Письма в ЖЭТФ, том 103, вып. 4, с. 245 – 250 © 2016 г. 25 февраля

Квантовое излучение Вавилова–Черенкова при относительном скольжении двух прозрачных пластин

А. И. Волокитин[+*×1)], *Б. Н. Й. Перссон*[+]

[+]*Peter Grünberg Institut, Forschungszentrum Jülich, D-52425 Jülich, Germany*

[*]*Самарский государственный технический университет, 443100 Самара, Россия*

[×]*Самарский государственный аэрокосмический университет им. Королева, 443086 Самара, Россия*

Поступила в редакцию 11 декабря 2015 г.

С использованием полностью релятивистской теории исследуется квантовое излучение Вавилова–Черенкова и квантовое трение при относительном скольжении двух прозрачных пластин с показателем преломления n. Излучение возникает при скоростях, больших пороговой, $v > v_c = 2nc/(n^2 + 1)$. Вблизи пороговой скорости доминирует вклад от s-поляризованных электромагнитных волн. Однако в ультрарелятивистском случае ($v \to c$) вклады от обеих поляризаций сильно возрастают по сравнению с нерелятивистской теорией и появляется новый вклад от смешивания волн с разной поляризацией. Численные результаты дополнены аналитическими расчетами вблизи пороговой скорости и скорости света.

DOI: 10.7868/S0370274X16040020

Квантовые флуктуации электромагнитного поля проявляют себя в разнообразных областях физики. Наиболее непосредственно они проявляются в эффекте Казимира. В 1948 г. Казимир предсказал [1], что две параллельные идеально проводящие пластины, разделенные вакуумным промежутком, могут испытывать силу притяжения, значительно превышающую гравитационную силу. Единая теория сил Ван-дер-Ваальса и Казимира, между реальными плоскими параллельными пластинами, разделенными вакуумным промежутком, была разработана Лифшицем в 1955 г. [2]. В настоящее время интерес к силам Казимира значительно возрос, так как они определяют взаимодействие между наноструктурами и часто ответственны за слипание движущихся частей в малых устройствах, таких, как микро- и наноэлектромеханические системы, и могут рассматриваться как практический механизм для управления этими устройствами. За счет этого практического интереса, а также достижений в технике детектирования ультрамалых сил экспериментальные и теоретические исследования сил Казимира испытывают чрезвычайный прогресс в последние несколько лет (см. монографию [3] и ссылки в ней).

Другим проявлением флуктуаций электромагнитного поля является бесконтактное трение между движущимися друг относительно друга телами. Тепловые и квантовые флуктуации плотности тока в одном теле индуцируют плотность тока в другом. За взаимодействие Казимира–Ван-дер-Ваальса–Лифшица ответственно взаимодействие между исходной и индуцированной поляризациями. Когда тела находятся в относительном движении, индуцированный ток отстает от исходного. Это отставание и является причиной трения Казимира. В настоящее время трение Казимира активно изучается в связи с проблемой бесконтактного трения между телами при отсутствии между ними прямого механического контакта. Оно было рассмотрено в конфигурациях пластина–пластина [4–11], нейтральная частица–пластина [11–23] и нейтральная частица–черное излучение [9, 11, 24–28]. В то время как предсказания теории сил Казимира–Ван-дер-Ваальса–Лифшица были проверены во многих экспериментах [3], детектирование трения Казимира все еще является серьезной проблемой для экспериментаторов. Вместе с тем фрикционное увлечение между квантовыми ямами [29, 30] и графеновыми листами [31, 32], а также вольт-амперные характеристики графена на поверхности полярного диэлектрика SiO_2 [33] были хорошо описаны с использованием теории трения Казимира [10, 34, 35].

Квантовое трение связано с рождением возбуждений разного типа [5, 10, 11, 35]. Для прозрачных диэлектриков такими возбуждениями являются фотоны, т.е. квантовое трение в данном случае генерирует излучение, которое принято называть квантовым излучением Вавилова–Черенкова. Это излучение было

[1)]e-mail: alevolokitin@yandex.ru

предсказано Франком и Гинзбургом [36–38] (см. также [39, 40]). Оно объяснялось аномальным эффектом Доплера.

