

# Стабилизация лавинообразных процессов на динамических сетях

Н. Е. Савицкая<sup>1)</sup>

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”,  
 Петербургский институт ядерной физики им. Константинова РАН, 188300, Гатчина, Россия

Поступила в редакцию 27 октября 2015 г.

После переработки 3 декабря 2015 г.

Изучается вопрос о стабилизации лавин на динамических сетях. Динамические сети – это сети, структура связей в которых меняется со временем благодаря наличию у каждого узла собственной “активности”, определяющей вероятность установления связей с другими узлами в единицу времени. Рассмотрен практически интересный случай, когда времена существования связей в сети равны временам развития лавины. Построена новая математическая модель системы с лавинообразной динамикой, учитывающая изменения сети, на которой развиваются лавины. В качестве динамической сети в нашей модели мы рассмотрели квадратную решетку с изменяющейся структурой связей. Лавинообразные процессы на ней моделировались с помощью модифицированного алгоритма абелевой модели кучи песка (АМКП), а также модели кучи песка с фиксированной энергией (КПФЭ). Показано, что лавинообразные процессы на исследованной динамической решетке являются более стабильными в смысле возникновения катастрофических событий по сравнению со случаем статической решетки. Это выражается, в частности, в уменьшении максимального размера лавины в АМКП на динамической решетке по сравнению с таковым на статической. Для КПФЭ показано, что в отличие от случая статической решетки, где лавинообразный процесс рано или поздно становится бесконечным во времени, на динамической решетке всегда возможно существование конечных во времени лавин.

DOI: 10.7868/S0370274X16030139

Лавины, или цепные реакции, запускаемые внешним возмущением, являются очень распространенным типом динамики сложных систем, состоящих из большого числа взаимодействующих между собой элементов. Лавинообразный характер имеют такие, казалось бы, далекие друг от друга по своей природе явления, как землетрясения [1], динамика магнитного потока в дискретных сверхпроводниках [2], изменения на финансовых рынках [3], лавины поломок на взаимосвязанных сетях [4], примером которых могут служить блэкауты, и многие другие процессы. Лавины могут быть как малых размеров, так и гигантские, охватывающие всю систему. Последние чаще всего рассматриваются как катастрофические для системы события. Поэтому вопрос о стабилизации динамики системы, т.е. о возможности уменьшения частоты возникновения и сокращения максимального размера лавин, всегда актуален.

В настоящей работе впервые рассмотрена проблема стабилизации лавинообразных процессов в случае, когда они развиваются на сети, структура связей в которой меняется со временем, причем времена существования связей в сети равны длитель-

ности возникающих в системе лавин. Такая ситуация представляет практический интерес, поскольку довольно часто реализуется в социальных системах, например при передаче заболеваний контактным или воздушно-капельным путем, при распространении информации в социальных сетях и в ряде других случаев [5].

Для исследования подобных процессов в нашей работе мы построим математическую модель системы с лавинообразной динамикой, учитывающую изменения структуры сети, на которой развиваются лавины.

При рассмотрении динамических процессов на сети, структура которой меняется со временем, ключевую роль играет соотношение времени существования связей  $\Delta t_{\text{net}}$  и характерного времени развития происходящего на ней динамического процесса  $\Delta t_{\text{process}}$ . В случае, когда  $\Delta t_{\text{net}} \approx \Delta t_{\text{process}}$ , изменения структуры сети существенно влияют на характер протекающего на ней динамического процесса [5]. В нашей работе для изучения этого влияния мы будем моделировать динамику сети, взяв за основу модель, предложенную в [6], основным моментом при построении которой является введение для каждого узла понятия активности. “Активность” определялась ав-

<sup>1)</sup>e-mail: savitska@inbox.ru

торами как вероятность данному узлу установить заданное число связей с другими узлами сети в единицу времени. При этом, как было показано в [6], основной характеристикой, определяющей структуру сети, является функция распределения “активностей” узлов  $F_a$ , которая не меняется на протяжении всей эволюции сети. В нашей работе мы будем рассматривать простейший вариант динамической сети - двумерную динамическую решетку.

Для моделирования лавинообразной динамики на решетке мы воспользуемся моделями “кучи песка” [7]. Такой выбор продиктован их простотой и при этом широкими возможностями таких моделей, которые вполне адекватно описывают различные физические процессы [8]. В нашей работе мы воспользуемся алгоритмами абелевой модели кучи песка (АМКП) [9] и модели кучи песка с фиксированной энергией (КПФЭ) [10], модифицируя их для случая динамической решетки. В результате мы получим новую модель системы с лавинообразной динамикой, учитывающую изменения решетки, на которой развиваются лавины.

