

Нутации намагниченностей подрешеток и их роль в формировании мессбауэровских спектров антиферромагнитных наночастиц

М. А. Чуев¹⁾

Физико-технологический институт РАН, 117218 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 декабря 2015 г.

Проведено обобщение континуальной модели магнитной динамики ансамбля антиферромагнитных наночастиц в двухподрешеточном приближении на случай точного решения уравнений движения для намагниченностей подрешеток. Нетривиальная форма спектра возбуждения таких частиц в виде четырех ветвей возбуждения, отвечающих нормальным модам самосогласованной прецессии намагниченностей подрешеток, и непрерывного спектра сопутствующих этим модам нутаций намагниченностей полностью соответствует квантовомеханическим расчетам и позволяет дать феноменологическую трактовку макроскопических квантовых эффектов, ранее многократно наблюдавшихся в экспериментальных мессбауэровских спектрах поглощения.

DOI: 10.7868/S0370274X16030073

Недавно предложенная континуальная модель магнитной динамики ансамбля идеальных антиферромагнитных (АФМ) наночастиц в двухподрешеточном приближении, основанная на решении уравнений движения для намагниченностей подрешеток [1], продемонстрировала нетривиальный характер энергетического спектра частиц в виде четырех ветвей возбуждения, соответствующих нормальным модам самосогласованной однородной прецессии векторов намагниченностей подрешеток вокруг легкой оси. Две из этих мод хорошо известны из классической теории АФМ-резонанса в нулевом внешнем магнитном поле [2]. Две другие моды имеют ферромагнитный (ФМ) характер и совершенно выпали из круга интересов исследователей. При этом наличие ветви возбуждения, соответствующей одной из ФМ-мод, с локальным минимумом энергии для векторов намагниченностей подрешеток, прецессирующих в экваториальной плоскости, фактически дает феноменологическое объяснение макроскопических квантовых эффектов, наблюдавшихся в спектрах поглощения [3] и описанных в квантовомеханической модели АФМ-наночастиц [4, 5]. Помимо этого, было показано, что учет нескомпенсированного спина в континуальной модели (так же как и в “квантовой” [5]) не меняет качественную картину этих эффектов, а сводится лишь к небольшим численным поправкам на форму спектра поглощения ансамбля АФМ-частиц [6].

Однако моды однородной прецессии являются хотя и точными, но частными решениями уравнений

движения однородных намагниченностей подрешеток, а общее решение этих уравнений должно содержать нутации на фоне однородной прецессии по аналогии с задачами о сферическом маятнике и тяжелом волчке [7]. В работах [1, 6] с учетом высоких АФМ-частот прецессии для низколежащих мод предполагалось, что высокочастотные нутации являются малыми, так что прецессия в соответствующих модах псевдооднородна. Общее решение уравнений движения в этом случае ранее не рассматривалось. Учет нутаций намагниченностей подрешеток и анализ их роли в формировании мессбауэровских спектров АФМ-наночастиц являются основными задачами настоящей работы.

По аналогии с [1] начнем анализ с простейшего выражения для плотности энергии идеальной АФМ-частицы с константой обменного взаимодействия $J > 0$, константой аксиальной магнитной анизотропии K в приближении двух подрешеток с намагниченностями \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 ($M_1 = M_2 = M_0$):

$$E = J\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 - \frac{K}{2}(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2), \quad (1)$$

где θ_1 и θ_2 – углы между векторами \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 и легкой осью. В соответствии с классической теорией АФМ-резонанса [2] феноменологическое рассмотрение можно провести в рамках предположения о том, что магнитный момент каждой i -й подрешетки прецессирует во внутреннем эффективном поле:

$$\mathbf{H}_i^{(\text{eff})} = -\partial E / \partial \mathbf{M}_i, \quad (2)$$

¹⁾e-mail: chuev@ftian.ru

а уравнения движения для намагниченностей можно представить в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{M}}_i = -\gamma[\mathbf{M}_i, \mathbf{H}_i^{(\text{eff})}], \quad (3)$$

где γ – магнитомеханическое отношение. В нашем случае эффективные магнитные поля, действующие на каждую из подрешеток, определяются выражениями

$$\mathbf{H}_1^{(\text{eff})} = -H_E \mathbf{m}_2 + H_A m_{1z} \mathbf{n}_z, \quad (4a)$$

$$\mathbf{H}_2^{(\text{eff})} = -H_E \mathbf{m}_1 + H_A m_{2z} \mathbf{n}_z, \quad (4b)$$

где введены эффективные значения обменного поля, $H_E = JM_0$, и поля анизотропии, $H_A = K/M_0$ [2], а также нормированные значения намагниченностей подрешеток $\mathbf{m}_i = \mathbf{M}_i/M_0$ и их проекций $m_{iz} = M_{iz}/M_0$ на легкую ось с единичным вектором \mathbf{n}_z .