Рассмотрим две пластины, имеющие гладкие параллельные поверхности, отделенные вакуумным промежутком шириной d и движущиеся со скоростью v друг относительно друг (см. рис. 1). Введем

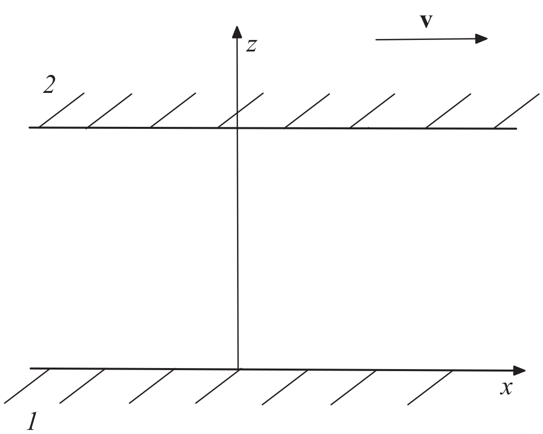

Рис. 1. Относительное скольжение со скоростью v двух полубесконечных пластин с плоскими параллельными поверхностями, отделенными вакуумным промежутком ширины d

две системы отсчета, K и K' . В системе отсчета K (K') пластина *1* (*2*) покоится, а пластина *2* (*1*) движется со скоростью v ($-v$) вдоль оси $\hat{x}$. Если в пластине *2* в системе отсчета K' возникает возбуждение с частотой $\omega'_{\alpha 2}(q')$ и волновым вектором $-\mathbf{q}' = (-q'_x, -q_y, 0)$, то в лабораторной системе отсчета K это возбуждение будет иметь частоту $\omega_{\alpha 2}(-q_x, -q_y) = \gamma[\omega'_{\alpha 2}(q') - q'_x v] = \omega'_{\alpha 2}(q')/\gamma - q_x v$, где $q'_x = (q_x + \beta k)\gamma$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$, $k = \omega_{\alpha 1}(q)/c$. Аномальный эффект Доплера соответствует ситуации, когда $\omega_{\alpha 2}(q) < 0$. В таком случае появление возбуждения в системе покоя пластины *2* K' отвечает выигрышу по энергии в лабораторной системе отсчета. Таким образом, пластина *2* может излучать фотон, переходя при этом в возбужденное состояние. Резонанс возникает, когда избыток энергии, возникающий при рождении возбуждения в пластине *2* с частотой $\omega_{\text{gain}} = -\omega_{\alpha 2}(\mathbf{q})$, рождает возбуждение в пластине *1* с частотой $\omega_{\alpha 1}(\mathbf{q}) = -\omega_{\alpha 2}$. Условие резонанса имеет вид

$$\omega_{\alpha 1}(q) = q_x v - \omega'_{\alpha 2}(q')/\gamma. \quad (1)$$

Для двух прозрачных одинаковых сред $\omega_{\alpha 1}(q) = v_0 q$ и $\omega'_{\alpha 2}(q') = v_0 q'$, где $v_0 = c/n$, n – показатель преломления среды. В этом случае условие возникновения излучения имеет вид

$$q_x v = v_0 q + \frac{v_0 q'}{\gamma} > v_0 q_x + q_x v_0 \left(1 - \frac{v v_0}{c^2}\right). \quad (2)$$

Отсюда следует, что в случае двух прозрачных пластин излучение возникает при условии

$$v > v_c = \frac{2v_0}{1 + (v_0/c)^2} = \frac{2nc}{n^2+1}. \quad (3)$$

Условие (8) было получено Пендри [4] с использованием полурелятивистской теории. При $n \gg 1$ оно сводится к нерелятивистскому результату $v > v_c = 2c/n$, полученному в работе [41] в рамках “игрушечной” модели. Таким образом, условие справедливости нерялятивистской теории имеет вид $v_0/c \ll 1$ или $n \gg 1$. Однако в области высоких частот для прозрачного диэлектрика $n \sim 1$, поэтому должна использоваться релятивистская теория.