Нашей основной целью было, используя построенную модель, показать, что лавинообразные процессы на динамической решетке более стабильны по сравнению с аналогичными процессами на статической решетке. Кроме того, мы продемонстрируем, что в случае динамической решетки возможно управление динамикой системы, в частности регулирование размеров возникающих в ней лавин. Для этого мы проведем численное изучение лавинообразных процессов в построенной модели. В результате будет показано, что для абелевой модели кучи песка на динамической решетке размер максимальной лавины в системе значительно уменьшается по сравнению с таковым на статической решетке. Для случая КПФЭ мы покажем, что в отличие от случая статической решетки, где лавинообразный процесс рано или поздно становится бесконечным во времени, на динамической решетке всегда возможно существование конечных во времени лавин. Кроме того, мы продемонстрируем, что в нашей модели возможно изменение характера динамики системы, а также регулирование размеров возникающих лавин путем изменения основной характеристики решетки - функции распределения активностей ее узлов  $F_a$ .

Начнем с рассмотрения процесса построения динамической решетки. На плоскости  $(xy)$  зададим координаты  $i, j$  для  $L = 10000$  узлов. Для удобства рассмотрения мы выбрали их таким образом, чтобы они располагались в узлах воображаемой квадратной решетки размером  $N \times N$ ,  $N = 100$ . Перед началом

эволюции решетки мы определим для каждого узла величину  $a_{i,j}$ , называемую активностью. Активности  $a_{i,j}$  выбираются так, чтобы функция распределения этих величин совпала с заранее заданной функцией  $F_a$ , конкретный вид которой мы будем оговаривать особо для каждой конкретной решетки. Процесс эволюции решетки состоит из набора дискретных шагов, которые мы будем нумеровать индексом  $k$ . Физически активность  $a_{i,j}$  представляет собой вероятность для данного узла установить связи с другими узлами на каждом шаге эволюции решетки. Математически  $a_{i,j}$  выражается как отношение числа шагов эволюции решетки, на которых узел  $(i, j)$  устанавливал связи  $K_{\text{int}}$ , к полному числу шагов в эволюции решетки  $K$ .

Каждый  $k$ -й шаг эволюции решетки можно представить следующим образом. Вначале все узлы решетки не связаны между собой. Далее с вероятностью  $a_{i,j}$  каждый узел становится активным и устанавливает связи со всеми своими ближайшими соседями одновременно. При этом неважно, являлись ли соседние узлы в данный момент “активными” или “неактивными”. Совокупность активных узлов, соединенных связями со своими соседями, представляет собой подрешетку  $G_k$ . Все установившиеся связи в подрешетке  $G_k$  существуют на протяжении времени  $\Delta t_k$ , после чего аннулируются. На этом  $k$ -й шаг эволюции завершается. Затем процедура повторяется. В результате возникает подрешетка  $G_{k+1}$  и т.д. Важно отметить, что времена существования подрешеток  $\Delta t_k$  могут быть различными.

Таким образом, динамику нашей решетки можно представить как временную последовательность подрешеток  $G_k$ , каждая из которых является фрагментом полной квадратной решетки и существует на протяжении времени  $\Delta t_k$ . Так как изменения решетки происходят лишь в дискретные моменты времени, индекс “ $k$ ”, нумерующий шаги эволюции решетки, можно также трактовать как фиктивное время.

На рис.1 представлены два последовательных шага в эволюции решетки с  $N = 5$ . Изначально мы имеем набор не связанных между собой узлов с активностями  $a_{i,j}$ , распределенными согласно некоторой функции  $F_a$  (см. рис. 1а). Затем узлы с координатами  $(2, 3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 2)$  и  $(5, 4)$  становятся активными (закрытые кружочки) и устанавливают связи с ближайшими соседями, даже если те являются неактивными (открытые кружочки). Возникшая подрешетка  $G_k$  на протяжении времени  $\Delta t_k$  представляет собой два несвязанных фрагмента квадратной решетки (см. рис. 1б). Далее все связи аннулируются и процесс повторяется, но активными могут стать уже

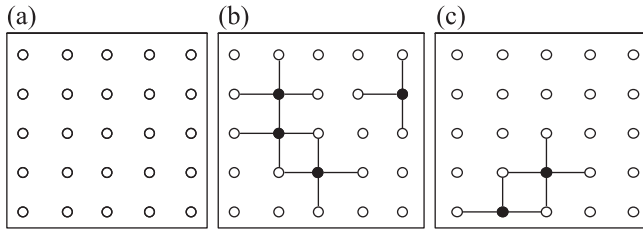


Рис. 1. Эволюция динамической решетки размером  $5 \times 5$ . (a) – Набор не связанных между собой узлов в начале  $k$ -го шага. (b) – Установление связей между узлами. Активные в данный момент узлы обозначены закрытыми кружками, неактивные – открытыми. Установленные связи существуют на протяжении промежутка времени  $\Delta t_k$ . Затем они аннулируются и решетка вновь представляет собой набор несвязанных узлов. (c) – На  $k + 1$ -м шаге активными становятся другие узлы, установившие новые связи, которые существуют на протяжении времени  $\Delta t_{k+1}$

другие узлы (см. рис. 1с, где представлена подрешетка для шага с номером  $k + 1$ ).