Аксиально-симметричными решениями уравнений движения (3) являются четыре нормальные моды самосогласованной и однородной прецессии векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 вокруг легкой оси, заданные параметрическими соотношениями между проекциями векторов m_{1z} и m_{2z} [1]:

$$m_{2z}^{(1,2)} = \frac{-m_{1z} \pm (1 - m_{1z}^2)(1 + k)\sqrt{k(2 + k)}}{1 + (1 - m_{1z}^2)k(2 + k)}, \quad (5a)$$

$$m_{2z}^{(3,4)} = m_{1z} \equiv m_z, \quad (5b)$$

где $k = K/A$, $A = JM_0^2$ – плотность энергии обменного взаимодействия. При этом для трех первых мод поперечные компоненты \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 имеют противоположные знаки (см. рис. 1a), а для четвертой моды вектора \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 совпадают.

Если оставаться в рамках общепринятого предположения о малости энергии анизотропии по сравнению с обменной энергией, т.е. если

$$k \ll 1, \quad (6)$$

то для двух низколежащих ветвей возбуждения, соответствующих модам 1 и 2, можно записать приближенные выражения для частот прецессии векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 в этих модах [1]:

$$\omega_{1,2} \approx \pm\omega_0[1 - k(1 - m_{z1}^2)], \quad (7a)$$

где $\omega_0 = \gamma\sqrt{H_A(2H_E + H_A)}$. Эти моды, заданные соотношением (5a), соответствуют классической теории АФМ-резонанса в нулевом внешнем магнитном поле [2]. Мода 3 характеризуется “обменной” частотой прецессии $\omega_E = \gamma H_E$:

$$\omega_3 = -\omega_E(2 - k)m_z, \quad (7b)$$

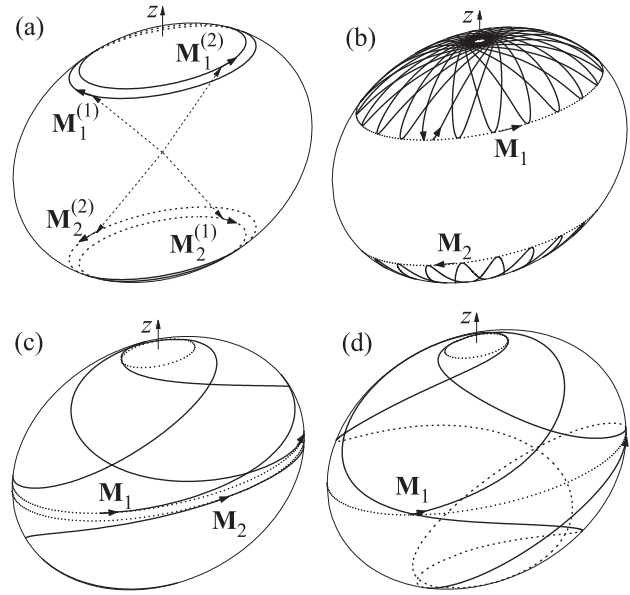


Рис. 1. Бездиссипативные траектории движения векторов намагниченностей подрешеток \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 идеальной АФМ-частицы. (a) – Две нормальные моды прецессии с $m = \pm m_{\text{max}}(E)$. (b) – Нутации с $m = 0$ для $E' = E/A = -1.003$. Нутации векторов намагниченностей для $E' = -0.999$ и значений $m = 0.045$ (c) и 0.04 (d). На панелях b–d изображены начальные 23, 2 и 2 нутации, соответственно. Точками показаны минимальные и максимальные значения проекций m_{1z} и m_{2z} во время нутаций. Здесь и далее расчеты выполнены для $k = K/A = 0.01$

