

# Взаимодействие двух фракций в вырожденном бозе-газе при конечных температурах

Ю. В. Лиханова<sup>+,\*</sup>, С. Б. Медведев<sup>+,\*</sup>, М. П. Федорук<sup>+,\*</sup>, П. Л. Чаповский<sup>\*,×1)</sup>

<sup>+</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>\*</sup>Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>×</sup>Институт автоматики и электрометрии СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 30 ноября 2015 г.

После переработки 15 февраля 2016 г.

Выполнен экспериментальный и теоретический анализ свободного разлета бозе-эйнштейновских конденсатов атомов рубидия при конечных температурах. Показано, что взаимодействие конденсированных и неконденсированных атомов наиболее ярко проявляется в уменьшении плотности атомов в центре разлетающегося облака по сравнению с теоретическим предсказанием для чистого бозе-конденсата.

DOI: 10.7868/S0370274X16060084

**Введение.** Бозе-эйнштейновские конденсаты (БЭК) разреженных газов [1, 2] являются сейчас наиболее точной реализацией предсказанной Эйнштейном конденсации невзаимодействующих бозонов [3]. Теория таких конденсатов строится на основе двух положений: конденсация осуществляется в основном энергетическом состоянии; состояния индивидуальных бозонов независимы друг от друга. Для невзаимодействующих бозонов в гармоническом потенциале задача сводится к нахождению волновой функции основного состояния гармонического осциллятора и, как известно, решается точно.

Теория БЭК взаимодействующих бозонов оказывается значительно сложнее. Опять считается, что бозоны конденсируются в низшем энергетическом состоянии. Волновая функция конденсата находится с помощью уравнения Гросса–Питаевского [4], в котором взаимодействие бозонов между собой моделируется дополнительным потенциалом, пропорциональным локальной плотности бозонов. Уравнение Гросса–Питаевского описывает систему, в которой все бозоны находятся в конденсированной фазе. Такие условия реализуются в пределе нулевых температур,  $T = 0$ .

На практике же нулевые температуры точно никогда не достигаются. Мы всегда имеем дело со смесью двух фракций, конденсированной и неконденсированной. Это делает изучение таких систем очень важным. Сейчас теоретическое изучение бозе-конденсатов при конечных температурах ведется до-

статочно интенсивно [5–7]. Экспериментальные же работы значительно менее многочисленны. В настоящей работе выполнено экспериментальное и теоретическое исследование бозе-конденсатов атомов рубидия с целью регистрации эффектов взаимодействия двух фракций при конечных температурах. Наш метод основан на количественном сравнении наблюдаемых характеристик бозе-конденсатов при конечных температурах с теорией Гросса–Питаевского, которая хорошо описывает “чистые” бозе-конденсаты (см., например, [8]). Отклонение результатов эксперимента от теории Гросса–Питаевского можно считать обусловленным взаимодействием двух фракций в системе.

**Теоретическая модель.** По теории Гросса–Питаевского [4] бозе-конденсат в ловушке с гармоническим потенциалом описывается волновой функцией  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + N_c g |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Здесь  $m$  – масса атома;  $\omega_{x,y,z}$  – частоты колебаний атома в ловушке;  $N_c$  – полное число атомов в конденсате;  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ ; длина  $s$ -рассеяния для атомов  $^{87}\text{Rb}$   $a = 5.29$  нм. Функция  $\psi(\mathbf{r}, t)$  нормирована на 1, а локальная плотность частиц выражается как

$$n(\mathbf{r}, t) = N_c |\psi(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (2)$$

Для выполнения расчета состояния конденсата с помощью уравнения (1) достаточно знать частоты ко-

<sup>1)</sup>e-mail: chapovsky@iae.nsk.su

лебаний атомов в ловушке и полное число конденсированных атомов.

Процедура численного решения уравнения (1), использованная в настоящей работе, подробно описана в [9]. Для расчета основного состояния конденсата в магнитной ловушке решалась краевая задача с нулевыми значениями волновой функции  $\psi(\mathbf{r}, t)$  на границе достаточно большого параллелепипеда методом установления с использованием “мнимого времени” [10]. Характеристики разлетающегося облака находились с помощью решения начально-краевой задачи (1) с нулевым внешним потенциалом и нулевыми граничными условиями на границе большого параллелепипеда и стационарным состоянием конденсата в качестве начального условия. В расчетах использовался метод расщепления по физическим процессам и быстрое преобразование Фурье. Отметим, что численное решение уравнения (1) оказывается достаточно трудоемким. При сетке  $800 \times 100 \times 800$  узлов расчет стационарного состояния и разлета конденсата на одном ядре кластерного вычислительного комплекса НГУ (НР BL2x220с G7 с тактовой частотой 2.9 МГц) занимает несколько дней.