Теперь нам необходимо модифицировать алгоритмы, описывающие модели кучи песка, так, чтобы они учитывали описанную выше динамику решетки.

Начнем со случая АМКП. Итак, для каждого узла решетки теперь, помимо постоянной активности  $a_{i,j}$ , будет задана переменная величина  $z_{i,j}$ . Данная динамическая переменная может иметь разный физический смысл в зависимости от того, какой объект описывает наша модель. Для удобства мы будем называть  $z_{i,j}$  энергией узла. Величины  $z_{i,j}$  будут изменяться по следующим правилам.

1. Перед началом динамики, когда узлы решетки не связаны между собой, произвольно задаются значения  $z_{i,j}$  на каждом узле,  $z_{i,j} = z_{i,j}^b$ .

2. Начинается очередной шаг эволюции решетки. В момент, когда узлы решетки еще не связаны между собой (см. рис. 1а), случайно выбирается один из узлов  $z_{i,j}$ . Значение энергии на нем увеличивается на 1:  $z_{i,j} \rightarrow z_{i,j} + 1$ .

3. Каждый узел решетки с вероятностью  $a_{i,j}$  становится активным. Возникает подрешетка  $G_k$ , представляющая собой связанные кластеры, в которых имеются активные и неактивные узлы (см. рис. 1б).

4. Рассматриваются значения энергии на всех активных узлах подрешетки  $G_k$ . Если хоть в одном из них это значение превышает критическое,  $z_{i_0,j_0} \geq z_c, z_c = 4.5$ , то узел становится нестабильным, что дает начало  $k$ -й лавине. Энергия на данном узле уменьшается на величину  $\Delta z$ . Указанный процесс называется “осыпанием” (toppling). За ним следует перераспределение энергии по ближайшим соседям.

Таким образом, если  $z_{i_0,j_0} \geq z_c$ , то

$$\begin{aligned} z_{i_0,j_0} &\rightarrow z_{i_0,j_0} - \Delta z, \quad \Delta z = 4; \\ z_{i_0 \pm 1, j_0 \pm 1} &\rightarrow z_{i_0 \pm 1, j_0 \pm 1} + 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Если в подрешетке  $G_k$  сразу несколько активных узлов оказывается нестабильными, то они осыпаются одновременно. Неактивные узлы подрешетки  $G_k$  могут получать энергию при ее перераспределении, но не могут осыпаться в течение данной лавины. В случае, когда осыпается узел на границе решетки, имеющий меньше четырех ближайших соседей, одна или две единицы энергии уходят из системы. Мы будем говорить, что наша система имеет “открытую” границу.

5. Действие из п. 4 повторяется до тех пор, пока все активные узлы подрешетки  $G_k$  не станут стабильными ( $z_{i,j} < z_c$ ). На этом  $k$ -я лавина заканчивается. Пока данное условие не оказывается выполненным, изменений структуры решетки не происходит.

6. По окончании лавины все связи в решетке аннулируются, т.е. заканчивается текущий шаг эволюции решетки.

7. Далее процессы из пп. 2–6 повторяются.

Модель КПФЭ отличается от АМКП тем, что имеет “закрытую” границу, т.е. энергия не может покинуть систему и среднее по системе значение энергии  $z_0 = 1/N^2 \sum_{i,j} z_{i,j}$  остается постоянным на протяжении всей эволюции. Для реализации этого можно выбирать начальные условия в п. 1 таким образом, чтобы в системе сразу была задана необходимая величина  $z_0$ . В таком случае добавления единицы в п. 2 алгоритма не происходит. Пункты 3–7 остаются без изменений, только величина  $\Delta z = 3$  для узлов на границе решетки и  $\Delta z = 2$  для узлов в углах решетки.

Как видно из описания нашей модели, реальное время существования  $k$ -й подрешетки  $\Delta t_k$  в точности равно реальному времени развития лавины на ней. Так как лавины, возникающие в нашей системе, имеют различную длительность, и времена существования подрешеток  $\Delta t_k$  также различны. Фиктивное время  $k$  при этом может нумеровать не только шаги эволюции решетки, но и возникающие в системе лавины.