Согласно полностью релятивистской теории [9] при нулевой температуре сила трения F_{1x}, действующая на пластину *1* (ее называют квантовым трением), и мощность излучения P_1, поглощаемого пластиной *1* в системе отсчета K, определяются формулами

$$\begin{pmatrix} F_{1x} \\ P_1 \end{pmatrix} = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_y}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dq_x}{2\pi} \int_0^{q_x v} \frac{d\omega}{2\pi} \begin{pmatrix} \hbar q_x \\ \hbar\omega \end{pmatrix} \Gamma_{12}(\omega, \mathbf{q}), \quad (4)$$

где положительная величина

$$\Gamma_{12}(\omega, \mathbf{q}) = -\frac{4}{|\Delta|^2}[(q^2 - \beta k q_x)^2 - \beta^2 k_z^2 q_y^2] \times \\ \times \{\mathrm{Im}R_{1p}[(q^2 - \beta k q_x)^2 \mathrm{Im}R'_{2p}|\Delta_{ss}|^2 + \\ + \beta^2 k_z^2 q_y^2 \mathrm{Im}R'_{2s}|\Delta_{sp}|^2] + (p \leftrightarrow s)\}e^{-2k_z d} \quad (5)$$

может быть идентифицирована как спектральная скорость фотонной эмиссии,

$$\Delta = (q^2 - \beta k q_x)^2 \Delta_{ss}\Delta_{pp} - \beta^2 k_z^2 q_y^2 \Delta_{ps}\Delta_{sp},$$

$$\Delta_{pp} = 1 - e^{-2k_z d} R_{1p} R'_{2p}, \ \Delta_{sp} = 1 + e^{-2k_z d} R_{1s} R'_{2p},$$

$k_z = \sqrt{q^2 - (\omega/c)^2}$, $R_{1p(s)} = R_{1p(s)}(\omega, q)$ – амплитуда отражения для поверхности *1* в системе отсчета K для $p(s)$-поляризованной электромагнитной волны, $R'_{2p(s)} = R_{2p(s)}(\omega', q')$ – амплитуда отражения для поверхности *2* в системе отсчета K' для $p(s)$-поляризованной электромагнитной волны, $\omega' = \gamma(\omega - q_x v)$, $q'_x = \gamma(q_x - \beta k)$, $\Delta_{ps} = \Delta_{sp}(p \leftrightarrow s)$.

Символ $(p \leftrightarrow s)$ обозначает величины, которые могут быть получены из привденных величин перестановкой индексов p и s.

Если в (4) пренебречь членами порядка β^2, то вклады от волн с p- и s-поляризацией разделяются. В этом случае формула (4) сводится к полурелятивистской формуле, использованной Пендри в работе [4]:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ P_1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{\pi^3}\int_0^\infty dq_y \int_0^\infty dq_x \int_0^{q_x v} d\omega \begin{pmatrix} \hbar q_x \\ \hbar\omega \end{pmatrix} \times \\ \times \left(\frac{\mathrm{Im}R_{1p}\mathrm{Im}R'_{2p}}{|D_{pp}|^2} + \frac{\mathrm{Im}R_{1s}\mathrm{Im}R'_{2s}}{|D_{ss}|^2}\right) e^{-2k_z d}. \quad (6)$$

Для прозрачного диэлектрика амплитуды отражения определяются формулами Френеля:

$$R_p = \frac{in^2k_z - \sqrt{n^2(\omega/c)^2 - q^2}}{in^2k_z + \sqrt{n^2(\omega/c)^2 - q^2}}, \\ R_s = \frac{ik_z - \sqrt{n^2(\omega/c)^2 - q^2}}{ik_z + \sqrt{n^2(\omega/c)^2 - q^2}}. \quad (7)$$

Мнимая часть амплитуды отражения $R_{1p(s)}$, определяемой формулой (7), отлична от нуля при условии $\omega > v_0 q > v_0 q_x$. Аналогично $\mathrm{Im}R_{2p(s)}$ отлична от нуля при условии $q_x v - \omega > v_0 q'/\gamma > v_0(q_x - \beta\omega/c)$. Оба эти условия ограничивают область интегрирования по ω интервалом

$$v_0 q_x < \omega < \frac{(v - v_0)q_x}{1 - vv_0/c^2}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что минимальная скорость v_c, при которой возникают излучение и трение, определяется уравнением (8).

Для прозрачного диэлектрика амплитуды отражения в области частот, в которой излучение и трение отличны от нуля, $|R_{s(p)}| = 1$. В таком случае можно пренебречь многократным рассеянием электромагнитных волн в вакуумной щели поверхностями диэлектриков. В этом приближении $D_{pp} \approx D_{ss} \approx \approx D_{sp} \approx D_{sp} \approx 1$,

$$\Delta \approx (q^2 - \beta k q_x)^2 - \beta^2 k_z^2 q_y^2 = \frac{(qq')^2}{\gamma^2},$$

$$(q^2 - \beta k q_x)^2[\mathrm{Im}R'_{2p}|\Delta_{ss}|^2 + \beta^2 k_z^2 q_y^2 \mathrm{Im}R'_{2p}|\Delta_{sp}|^2] \approx \\ \approx \frac{(qq')^2}{\gamma^2}\mathrm{Im}R'_{2p} + \beta^2 k_z^2 q_y^2 \mathrm{Im}(R'_{2p} + R'_{2s})$$