**Получение БЭК** состоит из следующих основных этапов [11]. Сначала примерно  $3 \cdot 10^9$  атомов  $^{87}\text{Rb}$  в состоянии  $F_g = 2$  захватывается и охлаждается магнитооптической ловушкой (МОТ). Затем лазерные лучи МОТ выключаются и в слабом однородном магнитном поле осуществляется оптическая накачка атомов рубидия на зеемановский уровень  $F_g = 2$ ,  $M_F = 2$ . Далее атомы загружаются в неподвижную квадрупольную магнитную ловушку, а вся вакуумная система перемещается так, что атомы оказываются в зоне низкого давления паров рубидия. Одновременно с перемещением вакуумной системы квадрупольная магнитная ловушка трансформируется в магнитную ловушку QUIC [12] с ненулевым магнитным полем в минимуме магнитного потенциала. Облако в ловушке QUIC имеет сильно вытянутую сигарообразную форму с расчетными частотами колебаний атомов рубидия 12.6 Гц в аксиальном направлении (вдоль оси  $y$ ) и 255 Гц в радиальном направлении (вдоль осей  $x, z$ ) (рис. 1). Далее атомы в ловушке QUIC охлаждаются с помощью ВЧ испарительного охлаждения и достигается бозе-эйнштейновская конденсация. Варьируя конечную частоту ВЧ-охлаждения, можно изменять число конденсированных атомов.

Конденсат, находящийся в магнитной ловушке, имеет очень малые пространственные размеры. Поэтому, как и в большинстве других работ по БЭК, характеристики конденсата измерялись после выключе-

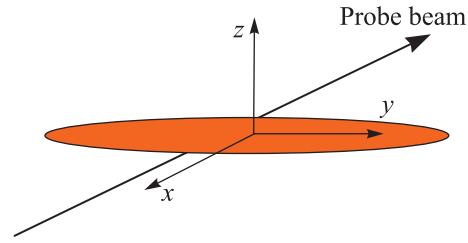


Рис. 1. (Цветной онлайн) Система координат и положение облака в центре ловушки QUIC. Оптическая плотность измеряется вдоль радиальной координаты  $x$ . Сила тяжести направлена вдоль радиальной координаты  $z$ , а магнитное поле в центре ловушки – по аксиальной координате  $y$

чения магнитной ловушки и свободного разлета атомов, когда облако приобретало достаточно большие размеры. В заданный момент времени облако холодных атомов просвечивалось слабым линейно поляризованным излучением, резонансным переходу  $F_g = 2 \rightarrow F_e = 3$ ,  $D_2$ -линии рубидия. Тень от облака регистрировалась цифровой видеокамерой ( $3 \cdot 10^6$  пикселей, динамический диапазон 12 бит). Для измерения оптической плотности облака видеокамера делала три снимка с интервалом 250 мс: с облаком атомов, без атомов и без пробного излучения. Необходимое высокое временное разрешение при фотографировании облака достигалось с помощью акустооптического модулятора управляющего пробным лучом.

В разлетающемся облаке холодных атомов наблюдаются две фракции с существенно различным поведением во времени. Облако конденсированных частиц превращается при разлете из сигарообразного (вытянутого вдоль аксиального направления  $y$ ) в диск с радиальными размерами, значительно большими аксиального размера. Облако неконденсированных частиц превращается при разлете из сигарообразного в сферическое.