На рис. 2 показано изменение значений энергии на узлах подрешетки  $G_k$  в АМКП в течение  $k$ -й лавины. Подрешетка  $G_k$ , на которой она развивается, состоит из связанных между собой активных узлов (4, 2) и (4, 3) и ближайших к ним неактивных соседей. Активные в данной подрешетке узлы обозначены закрытыми кружками, неактивные – открытыми. Мы видим, что на активном узле (4, 2) значение энергии

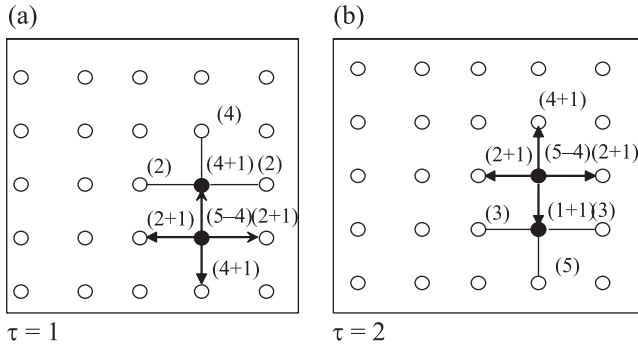


Рис. 2. Лавина на динамической сети. Активные в данной подрешетке узлы обозначены закрытыми кружками, неактивные – открытыми. Цифры в скобках обозначают изменение величины  $z_{i,j}$  на узле. Величина  $\tau$  нумерует шаги в развитии лавины. (а) – Осыпание активного узла с координатами (4, 2). Направления осыпания указаны стрелками на соответствующих связях. (б) – Осыпание активного узла (4, 3). Неактивные узлы принимают по единице энергии, но в течение данной лавины не осыпаются

$z_{4,2} = 5 > z_c$ , что в соответствии с п. 4 дает начало  $k$ -й лавине. На ее первом шаге ( $\tau = 1$ ) происходит осыпание данного узла и перераспределение энергии по соседям согласно (1). В результате энергия на узле (4, 2) уменьшается на  $\Delta z = 4$ . Одна единица энергии попадает на активный узел (4, 3), а три – на неактивные узлы, увеличивая значение энергии в них. Направления осыпания указаны стрелками на соответствующих связях. Цифры в скобках показывают изменение значений  $z_{i,j}$  в узлах. После осыпания узла (4, 2) активный узел (4, 3) становится нестабильным, что приводит ко второму шагу ( $\tau = 2$ ) в данной лавине. На нем осыпается узел (4, 3) и энергия перераспределяется по его ближайшим соседям согласно (1). В результате ни в одном активном узле энергия не превышает критического значения и  $k$ -я лавина заканчивается. Энергия на неактивных узлах (4, 1) и (4, 4) превышает критическое значение. Однако в процессе данной лавины они не осыпаются, а лишь накапливают энергию. После того как лавина заканчивается, подрешетка  $G_k$  перестает существовать. Далее возникнет решетка  $G_{k+1}$ , на которой будет развиваться следующая лавина.

Изучим теперь подробно статистику лавин в АМКП на динамической решетке. Начальные условия п. 1 нашего алгоритма мы выбрали в виде  $z_{i,j} = 0$  для всех узлов. Некоторое время от начала эволюции происходит в основном накопление энергии на узлах системы, благодаря добавлению единиц в случайно выбранные узлы. При этом среднее значение энергии в системе  $z_0$  растет со временем. Через некото-

рое время система выходит в стационарный режим, в котором среднее по времени значение  $\langle z_0 \rangle$  более не возрастает, а сама величина  $z_0$  лишь колеблется с небольшими отклонениями вокруг своего среднего значения  $\langle z_0 \rangle$ . В стационарном режиме для каждой возникающей лавины мы вычисляли ее размер по следующей формуле:

$$s_k = \sum_{\tau} \sum_{G_k} \theta[z_{i,j}^a(\tau) - z_c], \quad (2)$$

где первое суммирование идет по всем шагам лавины  $\tau$  от ее начала до окончания, второе – по узлам существующей на данный момент подрешетки  $G_k$ ,  $z_{i,j}^a$  – энергия на активном узле подрешетки  $G_k$ . Таким образом, величина  $s_k$  имеет физический смысл числа активных узлов, осыпавшихся в течение лавины. При этом осыпавшийся узел будет учтен столько раз, сколько раз он осыпался за время лавины. Так, размер лавины, представленной на рис. 2, будет равен  $s = 2$ , так же как и ее длительность в единицах  $\tau$ .

Мы наблюдали динамику системы в течение времени, за которое в ней происходило  $M \approx 10^6$  лавин, а затем рассчитывали плотность вероятности для размеров этих лавин  $\rho(s)$ . Нашей целью было изучение  $\rho(s)$  в зависимости от распределения  $a_{i,j}$  в исследуемой динамической решетке, а также сравнение результатов для динамических и статической решеток одинаковых размеров  $N \times N = 10000$ .