и

$$\Gamma_{12} = \\ = -4\left[\left(\mathrm{Im}R_{1p}\mathrm{Im}R'_{2p} + \mathrm{Im}R_{1s}\mathrm{Im}R'_{2s}\right)\left(1 + \gamma^2\beta^2\frac{k_z^2 q_y^2}{q^2 q'^2}\right) + \\ + \gamma^2\beta^2 \frac{k_z^2 q_y^2}{q^2 q'^2}\left(\mathrm{Im}R_{1p}\mathrm{Im}R'_{2s} + \mathrm{Im}R_{1s}\mathrm{Im}R'_{2p}\right)\right]. \quad (9)$$

Таким образом, релятивистские эффекты приводят не только к смешиванию волн с различной поляризацией, но и к модификации вкладов от различных поляризаций. Эти эффекты не учитывались в приближенной теории Пендри [4].

Вводя новые переменные $\omega = q_x v\xi$ и $q_y = q_x y$, интегрирование по q_x можно провести аналитически. В результате получаем

$$\begin{pmatrix} F_x \\ P_1 \end{pmatrix} = -\frac{3\hbar v}{8\pi^3 d^4}\int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} d\xi \int_0^{y_{\max}} dy \begin{pmatrix} 1 \\ v\xi \end{pmatrix} \frac{1}{\kappa_z^4} \times \\ \times\left[\left(\mathrm{Im}R_{1p}\mathrm{Im}R'_{2p} + \mathrm{Im}R_{1s}\mathrm{Im}R'_{2s}\right)\left(1 + \gamma^2\beta^2\frac{\kappa_z^2 y^2}{w^2 w'^2}\right) + \\ + \gamma^2\beta^2\frac{\kappa_z^2 y^2}{w^2 w'^2}\left(\mathrm{Im}R_{1p}\mathrm{Im}R'_{2s} + \mathrm{Im}R_{1s}\mathrm{Im}R'_{2p}\right)\right], \quad (10)$$

где $\kappa_z^2 = 1 - \beta^2\xi^2 + y^2$, $w^2 = 1 + y^2$, $w'^2 = \gamma^2(1 - - \beta^2\xi)^2 + y^2$,

$$\xi_{\min} = \frac{1}{n\beta},\ \xi_{\max} = 1 - \frac{1}{\gamma^2\beta(n-\beta)} = \frac{n\beta - 1}{\beta(n-\beta)}.$$

Вблизи пороговой скорости, $v \approx v_c$, когда $\xi_{\min} \approx \approx \xi_{\max}$ и

$$y_{\max} = \frac{n^2+1}{n\sqrt{n^2-1}}\sqrt{\frac{v - v_c}{v_0}} \ll 1,$$

интегрирование по q_y в уравнении (4) ограничено интервалом $0 < |q_y| < y_{\max} q_x \ll q_x$. В этом случае в низшем порядке по $y_{\max}$ можно пренебречь релятивистскими эффектами. Тогда сила трения определяется формулой

$$F_{1x} \approx \frac{\hbar v_0}{d^4}\left[\tilde{g_s}\left(\frac{v}{v_0}, n\right) + \tilde{g_p}\left(\frac{v}{v_0}, n\right)\right], \quad (11)$$

а радиационная передача тепла $P_1 = v_0 F_{1x}$, где

$$\tilde{g_s}\left(\frac{v}{v_0}, n\right) = \frac{\zeta(3)}{5\pi^2}\frac{n(n^2+1)^5}{(n^2-1)^5\sqrt{n^2-1}}\left(\frac{v - v_c}{v_0}\right)^{5/2}$$

и $\tilde{g}_p = \tilde{g}_s/n^4$. В нерелятивистском пределе $(n \gg 1)$

$$g_s\left(\frac{v}{v_0}\right) = \frac{\zeta(3)}{5\pi^2}\left(\frac{v - v_c}{v_0}\right)^{5/2}$$

и $g_p(v/v_0, n) = g_s(v/v_0)/n^4$.