а мода 4 – более низкой ФМ-частотой $\omega_A = \gamma H_A$:

$$\omega_4 = \omega_A m_z. \quad (7c)$$

Начиная с середины прошлого века и вплоть до настоящего времени моды 3 и 4 выпали из круга интересов исследователей прежде всего из-за используемого в теории АФМ-резонанса приближения малых отклонений векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 от легкой оси, а также потому, что эти моды лежат существенно выше по энергии по сравнению с модами 1 и 2. Однако, как показано в [1], само наличие ветви возбуждения, соответствующей моде 3, приводит к появлению в мессбауэровском спектре выше некоторой температуры одиночной линии (или квадрупольного дублета) с малым значением сверхтонкого магнитного поля на ядре H_{hf} на фоне хорошо разрешенной магнитной сверхтонкой структуры (моды 1 и 2) с большой величиной H_{hf} . Это обстоятельство фактически дает феноменологическое объяснение макроскопических квантовых эффектов [4, 5], наблюдавшихся ранее в спектрах поглощения [3].

Описанные выше моды однородной прецессии намагниченностей подрешеток являются частными решениями уравнений движения (3). Общие же решения описываются системой дифференциальных уравнений для продольных и поперечных компонент намагниченностей АФМ-частиц. В частности, для продольных компонент имеем

$$dm_{1z} = -dm_{2z} = \pm \omega_E \sqrt{F(m_{1z}, m_{2z}, E)} dt, \quad (8a)$$

$$F(m_{1z}, m_{2z}, E) = 1 - E'^2 - (1 + kE')(m_{1z}^2 + m_{2z}^2) + 2m_{1z}m_{2z} \left[E' + \frac{k}{2}(m_{1z}^2 + m_{2z}^2) \right] - \frac{k^2}{4}(m_{1z}^2 + m_{2z}^2)^2, \quad (8b)$$

где $E' = E/A$. В полном соответствии с аксиальной симметрией задачи из выражения (8a) следует, что наряду с энергией интегралом движения является проекция суммарного магнитного момента на ось анизотропии

$$m = m_{1z} + m_{2z}. \quad (9)$$

В этом случае уравнения (8) удобнее переписать для продольной компоненты вектора антиферромагнетизма

$$l_z = m_{1z} - m_{2z}. \quad (10)$$

В результате замены переменных получаем уравнение

$$dl_z = \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{F(l_z, E', m)} dt = \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{[l_z^2 - l_1(E', m)][l_2(E', m) - l_z^2]} dt, \quad (11)$$

где, опуская обозначения функциональной зависимости от E' и m ,

$$l_{1,2} = l_0 \pm \Delta l = -4 \frac{1 + E'(1 + k) + k^2 m^2 / 4 \pm \sqrt{s}}{k(2 + k)}, \quad (12a)$$

$$s = (1 + k + E')^2 + k^2 m^4 / 4 - km^2(1 - E'). \quad (12b)$$

Уравнение (11) определяет временную зависимость и диапазон изменений продольных компонент намагниченностей подрешеток. Последние, в свою очередь, определяют тип и характеристики траекторий движения векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 в виде нутаций [7], т.е. самосогласованной прецессии этих векторов вокруг оси z с одновременными колебаниями по полярному углу в диапазоне, заданном параметрами l_1 и l_2 .

Результатирующая траектория движения для заданных значений E и m определяется также параметрической связью продольных и поперечных компонент намагниченностей. Например, изменение азимутального угла вектора \mathbf{M}_1

$$d\varphi_1 =$$

$$= \frac{2\omega_E}{\omega_0} \left[\frac{m_{1z}}{1 - m_{1z}^2} \left(E' - \frac{(1 - k)m^2 - (1 + k)l_z^2}{4} \right) - m + (1 + k)m_{1z} \right] \frac{dl_z}{\sqrt{F(l_z, E', m)}}, \quad (13)$$

а самосогласованные траектории движения векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 задаются выражениями (1), (9)–(13). Примеры расчетов таких траекторий приведены на рис. 1b–d, где показано несколько начальных нутаций в траекториях движения концов векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 по поверхности сферы радиуса M_0 . В общем случае эти траектории движения не замкнуты, т.е. каждый из векторов бесконечное число раз проходит через минимальные и максимальные значения проекций m_{1z} и m_{2z} [7]. Подробный анализ функциональной зависимости характера нутаций от E и m в АФМ-частицах выходит за рамки настоящей работы и будет сделан позднее. Однако поскольку период высокочастотных нутаций существенно меньше характерных времен в большинстве экспериментальных методик для исследования АФМ-частиц (в частности, в мессбауэровской спектроскопии, не говоря о кривых намагничивания), нас будут интересовать средние (по периоду нутаций) значения продольных компонент намагниченностей подрешеток, заданные уравнением (11). К подробному анализу последнего мы и перейдем.