Мы выбрали функцию распределения активностей узлов для нашей решетки в виде

$$F_a = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \left( \frac{1}{1 - a} - 1 \right); a \in [0; 1 - \varepsilon]. \quad (3)$$

Меняя величину  $\varepsilon$ , можно менять среднее число активных узлов в подрешетках, которое равно  $A = \langle a \rangle N^2 = 10^4 (1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \ln \varepsilon)$ . Заметим, что статическую решетку можно условно рассматривать как динамическую, в которой активности всех узлов равны единице и, следовательно, для которой  $F_a = \theta(a - 1)$  и  $A = 10000$ .

Результаты расчетов представлены на рис. 3а и б. На рис. 3а приведены плотности вероятности размеров лавин для статической решетки (закрытые кружки), а также для динамических решеток с функцией распределения активностей узлов вида (3) при различных значениях  $\varepsilon$  и, следовательно, среднего числа активных узлов в подрешетках  $A$ . На рис. 3б представлены  $\rho(s)$  для динамических решеток с функцией распределения активностей узлов вида (3) и различными значениями  $A$ . Видно, что в случае динамических решеток максимальный размер возникающей лавины  $s_{\max}$  значительно меньше,

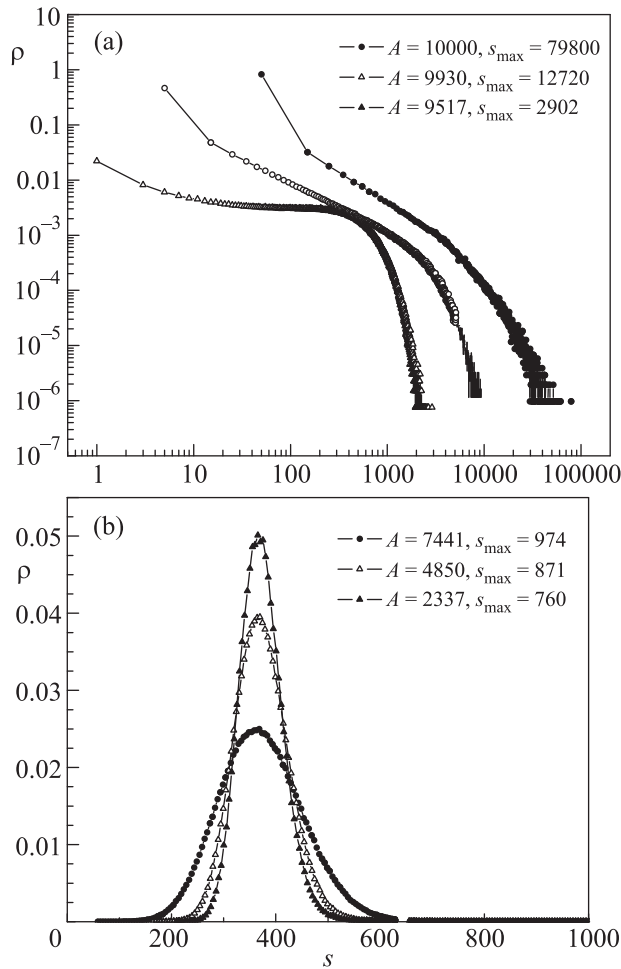


Рис. 3. Плотность вероятности размеров лавин  $\rho(s)$  на динамической решетке с функцией распределения активностей узлов  $F_a = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\frac{1}{1-a} - 1)$ ,  $a \in [0; 1 - \varepsilon]$ , при различных значениях среднего числа активных узлов в подрешетках  $A$ . (а) –  $\rho(s)$  при  $A = 9930$  (открытые кружки), при  $A = 9517$  (открытые треугольники), а также для АМКП на статической решетке (закрытые кружки). Видно, что максимальный размер лавины в случае динамических решеток всегда меньше такового в случае статической решетки. (б) –  $\rho(s)$  при различных значениях  $A$ . Видно, что меняя  $A$ , мы можем регулировать не только размеры лавин на решетке, но и характер динамики системы

чем таковой для статической решетки. Это важное наблюдение можно объяснить следующим образом. Поскольку каждая лавина на динамической решетке развивается на ограниченном кластере  $G_k$  и вовлечены в нее могут быть лишь активные на данный момент узлы, она может закончиться даже тогда, когда значение энергии на ряде узлов будет выше критического (см. рис. 2б). В статической же решетке активны все узлы в любой момент времени. В результате лавина заканчивается лишь после того, как энергия

на всех узлах решетки оказывается ниже критической. Это и приводит к увеличению ее максимального размера.

При изменении  $A$  мы наблюдаем еще один интересный эффект. При уменьшении среднего числа активных узлов в решетке меняется характер динамики системы. Если при  $A = 9930$  плотность вероятности  $\rho(s)$  имеет степенной характер,  $\rho(s) \sim s^{-\alpha}$ , то в случае  $A = 9517$  вид  $\rho(s)$  уже отклоняется от степенного, демонстрируя экспоненциальный спад  $\rho(s) \sim \exp(-s/\beta)$ .

