{r}-\mathbf{x}/2) + i\phi(\mathbf{r}+\mathbf{x}/2)} - 1,$$
$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{2U_0}{\hbar v}\sqrt{R^2 - x^2}\,\vartheta(x < R). \tag{20}$$

Здесь $I_M(\mathbf{x})$ – значение, получаемое в теории Мольер и определенное формулой (10). Заметим, что при малых значениях борновского параметра $\nu = U_0 R/\hbar v$ в выражении (18) главный и первый поправочный члены – порядка ν^2, а следующие члены имеют более высокий порядок по ν. Следовательно, при малых ν мы имеем полное решение проблемы ММУРН для образца с конечной кратностью рассеяния $N_s = L/l_c \propto \nu^2 L$.

Комбинированный подход. При условии применимости к рассеянию на одной неоднородности борновского приближения возможен следующий более простой и наглядный подход.

При выводе формулы Мольер образец разбивается на много тонких слоев, рассеяние в которых является однократным. Далее предполагается, что интенсивность рассеяния в слое пропорциональна дифференциальному сечению рассеяния (именно здесь пренебрегается интерференцией рассеянных нейтронов). Затем производится суммирование по всевозможным кратностям рассеяния в образце. Чтобы учесть интерференционные эффекты в многократном МУРН, подставим в формулу Мольер вместо дифференциального сечения рассеяния интенсивность однократного рассеяния на ансамбле неоднородностей в расчете на одну неоднородность. Для этого перепишем формулу (7) в виде

$$\bar{I}_1(\mathbf{q}) = \frac{I_1(\mathbf{q})}{N} = \sigma(\mathbf{q})\left[1 + c\int d^2 r e^{i\mathbf{qr}}\varkappa_0(r) + c\delta_V(\mathbf{q})\right], \qquad (21)$$

где $\varkappa_0(r) = \int dz \varkappa(\sqrt{r^2+z^2})$. Здесь учтено, что в малоугловом рассеянии вектор рассеяния лежит в плоскости, ортогональной направлению падающей волны (ось z). Используя теперь в формуле Мольер (10) $\bar{I}_1(\mathbf{q})$ вместо $\sigma(\mathbf{q})$, получаем, что фурье-образ интенсивности ММУРН равен

$$I(\mathbf{x}) = \exp\{-lc[I_1(x=0) - \bar{I}_1(\mathbf{x})]\} = I_{\mathrm{M}}(\mathbf{x})\exp\{-lc^2[A(x=0) - A(\mathbf{x})]\}, \qquad (22)$$

$$\bar{I}_1(\mathbf{x}) = \int \frac{d^2 q}{k_0^2} e^{-i\mathbf{qx}}\sigma(\mathbf{q}) + c\int \frac{d^2 q}{k_0^2} e^{-i\mathbf{qx}} \int d^2 r e^{i\mathbf{qr}}\varkappa_0(r)\sigma(\mathbf{q}) = I_{\mathrm{M}}(\mathbf{x}) + cA(\mathbf{x}). \qquad (23)$$

Здесь $I_{\mathrm{M}}(\mathbf{x})$ – фурье-образ интенсивности (10), что соответствует теории Мольер. Заметим, что последний член в (21) из-за наличия функции $\delta_V(\mathbf{q})$ после преобразования Фурье дает константу, которая в (22) сокращается и не присутствует в последующих формулах. В борновском приближении амплитуда рассеяния на одной неоднородности

$$f(\mathbf{q}) = \frac{k_0}{2\pi}\int d^2 y e^{i\mathbf{qy}}\varphi(\mathbf{y}), \qquad (24)$$

$$\varphi(\mathbf{y}) = \int \frac{dz}{\hbar\nu} U(\mathbf{y}, z), \qquad (25)$$

где предполагается, что нейтроны летят вдоль оси z, а $\varphi(\mathbf{y})$ – набег фазы при прохождении неоднородности. Тогда для дифференциального сечения имеем

$$\sigma(\mathbf{q}) = \frac{k_0^2}{4\pi^2}\int d^2 y_1 d^2 y_2 e^{i\mathbf{q}(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)}\varphi(\mathbf{y}_1)\varphi(\mathbf{y}_2). \qquad (26)$$

Подставляя это выражение в (23) и интегрируя по $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$, получаем

$$A(\mathbf{x}) = \int d^2 y_1 d^2 y_2 \varkappa_0(|\mathbf{x} - \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2|)\varphi(\mathbf{y}_1)\varphi(\mathbf{y}_2). \qquad (27)$$

Данная формула получается и предельным переходом из (18)–(20) при малом значении борновского параметра.

Важнейшим физическим следствием данных формул является то, что при фиксированном параметре cl (т.е. числе рассеивателей на пути нейтрона) ширина линии ММУРН уменьшается с ростом концентрации рассеивателей. Главной причиной этого эффекта служит то, что эффективная средняя кратность рассеяния становится меньше: $cl\bar{I}_1(x=0)$ вместо $cl\sigma_t$. Перепишем модифицированную формулу Мольер в виде

$$I_{\mathrm{M}}(\mathbf{q}) = e^{-lc\bar{I}_1(x=0)}\delta(\mathbf{q}) + \int d^2 x e^{i\mathbf{qx}}\left[e^{-lc[\bar{I}_1(x=0) - \bar{I}_1(\mathbf{x})]} - e^{-lc\bar{I}_1(x=0)}\right], \qquad (28)$$