**Сравнение с теорией.** Работоспособность экспериментальной и теоретической методик тестировалась на экспериментах с большим конденсатом, в котором эффекты взаимодействия двух фракций следует ожидать подавленными (см. также [9]). На рис. 2а представлено распределение интегральной (вдоль оси  $x$ ) оптической плотности в плоскости ( $yz$ ) для “большого” конденсата после свободного разлета в течение 30.7 мс. При анализе экспериментальных данных было принято, что неконденсированные атомы имеют гауссово распределение:

$$n_g = \eta_g \exp[-y^2/2\sigma_y^2 - (x^2 + z^2)/2\sigma_z^2], \quad (3)$$

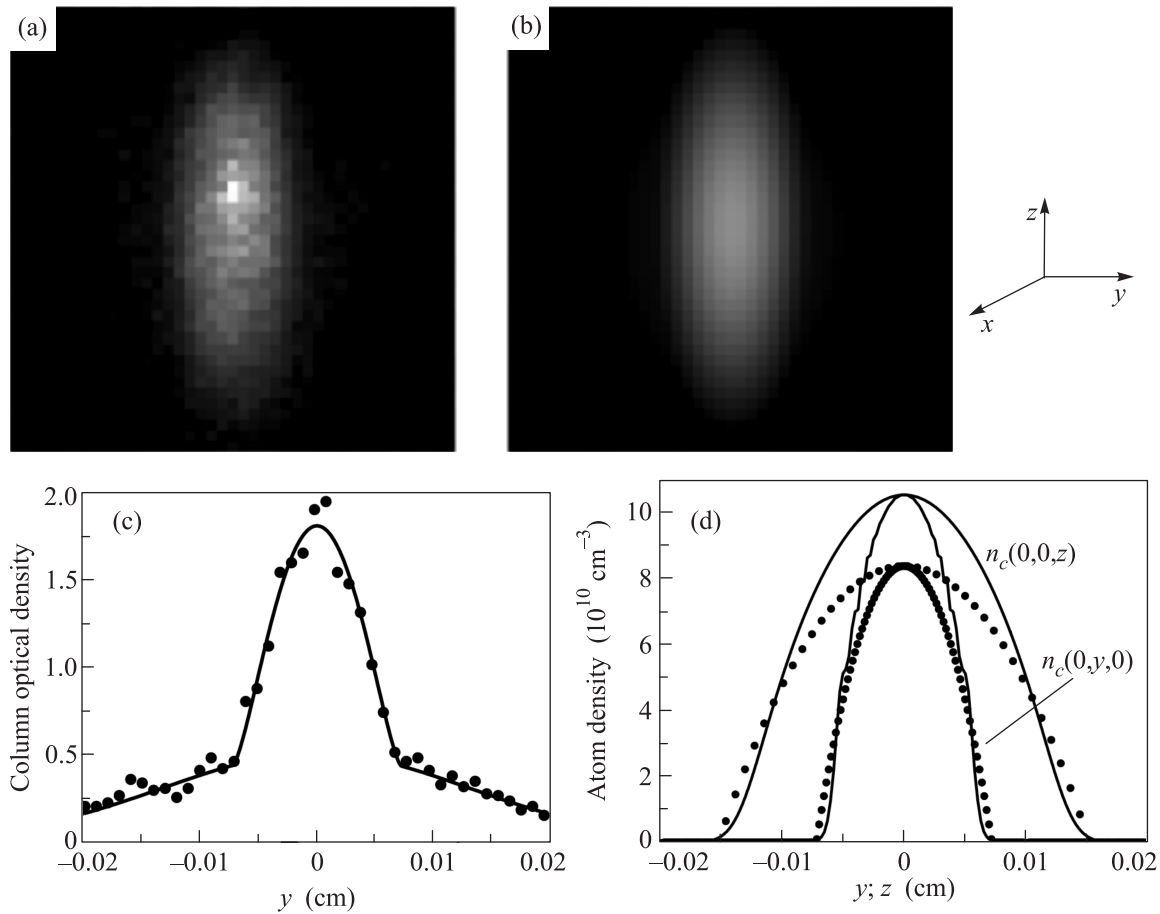


Рис. 2. Конденсат с большим количеством атомов. (а) – Экспериментальное распределение интегральной оптической плотности в плоскости ( $yz$ ). (б) – Результат аппроксимации функцией Гаусс + перевернутая парабола. (с) – Экспериментальная (кружки) и теоретическая (сплошная линия) зависимости интегральной оптической плотности в центре облака от аксиальной координаты  $y$ . (д) – Экспериментальные (кружки) и теоретические (сплошные линии) распределения плотностей конденсированных атомов по осям  $y$  и  $z$  в центре облака