Подобный эффект наблюдался при изучении плотности вероятности размеров лавин в АМКП при введении в систему, помимо границы, дополнительных точек стока [11]. В нашем случае причина изменения характера динамики, а следовательно, и вида  $\rho(s)$  точно такая же. При этом у нас роль дополнительных точек стока играют неактивные узлы в подрешетках, способные накапливать энергию, не осыпаясь.

Как видно из рис. 3б, при дальнейшем уменьшении среднего числа активных узлов в решетке ( $A = 7441, 4850, 2337$ ) вид плотности вероятности приближается к гауссовой функции. Это означает, что если доля активных узлов в каждой подрешетке достаточно велика, то в системе чаще всего происходят малые события и с меньшей, но все же не нулевой вероятностью – события больших масштабов. В случае же, когда число активных узлов уменьшается ( $A = 7441, 4850, 2337$ ), в системе преимущественно реализуются события среднего размера  $\langle s \rangle$ , в то время как вероятности экстремально малых и катастрофических событий примерно одинаковы и очень малы. Таким образом, можно сказать, что в АМКП на динамической решетке наблюдается “фазовый переход” по доле активных узлов в подрешетках. Данное явление может послужить предметом дальнейших исследований.

Итак, на динамической решетке у нас имеется эффективный инструмент для обеспечения стабильности лавинообразного процесса. Меняя функцию распределения активностей узлов решетки  $F_a$ , мы можем, во-первых, регулировать размеры лавин на ней, а во-вторых, изменять характер динамики системы.

Перейдем теперь к рассмотрению КПФЭ, т.е. системы с закрытой границей. Напомним, что специфика таких систем заключается в том, что энергия не может покинуть систему. Как следствие на статических решетках при определенном пороговом значении средней величины энергии в системе возникает бесконечная лавина [10], т.е. каскад осыпаний и перераспределений никогда не прекращается. Как было

показано ранее [12], это пороговое значение средней энергии зависит, в частности, от заданных в системе начальных условий.

Начнем изучение КПФЭ на динамической решетке с вопроса о том, существует ли для этого случая пороговое значение средней величины энергии в системе, после которого возникает бесконечная лавина. В качестве функции распределения активностей при построении решетки возьмем выражение (3) при  $\varepsilon = 0.001$  и, следовательно,  $A = 9930$ . Моделирование проводилось согласно описанному выше алгоритму, при уже упомянутых изменениях.

В качестве начальных условий в п. 1 мы задавали случайные вещественные значения для всех  $z_{i,j}$  в интервале от нуля до некоторой величины  $Z > z_c$ . Очевидно, что при  $Z < z_c$  лавин в системе возникать не будет. Для каждого значения  $Z$  вычислялось среднее значение энергии в системе  $z_0 = 1/N^2 \sum_{i,j} z_{i,j}$ . Величина  $z_0$  изменялась в пределах [2, 25]. Мы рассматривали динамику на решетке в течение  $M \sim 10^6$  лавин.

В результате оказалось, что существует некоторое значение  $z_0 = z_{tr} = 3.1473$ . При  $z_0 < z_{tr}$  лавины в системе через некоторое время прекращаются и  $z_{i,j}$  оказываются распределены таким образом, что все  $z_{i,j} < z_c$ . В случае же  $z_0 \geq z_{tr}$  лавины в системе существуют на протяжении всего времени наблюдения. Однако в отличие от случая статической решетки они конечны. При увеличении  $z_0$  увеличивается и средний размер лавины. Вместе с тем бесконечной лавины в системе мы не наблюдали ни при каком  $z_0$ . Для сравнения отметим, что пороговое значение  $z_{tr}$  для статической решетки, такое, что при  $z_0 > z_{tr}$  в системе возникает бесконечная лавина, для различных граничных условий и различных размеров решетки находится в следующих пределах:  $3.1 < z_{tr} < 3.2$  [12].

Для иллюстрации на рис. 4 приведена зависимость размера лавины от фиктивного времени (порядкового номера)  $k$  для динамической решетки с активностями узлов, распределенными согласно (3) при  $A = 9930$ , для различных значений  $z_0$ . Видно, что при  $z_0 < z_{tr}$  лавины в системе прекращаются тем быстрее, чем меньше величина  $z_0$ . В случае же  $z_0 \geq z_{tr}$  лавины существуют на протяжении всего времени наблюдения, причем размер их увеличивается с увеличением  $z_0$ . Однако, все эти лавины конечны. Мы наблюдали, что данный эффект сохраняется вплоть до значения  $z_0 = 25$ .