Вблизи скорости света ($\gamma \gg 1$)

$$y_{\max} = \begin{cases} y_0 & \text{при } \xi_c < \xi < \xi_{\max}, \\ y_1 & \text{при } \xi_{\min} < \xi < \xi_c, \end{cases}$$

где

$$y_0^2 = \gamma^2[n^2\beta^2(1-\xi)^2 - (1-\beta^2\xi)^2],$$

$y_1^2 = n^2\beta^2\xi^2 - 1$, $\xi_c = \gamma/(1+\gamma) \approx 1 - 1/\gamma$. При $\gamma \gg 1$ основной вклад в интегрирование дает интервал $\xi_c < \xi < \xi_{\max}$. Вклад в силу трения от s-поляризованных волн, определяемый приближенной формулой (6), при $v \to c$ остается конечным:

$$F_{xs}^{\text{approx}} \approx \frac{3\hbar v}{4\pi^2 d^4}\frac{\sqrt{2}}{n^2-1}\ln(n+\sqrt{n^2-1}), \qquad (12)$$

и расходится как $\sim \gamma$ в полностью релятивистской теории, в которой он определяется уравнением (10):

$$F_{xs} \approx \frac{3\hbar v}{4\pi^2 d^4}\frac{\sqrt{n-1}}{2(n+1)^{3/2}}\gamma. \qquad (13)$$

Другие вклады могут быть оценены аналогичным образом.

Рис. 2 и 3 показывают зависимости силы трения между прозрачными диэлектрическими пластинами от скорости, относительного скольжения для нерелятивистской теории (рис. 2) и полностью релятивистской теории для $n = 2$ (рис. 3a) и $n = 10$ (рис. 3b). В нерелятивистской теории вклады в силу трения от s- и p-поляризованных волн разделяются. Пороговая скорость v_c для возникновения квантового излучения Вавилова–Черенкова равна $2v_0$. Трение в этой теории преимущественно определяется вкладом от волны с s-поляризацией, который зависит только от отношения v/v_0. В полностью релятивистской теории трение и излучение возникают только при скоростях выше пороговой ($v > v_c = 2nc/(n^2+1)$), которая равна $0.8c$ для $n = 2$ (рис. 3a) и $0.2c$ для $n = 10$ (рис. 3b). Рис. 3a и b также показывают результаты полурелятивистской теории для вкладов в силу трения от s-поляризованных волн (синяя линия) и p-поляризованных волн (зеленая линия), определяемых уравнением (6). В этой приближенной теории амплитуды рассеяния от поверхности движущегося диэлектрика аппроксимируются амплитудами отражения в сопутствующей системе отсчета при частотах и волновых векторах, определяемых преобразованиями Лоренца. В такой приближенной теории, в которой пренебрегается связью между волнами с разной поляризацией, смешивание поляризаций не учитывается. Кроме того, в ней не учитывается релятивистский эффект усиления вкладов для волн с разной поляризацией. Вблизи пороговой скорости смешивание волн с разной поляризацией и другие релятивистские эффекты дают малый вклад и сила трения преимущественно определяется вкладом от волн с s-поляризацией, который может быть достаточно точно определен с использованием приближенной теории. Однако в ультрарелятивистском случае ($\gamma \gg 1$) оба вклада от различных поляризаций сильно возрастают по сравнению с приближенной теорией и появляется новый вклад, связанный с поляризационным смешиванием.