При выполнении условия (6) для заданного значения энергии область допустимых значений m будет определяться условием положительности параметра s :

$$m^2 \leq m_{\max}^2(E) \equiv 2 \frac{1 - E' - \sqrt{-(2 + k)(k + 2E')}}{k} \quad (14)$$

(см. рис. 2). В свою очередь, согласно (11), для заданных значений E и m область допустимых значений l_z будет определяться условием

$$l_1 \leq l_z^2 \leq l_2. \quad (15)$$

Как видно из выражений (12) и рис. 2, характер нутаций носит различный характер в трех диапазонах энергии.

При $E' = E/A \leq -1$ минимальные и максимальные (по модулю) значения l_z для заданной энергии, а значит, и максимальный размах нутаций по полярному углу реализуются при $m = 0$ (рис. 1b и 2):

$$l_{\min}(E) = \sqrt{l_1(E', 0)}, \quad (16a)$$

$$l_{\max}(E) = \sqrt{l_2(E', 0)}. \quad (16b)$$

С ростом абсолютного значения m размах нутаций для заданного значения энергии уменьшается вплоть

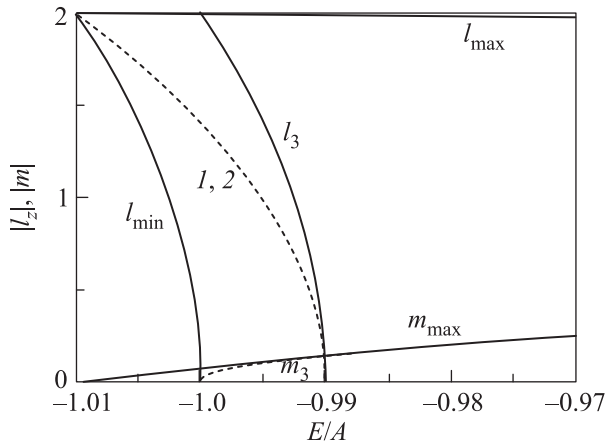


Рис. 2. Области допустимых значений проекций суммарного магнитного момента m и вектора антиферромагнетизма l_z на ось анизотропии для идеальных АФМ-частиц (см. текст). Пунктирные линии 1, 2 соответствуют нормальным модам однородной прецессии магнитных моментов подрешеток с $m = \pm m_{\max}(E)$

до максимальных (по модулю) значений проекции суммарного момента, $m = \pm m_{\max}(E)$, когда $s = 0$, $l_1 = l_2 = l_0$, и реализуются моды однородной прецессии намагниченностей 1 и 2. В соответствии с выражениями (9)–(11) в этой области энергий средние (за период нутаций $T_{E',m}$) значения продольных компонент намагниченностей подрешеток для заданных E и m определяются средним значением $\langle l_z \rangle_{T_{E',m}}$:

$$m_{1,2z}(E, m) = \frac{m}{2} \pm \langle l_z \rangle_{T_{E',m}} = \frac{m}{2} \pm \frac{\pi \sqrt{l_2}}{4I_1(\sqrt{l_1/l_2})}, \quad (17a)$$

где введен полный эллиптический интеграл первого рода

$$I_1(\gamma) = \int_{\gamma}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \gamma^2)(1 - x^2)}}. \quad (17b)$$

Теперь рассмотрим следующий диапазон энергий, в котором сосуществуют три моды однородной прецессии намагниченностей подрешеток (см. рис. 2 в [1]):

$$-1 \leq E' \leq E'_b{}^{(1,3)} = E'_b{}^{(2,3)} \equiv -1 + k \frac{2-k}{2+k}. \quad (18)$$