Полученный результат демонстрирует основное отличие случая динамической решетки от ситуации на статической решетке и опять-таки говорит о том,

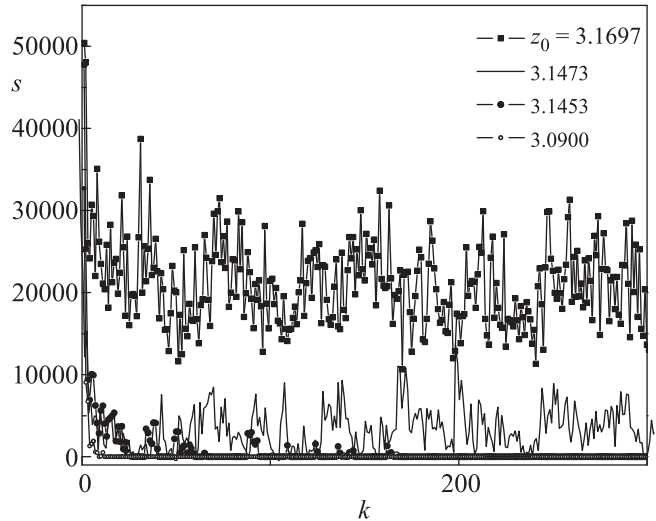


Рис. 4. Зависимость  $s(k)$  для различных значений  $z_0$ . При  $z_0 < z_{tr} = 3.1473$  лавины в системе прекращаются тем быстрее, чем меньше величина  $z_0$ . В случае же  $z_0 \geq z_{tr}$  лавины существуют на протяжении всего времени наблюдения, причем размер их увеличивается с увеличением  $z_0$ . Однако все эти лавины конечны

что динамика в структуре связей решетки стабилизирует лавинообразные процессы на ней, не позволяя возникнуть катастрофическому событию – бесконечной лавине.

Данное явление объясняется тем, что неактивные в течение лавины узлы решетки могут эффективно заменять открытую границу, срабатывая как ловушки для избытка энергии. В качестве иллюстрации этого объяснения на рис. 5 представлены значения  $z_{i,j}$  на решетке после прохождения очередной лавины и значения их активностей  $a_{i,j}$ . Видно, что имеются узлы, значение  $z_{i,j}$  в которых существенно превышает  $z_c = 4.5$ . Однако благодаря тому, что активность этих узлов низка (см. рис. 5b), они осыпаются довольно редко, аккумулируя на себе избыточную энергию. Например, в данном случае  $z_{36,4} = 10.58$ , а  $a_{36,4} = 0.05$ .

Далее мы рассмотрели динамические решетки с функцией распределения активностей (3) при различных значениях  $A$ . В результате было установлено, что для всех рассмотренных значений  $A$  ( $A = 9517, 7441, 4850, 3347$ ) существует пороговое значение  $z_{tr}$ . Более того, оно одинаково для всех рассмотренных случаев  $z_{tr} = 3.1473$ . Таким образом, можно сказать, что наш результат косвенно подтверждает вывод авторов [12] о том, что именно начальные условия определяют величину  $z_{tr}$ .

Подводя итог, необходимо отметить следующие важные результаты, полученные в настоящей работе.