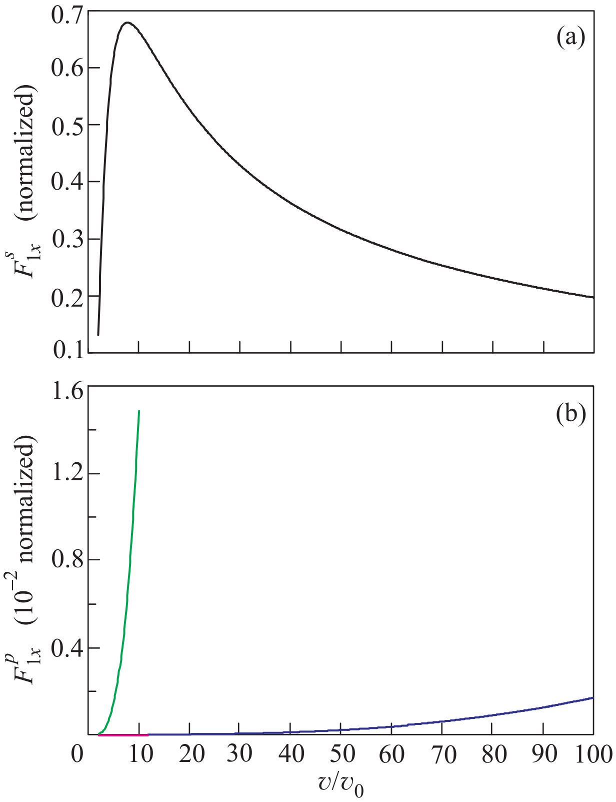

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость силы трения между двумя прозрачными диэлектрическими пластинами от скорости их относительного скольжения. Нормализующий множитель для сил $\hbar v_0/\pi^3 d^4$, $v_0 = c/n$. Приведены результаты нерелятивистской теории для вкладов от s- (a) и p-поляризованных (b) электромагнитных волн. Вклад от s-волн в нерелятивистской теории зависит только от отношения v/v_0. Вклады от p-поляризованных волн показаны для $n = 10$ (зеленая линия) и $n = 100$ (синяя линия)

Заключительные замечания. В настоящей работе с использованием полностью релятивистской теории изучалось квантовое излучение Вавилова–Черенкова при относительном скольжении двух прозрачных пластин. Это излучение возникает, когда скорость относительного скольжения превышает по-

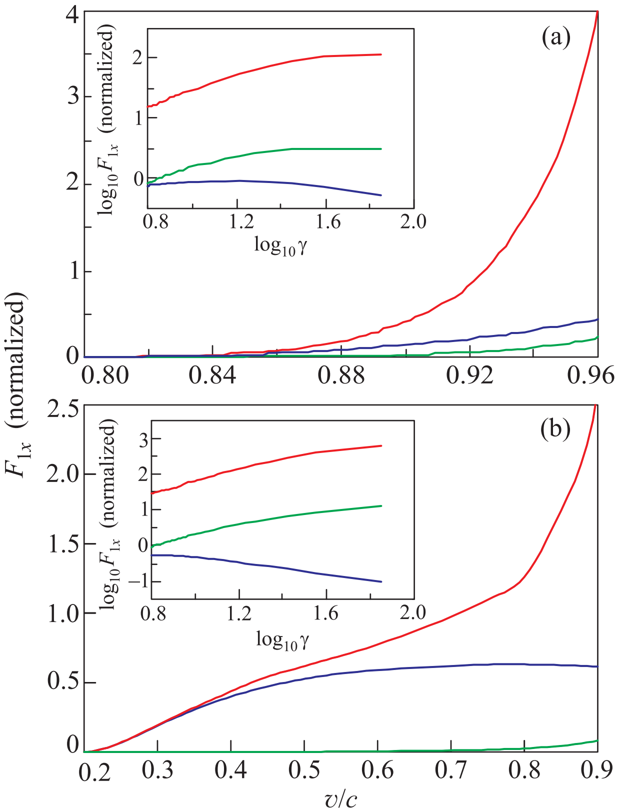

Рис. 3. (Цветной онлайн) То же самое, что и на рис. 2, но для полностью релятивистской теории. Красная линия – результаты полностью релятивистской теории для $n = 2$ (a) и $n = 10$ (b). Синяя и зеленая линии показывают раздельно вклады от s- и p-поляризованных волн соответственно, полученные с использованием приближенной формулы (6). Вставка показывает силы трения в ультрарелятивистском случае ($\gamma \gg 1$)

роговую скорость $v_c = 2nc/(n^2+1)$, где n – показатель преломления пластин. Оно приводит к квантовому трению, которое вблизи пороговой скорости $\sim (v - v_c)^{5/2}$ и определяется в основном вкладом от s-поляризованных электромагнитных волн. Однако вблизи скорости света вклады от обеих поляризаций сильно возрастают и появляется новый вклад, связанный со смешиванием поляризаций. Как показал Пендри [4], шероховатость поверхности диэлектриков также приводит к сильному увеличению квантового излучения Вавилова–Черенкова. В релятивистском случае эта проблема требует дополнительных исследований.

Работа поддержана Минобрнауки РФ в рамках программы повышения конкурентоспособности СГАУ на 2013–2020 гг. и РФФИ (грант # 14-02-00384-а).