Здесь $E'_b{}^{(1,3)}$ (или $E'_b{}^{(2,3)}$) соответствует точкам ветвления, в которых направления векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 для ветвей возбуждения 1 и 3 (или 2 и 3) одинаковы (см. выражение (18b) в [1]). В этом случае могут реализоваться две возможные ситуации. Для заданного значения E' всегда найдется значение

$$m = \pm m_3(E) \equiv \pm 2 \sqrt{\frac{1+E'}{2-k}}, \quad (19)$$

которое соответствует моде однородной прецессии 3. При этом $l_1[E, m_3(E)] = 0$. Тогда при $m_3(E) \leq |m| \leq m_{\max}(E)$ реализуется, описанная выше ситуация (для $E' \leq -1$), в которой формулы (16) и (17) верны (см. рис. 1c). Другая ситуация имеет место при $0 \leq |m| \leq m_3(E)$, когда $l_1(E, m) < 0$ и в соответствии с (11) нутации становятся симметричными относительно смены знака l_z в интервале

$$-\sqrt{l_2(E, m)} \leq l_z \leq \sqrt{l_2(E, m)} \quad (20)$$

(см. рис. 1d). Тогда $\langle l_z \rangle_{T_{E',m}} = 0$ и

$$m_{1,2z}(E, m) = \frac{m}{2}. \quad (21)$$

На рис. 2 области, в которых реализуются эти две ситуации, разделены кривой l_3 .

И наконец, в третьем диапазоне энергий, $E'_b{}^{(1,3)} \leq E' \leq -k/2$ (здесь верхний предел нужен для формального соблюдения условия (14), хотя энергии такого порядка при выполнении условия (6) достижимы только при нереально высоких температурах), область возможных значений m в отличие от (14) ограничена значением проекции полного момента для моды однородной прецессии 3:

$$|m| \leq m_3(E), \quad (22)$$

нутации всегда симметричны по знаку l_z с размахом (20), а средние значения проекций намагниченностей подрешеток определяются формулой (21).

Отметим, что три низколежащие ветви возбуждения, отвечающие модам 1, 2 и 3, и сопутствующий им непрерывный спектр возбуждений с $|m| < m_{\max}(E)$ полностью соответствуют слаборасщепленным дублетам низколежащих уровней энергетического спектра и делокализованным возбужденным состояниям вблизи макроскопического энергетического барьера ($E < -A$) в квантовомеханических расчетах для АФМ-частиц (см. схемы расщепления энергетических уровней для достаточно больших значений $kS^2 \gg 1$ параметра скейлинга в [14]).

Теперь рассмотрим влияние нетривиальной формы энергетического спектра возбуждений идеальных АФМ-частиц (рис. 2) на физически наблюдаемые величины на примере исследования формы мессбауэровских спектров ансамбля таких частиц и ее температурной эволюции в наиболее простом, но физически оправданном предельном случае медленной (по сравнению с частотами прецессии (7) и обратным временем жизни мессбауэровского ядра в возбужденном состоянии) релаксации намагниченностей подрешеток. Этот случай часто реализуется для ФМ-

наночастиц, когда релаксационные процессы определяются амплитудой случайного магнитного поля, индуцированного диполь-дипольным взаимодействием между частицами [8–10]. Для АФМ-наночастиц данный предельный случай даже более оправдан с физической точки зрения, поскольку их результирующие магнитные моменты (в низколежащих возбужденных состояниях) намного меньше однородной намагниченности ФМ-частиц, а характерные частоты прецессии спинов (7а) и 7(б) на порядки больше. Тогда равновесное состояние ансамбля частиц при заданной температуре T описывается распределением Гиббса по “квазистационарным” состояниям (прецессионным и нутационным орбитам векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2) с заданными значениями E и m , каждое из которых характеризуется средними значениями продольных компонент намагниченностей подрешеток $\bar{m}_{1z}(E, m)$ и $\bar{m}_{2z}(E, m)$:

$$W(E, m) = C e^{-EV/k_B T}, \quad (23a)$$

где V – объем частицы, C – константа, заданная условием нормировки

$$2 \int dE W(E, m) m_{\max}(E) = 1. \quad (23b)$$

В этом случае для расчета мессбауэровских спектров ансамбля хаотически ориентированных АФМ-частиц можно воспользоваться результатами работ [8–10] для ФМ-частиц. Тогда сечение поглощения гамма-кванта с энергией $E_\gamma = \hbar\omega$ в отсутствие сверхтонкого квадрупольного взаимодействия будет определяться следующим выражением:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_a}{2} \int dE W(E) \int_0^{m_{\max}(E)} dm \times \sum_{i=1}^2 \{L[\omega, \bar{m}_{iz}(E, m)] + L[\omega, \bar{m}_{iz}(E, -m)]\}. \quad (24)$$