где первый член соответствует нейтронам, прошедшим образец без рассеяния. Покажем, что $\bar{I}_1(x = 0) < \sigma_0$. Действительно,

$$\bar{I}_1(x=0) = \sigma_t + c\int d^2 r \sigma(\mathbf{r})\varkappa_0(\mathbf{r}). \qquad (29)$$

В борновском приближении функция $\sigma(\mathbf{r})$ положительна, если рассеивающий потенциал знакоопределен. В самом деле, легко показать, что

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}\int d^2 h dz_1 dz_2 U(\mathbf{r}+\mathbf{h}, z_1)U(\mathbf{h}, z_2) > 0.$$

Функция $\sigma(\mathbf{r})$ локализована в области $r < r_i + r_j$, где r_i, r_j – радиусы рассеивателей. В этой области $\varkappa_0(r < r_i + r_j) < 0$ вследствие непроницаемости рассеивателей. Следовательно, $\int d^2 r\sigma(\mathbf{r})\varkappa_0(r) < 0$ и $\bar{I}_1(x=0) < \sigma_t$.

Таким образом, наличие корреляций приводит к росту числа нерассеянных нейтронов. В экспериментах, выполняемых на двухкристальном дифрактометре, для получения экспериментально наблюдаемой интенсивности $I_{\exp}$ надо свернуть (28) с инструментальной линией прибора I_{ins} [12]. Мы рассматриваем корреляции рассеивателей, соответствующие случаю плотноупакованной системы шаров. Интенсивность однократного рассеяния нейтронов для этого случая была исследована в работе [13] для монодисперсной и полидисперсной (с логнормальным распределением по размерам) систем шаров. Показано, что в зависимости от концентрации интенсивность однократного рассеяния нейтронов или монотонно спадает с ростом q, или (при больших концентрациях) имеет максимум при некотором $q_m \neq 0$. Однако амплитуда этого максимума относительно невелика, а главное, его ширина много больше ширины инструментальной линии двухкристального дифрактометра. Таким образом, в типичных условиях $I_{\rm ins}$ много уже всех структур, проявляющихся в $I_{\rm SANS}$. Следовательно, так как рост числа нерассеянных нейтронов приводит к увеличению вклада $I_{\rm ins}$ в $I_{\rm exp}$, экспериментально наблюдаемый угловой спектр сужается.

Заключение. В работе проведено сравнение подхода, основанного на синтезе теории однократного рассеяния и теории Мольер, с теорией ММУРН, основанной на применении эйконального приближения. Оно показало, что в пределе дифракции результаты совпадают, в то время как в пределе рефракции имеются различия. Данный результат имеет простое качественное объяснение. В пределе дифракции полное сечение рассеяния на одной неоднородности много меньше ее геометрического сечения. Следовательно, длина свободного пробега больше длины корреляции (в расположении неоднородностей отсутствует дальний порядок). Соответственно следующий акт рассеяния происходит на новой конфигурации рассеивателей, никак не связанной с конфигурацией предыдущего рассеяния. Поэтому правомерен учет многократности по теории Мольер, которая игнорирует корреляции последовательных актов рассеяния. В пределе рефракции длина свободного пробега составляет порядка длины корреляции и необходимо рассмотрение в рамках теории [7].

В экспериментально реализуемом пределе дифракции получено теоретическое объяснение обнаруженного эффекта сужения линии ММУРН, измеряемой на двухкристальном дифрактометре, при высокой концентрации рассеивателей. Показано, что причиной эффекта служит увеличение числа нерассеянных нейтронов вследствие пространственных корреляций рассеивающих центров. Заметим, что неучет эффекта межчастичной интерференции приведет к завышению размера неоднородностей, определяемого из спектра многократного МУРН (сужение спектра благодаря интерференции ошибочно интерпретируется как МУРН на рассеивателях большего размера, т.к. ширина линии обратно пропорциональна размеру рассеивателя).

1. Д. И. Свергун, Л. А. Фейгин, *Рентгеновское и нейтронное малоугловое рассеяние*, Наука, Физматлит, М. (1986), 280 с.
2. H. A. Bethe, Phys. Rev. **89**, 1256 (1953).
3. С. В. Малеев, Б. П. Топерверг, ЖЭТФ **78**, 315 (1980).
4. J. Schelten and W. Schmatz, J. Appl. Cryst. **13**, 385 (1980).
5. J. Šaroun, J. Appl. Cryst. **33**, 824 (2000).
6. T. Krouglov, W. G. Bouwman, J. Plomp, M. T. Rekveldt, G. J. Vroege, A. V. Petukhov, and D. M. E. Thies-Weesie, J. Appl. Cryst. **36**, 1417 (2003).
7. Ф. С. Джепаров, Д. В. Львов, Письма в ЖЭТФ **72**, 518 (2000).
8. Ю. Г. Абов, Ф. С. Джепаров, Н. О. Елютин, Д. В. Львов, Ю. И. Смирнов, А. Н. Тюлюсов, Письма в ЖЭТФ **78**, 1011 (2003).
9. Ю. Г. Абов, Ф. С. Джепаров, Н. О. Елютин, Д. В. Львов, А. Н. Тюлюсов, ЖЭТФ **143**, 507 (2013).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, М. (2008), 800 с.
11. Ф. С. Джепаров, К. С. Забелин, Д. В. Львов, Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования **9**, 9 (2009).
12. Н. О. Елютин, Д. В. Львов, А. Н. Тюлюсов, ФТТ **54**, 642 (2012).
13. W. K. Bertram, J. Appl. Cryst. **29**, 682 (1996).