1. H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
2. E. M. Lifshitz, ZhETF **29**, 94 (1955) [Sov. Phys. JETP **2**, 73 (1956)].
3. *Casimir Physics*, ed. by D. A. R. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, and F. da Rose, Springer, Berlin (2011).
4. J. B. Pendry, J. Mod. Opt. **45**, 2389 (1998).
5. J. B. Pendry, J. Phys.: Cond. Mat. **9**, 10301 (1997).
6. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, J. Phys.: Cond. Mat. **11**, 345 (1999).
7. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Phys. Rev. Lett. **91**, 106101 (2003).
8. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Phys. Rev. B **68**, 155420 (2003).
9. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Phys. Rev. B **78**, 155437 (2008).
10. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Phys. Rev. Lett. **106**, 094502 (2011).
11. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Rev. Mod. Phys. **79**, 1291 (2007).
12. M. S. Tomassone and A. Widom, Phys. Rev. B **56**, 4938 (1997).
13. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, Phys. Rev. B **65**, 115419 (2002).
14. G. V. Dedkov and A. A. Kyasov, Phys. Lett. A **339**, 212 (2005).
15. G. V. Dedkov and A. A. Kyasov, J. Phys.: Cond. Mat. **20**, 354006 (2008).
16. G. Barton, New J. Phys. **12**, 113045 (2010).
17. J. S. Høye and I. Brevik, Entropy **15**, 3045 (2013).
18. J. S. Høye and I. Brevik, Eur. Phys. J. D **68**, 61 (2014).
19. M. F. Maghrebi, R. Golestanian, and M. Kardar, Phys. Rev. D **87**, 025016 (2013).
20. F. Intravaia, R. O. Behunin, and D. A. R. Dalvit, Phys. Rev. A **89**, 050101(R) (2014).
21. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, New J. Phys. **16**, 118001 (2014).
22. G. Pieplow and C. Henkel, New J. Phys. **15**, 023027 (2013).
23. G. Pieplow and C. Henkel, J. Phys.: Cond. Mat. **27**, 214001 (2015).
24. V. Mkrtchian, V. A. Parsegian, R. Podgornik, and W. M. Saslow, Phys. Rev. Lett. **91**, 220801 (2003).
25. G. V. Dedkov and A. A. Kyasov, Nucl. Instrum. Meth. Phys. Res. B **268**, 599 (2010).
26. G. Lach, M. DeKieviet, and U. D. Jentschura, Phys. Rev. Lett. **108**, 043005 (2012).
27. U. D. Jentschura, G. Lach, M. De Kieviet, and K. Pachucki, Phys. Rev. Lett. **114**, 043001 (2015).
28. A. I. Volokitin, Phys. Rev. A **91**, 032505 (2015).

29. T. J. Gramila, J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **66**, 1216 (1991).
30. U. Sivan, P. M. Solomon, and H. Shtrikman, Phys. Rev. Lett. **68**, 1196 (1992).
31. S. Kim, I. Jo, J. Nah, Z. Yao, S. K. Banerjee, and E.Tutuc, Phys. Rev. B **83** 161401 (2011).
32. R. V. Gorbachev, A. K. Geim, M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, T. Tudorovskyiy, T. V. Grigorieva, A. H. MacDonald, K. Watanabe, T. Taniguchi, and L. P. Ponamarenko, Nat. Phys. **8** 896 (2012).
33. M. Freitag, M. Steiner, Y. Martin, V. Perebeinos, Z. Chen, J. C. Tsang, and P. Avouris, Nano Lett. **9**, 1883 (2009).
34. A. I. Volokitin and B. N. J. Persson, J.Phys.: Cond. Mat. **13**, 859 (2001).
35. A. I. Volokitin and B. N.J. Persson, EPL **103**, 24002 (2013).
36. I. M. Frank, J. Phys. USSR **7**, 49 (1943).
37. V. L. Ginzburg, J. Phys. USSR **9**, 353 (1945).
38. I. M. Frank and V. L. Ginzburg, J. Phys. (USSR) **9**, 353 (1945).
39. I. E. Tamm, Usp. Phys. Nauk **68**, 387 (1959); Science **131**, 206 (1960).
40. V. L. Ginzburg, Phys. Usp. **39**, 973 (1996).
41. M. F. Maghrebi, R. Golestanian, and M. Kardar, Phys. Rev. A **88**, 042509 (2013). 5Dokl. Akad. Nauk. SSSR **14**, 107 (1937) [Comptes. Rendus Acad. Science USSR **14**, 107 (1937)].