Здесь σ_a – эффективная толщина поглотителя, а соответствующие “квазистационарным” состояниям парциальные спектры поглощения записываются стандартным образом [8, 9]:

$$L(\omega, x) = \frac{\Gamma_0^2}{4} \sum_{\alpha} \frac{|C_{\alpha}|^2}{(\tilde{\omega} - x\omega_{\alpha})^2 + \Gamma_0^2/4}, \quad (25)$$

где $\Gamma_0 \equiv \Gamma_0/\hbar$ – ширина уровня энергии возбужденного состояния ядра в частотных единицах, $\alpha = (m_e, m_g)$ нумерует сверхтонкие переходы с проекциями спина ядра на направление сверхтонкого поля

m_e и m_g для основного (g) и возбужденного (e) состояний ядра, коэффициенты Клебша–Гордона C_{α} определяют интенсивности переходов на резонансных частотах

$$\omega_{\alpha} = \omega_e m_e - \omega_g m_g, \quad (26a)$$

$$\omega_{g,e} = -g_{g,e} \mu_N H_{hf} / \hbar \quad (26b)$$

есть ларморовские частоты прецессии спина ядра в основном и возбужденном состояниях, $g_{g,e}$ – ядерные g -факторы, μ_N – ядерный магнетон, $\tilde{\omega} = \omega - E_0/\hbar$, E_0 – энергия резонансного перехода. Как видно из выражений (24)–(26), расчет спектра поглощения фактически сводится к усреднению по распределению эффективного сверхтонкого поля для всех траекторий движения намагниченностей подрешеток, заданных значениями $\bar{m}_{1z}(E, m)$ и $\bar{m}_{2z}(E, m)$, с весовыми множителями (23), которые определяют энергетическим спектром АФМ-частиц (рис. 2).

При наличии градиента электрического поля на ядрах наряду с магнитным сверхтонким взаимодействием необходимо учитывать электрическое квадрупольное сверхтонкое взаимодействие с константой q . В этом случае расчет спектра поглощения можно провести по формулам из [10], обобщенным на случай наличия прецессионных и нутационных траекторий движения векторов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 АФМ-частиц по аналогии с выражениями (23), (24). Типичные спектры поглощения ансамбля медленно релаксирующих АФМ-наночастиц, рассчитанные по формулам (23)–(26), показаны на рис. 3. Эти расчеты фактически отражают перечисленные ранее в [1] качественные особенности энергетического спектра АФМ-частиц и их проявление в спектрах поглощения, а именно, переход от хорошо разрешенной магнитной сверхтонкой структуры при низких температурах к высокотемпературной одиночной линии (или квадрупольному дублету линий) на фоне магнитной сверхтонкой структуры с резко асимметричными линиями при промежуточных температурах. Более того, проведенное обобщение континуальной модели [1] на случай непрерывного спектра нутаций, сопутствующих нормальным модам самосогласованной прецессии намагниченностей подрешеток, позволяет полностью согласовать на количественном уровне результаты проведенных расчетов с ранее выполненными квантовомеханическими расчетами [4], включая высокотемпературный коллапс магнитной сверхтонкой структуры в одиночную линию (или квадрупольный дублет линий). В этом легко убедиться путем сравнения спектров на рис. 3 и соответствующих спектров, рассчитанных в “квантовой” модели в макроскопическом пределе ($kS^2 \gg 1$) [4].