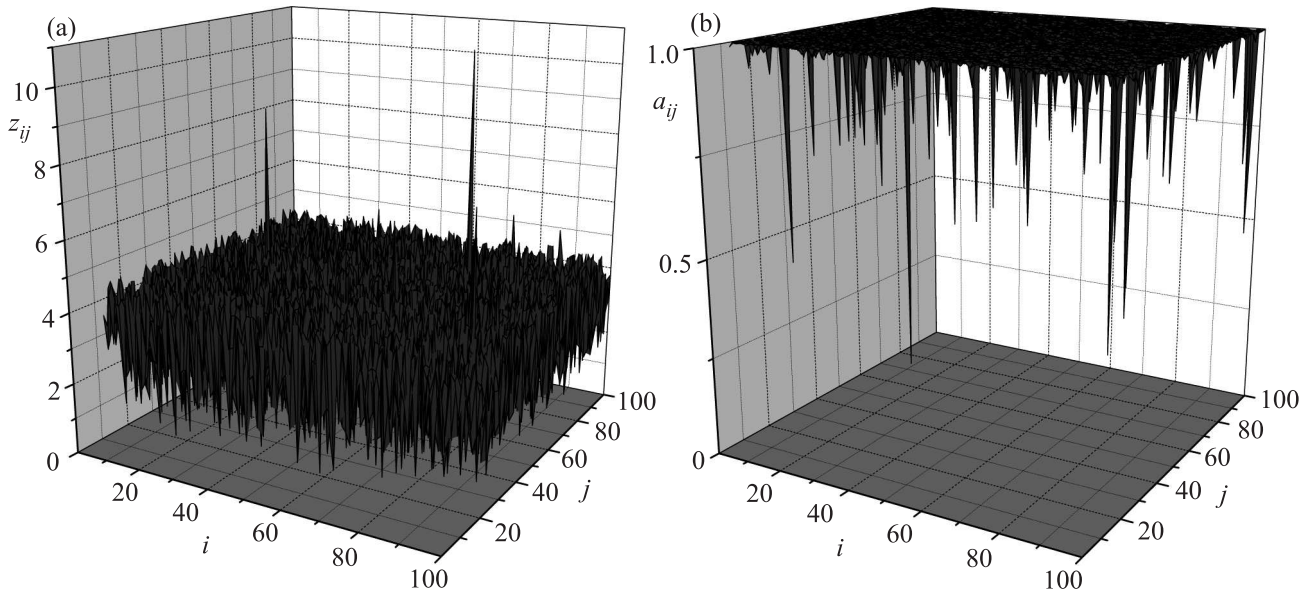


Рис. 5. Значения  $z_{i,j}$  на решетке после прохождения очередной лавины (а) и значения их активностей  $a_{i,j}$  (б). В решетке всегда существуют узлы, значение  $z_{i,j}$  в которых существенно превышает  $z_c$ . Однако благодаря тому, что активность этих узлов низка, они осыпаются довольно редко, аккумулируя на себе избыточную энергию

Во-первых, мы показали, что лавинообразные процессы, развивающиеся на динамической решетке, стабильнее в смысле возникновения катастрофических событий, чем в случае развития на статической решетке. Так, для АМКП динамика решетки приводит к уменьшению максимального размера возникающих лавин. В случае же модели КПФЭ на динамической решетке всегда возможно существование конечных лавин, что не может быть реализовано в случае статической решетки.

Во-вторых, на динамической решетке возможно регулирование максимального размера лавины и характера динамики путем изменения функции распределения активностей ее узлов  $F_a$ .

И наконец, рассматривая модель типа кучи песка на динамической решетке, мы получили новую, более богатую и интересную по своим свойствам модель системы с лавинообразной динамикой, которая требует дальнейших исследований.

Среди задач, возникающих для построенной модели, можно назвать следующие: исследование системы в случае, когда время существования связей в решетке  $\Delta t_k$  равно времени изменения величины  $z_{i,j}$ , т.е. когда решетка может меняться не только между лавинами, но и в процессе их развития; изучение динамики системы для различных  $F_a$ , отличных от функции (3); исследование системы с закрытыми граничными условиями при больших значениях  $z_0$ ; рассмотрение нашей модели не на динамической ре-

шетке, а на сложной динамической сети, что сделает модель более реалистичной.

Также необходимо отметить возможность применения нашей модели для описания реальных процессов. В качестве примера можно рассмотреть процесс принятия решения группой трейдеров на рынке ценных бумаг. Ранее в работах [3, 13] было показано, что введение в такую систему “случайных” агентов (трейдеров), всегда принимающих случайные решения, позволяет не только получить достаточно реалистичную картину изменений основных биржевых индексов, но и, варьируя число “случайных” трейдеров, уменьшить размеры возникающих на рынке катастроф. Однако в [3, 13] “случайные” трейдеры были представлены определенными, фиксированными на все время процесса, группами узлов решетки. Введение же динамической решетки трейдеров сделало бы систему более реалистичной, поскольку позволило бы учесть возможность для трейдера на каждом этапе процесса участвовать или не участвовать в торгах. Эту задачу, так же как и все обозначенные выше вопросы, мы планируем рассмотреть в ходе дальнейших исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ # 14-22-00281.

1. Z. Olami, H. J. S. Feder, and K. Christensen, Phys. Rev. Lett. **68**, 1244 (1992).

2. S. L. Ginzburg, A. V. Nakin, and N. E. Savitskaya, *Physica C* **436**(1), 17 (2006).
3. A. E. Biondo, A. Pluchino, and A. Rapisarda, *Cont. Phys.* **55**(4), 318 (2014).
4. G. J. Baxter, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 248701 (2012).
5. P. Holme and J. Saramaki, *Phys. Rep.* **519**, 97 (2012).
6. N. Perra, B. Goncalves, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, *Nat. Sci. Rep.* **2**, 469 (2012).
7. P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987).
8. D. Markovic and C. Gros, *Phys. Rep.* **536**, 41 (2014).
9. D. Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1613 (1990).
10. A. Vespignani, R. Dickman, M. A. Munoz, and S. Zapperi, *Phys. Rev. E* **62**, 4564 (2000).
11. B. Tadich, U. Novak, K. D. Uzadel, S. Padlewsky, and R. Ramaswamy, *Phys. Rev. A* **45**(12), 8536 (1992).
12. V. S. Poghosyan, V. B. Priezzhev, and P. Ruelle, *Phys Rev E* **84**, 066119 (2011).
13. A. E. Biondo, A. Pluchino, A. Rapisarda, and D. Helbing, *Phys. Rev. E* **88**, 062814 (2013).