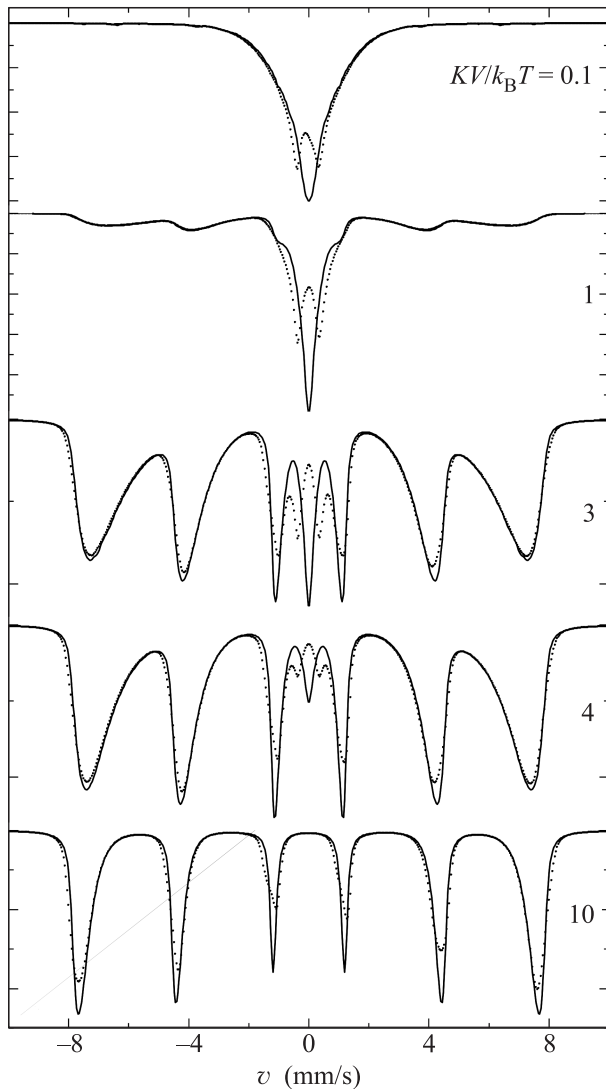


Рис. 3. Мессбауэровские спектры поглощения ядер ^{57}Fe в ансамбле медленно релаксирующих АФМ-частиц, рассчитанные в рамках модели магнитной динамики (см. текст) для разных значений эффективного энергетического барьера $KV/k_B T$ при наличии квадрупольного взаимодействия с константой $q = 0.35$ мм/с (точки) и его отсутствии ($q = 0$, сплошные линии); $H_{hf} = 500$ кЭ

В заключение отмечу, что представленные выше континуальную модель магнитной динамики и формализм для расчета мессбауэровских спектров АФМ-частиц несложно обобщить на случаи наличия нескомпенсированного спина в АФМ-частицах и ферромагнитных частиц по аналогии с [5, 6], а так-

же “неферромагнитных” наночастиц во внешнем магнитном поле. В последнем случае решение задачи позволит более аккуратно описывать не только мессбауэровские спектры в магнитном поле, но и кривые намагничивания ансамбля неферромагнитных частиц. С другой стороны, для количественного описания всей совокупности экспериментальных спектров АФМ-частиц необходимо разработать модель магнитной динамики в условиях непрерывного релаксационного процесса, которая должна отражать не только нетривиальный характер спектра возбуждений таких частиц (рис. 2), но и переходы между “квазистационарными” состояниями с заданными значениями E и m .

Выражаю благодарность РФФИ за финансовую поддержку этой работы.

1. М. А. Чуев, Письма в ЖЭТФ **99**, 319 (2014).
2. C. Kittel, Phys. Rev. **82**, 565 (1951); F. Kiffer and C. Kittel, Phys. Rev. **85**, 329 (1952).
3. W. Kündig, H. Bömmel, G. Constabaris, and R.H. Lindquist, Phys. Rev. **142**, 327 (1966); I.P. Suzdalev, V.K. Buravtsev, V.K. Imshennik, and Yu.V. Maksimov, Z. Phys. D **37**, 55 (1996); F. Bødker, M.F. Hansen, C.B. Koch, K. Lefmann, and S. Mørup, Phys. Rev. B **61**, 6826 (2000); И. П. Суздаев, Ю. В. Максимов, В. К. Имшенник, С. В. Новичихин, В. В. Матвеев, Е. А. Гудилин, О. В. Петрова, Ю. Д. Третьяков, М. А. Чуев, Российские нанотехнологии **4**, 102 (2009); L. Bordonali, Y. Furukawa, M. Kraken, F. J. Litterst, C. Sangregorio, M.F. Casula, and A. Lascialfari, Phys. Rev. B **85**, 174426 (2012).
4. М. А. Чуев, Письма в ЖЭТФ **95**, 323 (2012); М. А. Chuev, Proc. SPIE **8700**, 0F (2012); Hyperfine Interact. **226**, 111 (2014).
5. М. А. Чуев, Доклады АН **447**, 22 (2012).
6. М. А. Чуев, Изв. РАН. Сер. физ. **79**, 1074 (2015).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, Наука, М. (1974).
8. M. A. Chuev and J. Hesse, in *Magnetic Properties of solids*, ed. by K. B. Tamayo, Nova Science Publishers, N.Y. (2009).
9. М. А. Чуев, В. М. Черепанов, М. А. Поликарпов, Письма в ЖЭТФ **92**, 21 (2010).
10. М. А. Чуев, Письма в ЖЭТФ **94**, 312 (2011); М. А. Chuev, J. Phys.: Cond. Mat. **23**, 426003 (2011).