а пространственное распределение конденсированных атомов имеет вид перевернутой параболы (приближение Томаса–Ферми) [13]:

$$n_c = \eta_c \max[(1 - y^2/s_y^2 - (x^2 + z^2)/s_z^2), 0]. \quad (4)$$

Плотности в центре,  $\eta_g$  и  $\eta_c$ , связаны с полными количествами атомов во фракциях соотношениями

$$N_g = \eta_g (2\pi)^{3/2} \sigma_y \sigma_z^2; \quad N_c = \eta_c \cdot 8\pi s_y s_z^2 / 15. \quad (5)$$

В эксперименте регистрируется оптическая плотность вдоль оси  $x$ ,  $D = D_g + D_c = \sigma_{\text{opt}} \int (n_g + n_c) dx$ , где  $\sigma_{\text{opt}} = 1 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2$  – сечение поглощения резонансного излучения в наших условиях. Интегральные оптические плотности двух фракций имеют вид

$$D_g = \sigma_{\text{opt}} \sqrt{2\pi} \sigma_z \eta_g \exp[-y^2/2\sigma_y^2 - (x^2 + z^2)/2\sigma_z^2]; \quad (6)$$

$$D_c = \sigma_{\text{opt}} \cdot \frac{4}{3} s_z \eta_c \max[(1 - y^2/s_y^2 - (x^2 + z^2)/s_z^2)^{3/2}, 0].$$

Аппроксимация регистрируемой в эксперименте оптической плотности теоретическим выражением для  $D = D_g + D_c$  из (6) дала геометрические размеры  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $s_y$ ,  $s_z$  и полные количества атомов во фракциях  $N_g$  и  $N_c$ . Аппроксимация осуществлялась с помощью специально написанной для этого компьютерной программы. Ее результаты приведены на рис. 2b–d. Полные количества атомов составили

$$N_g = (7.5 \pm 0.2) \cdot 10^5; \quad N_c = (2.3 \pm 0.03) \cdot 10^5. \quad (7)$$

Здесь и далее указано одно стандартное отклонение случайной ошибки измерений. Знание величины  $N_c$  достаточно для того, чтобы выполнить расчеты на основе уравнения (1) без подгоночных параметров. Стационарное распределение атомов в ловушке имеет вид, очень близкий к (4), с параметрами, отмеченными в табл. 1 как ГП. В таком конденсате энергия взаимодействия атомов между собой  $\varepsilon_{\text{int}}$  превосходит

их кинетическую энергию в 65 раз. Расчет в приближении Томаса–Ферми [14] дает стационарное распределение плотности, близкое к найденному с помощью уравнения (1), с характеристиками, отмеченными в табл. 1 как ТФ.

**Таблица 1.** Параметры стационарного распределения плотности конденсата в ловушке\*)

	$N_c,$ $10^5$	$s_z,$ мкм	$s_y,$ мкм	$\eta_c,$ $10^{14} \text{ см}^{-3}$	$\varepsilon_{\text{int}},$ Гц
ГП	2.3	2.9	57	2.97	912
ТФ	2.3	2.9	58	2.96	913
ГП	0.38	2.0	38	1.45	458
ТФ	0.38	2.0	40	1.43	441

\*)Расчеты с помощью уравнения (1) отмечены как ГП, а в приближении Томаса–Ферми – как ТФ.

Результаты расчетов разлетающегося облака с помощью уравнения (1) приведены на рис. 2d. Мы получили хорошее согласие экспериментальных и теоретических размеров конденсата. Хорошее согласие получено и для ключевого, по нашему мнению, параметра – плотности атомов в центре конденсированной фракции. Эксперимент дает  $8.4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , а теоретическое значение составляет  $10.5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

Перейдем теперь к анализу системы с малым количеством конденсированных атомов, когда эффекты взаимодействия двух фракций следует ожидать усиленными. Пример оптической плотности для “малого” конденсата по истечении времени свободного разлета 25.7 мс приведен на рис. 3а, а ее аппроксимация на основе соотношений (6) – на рис. 3b–d. Полные количества атомов составили

$$N_g = (2.6 \pm 0.05) \cdot 10^5; \quad N_c = (0.38 \pm 0.01) \cdot 10^5. \quad (8)$$

Знание  $N_c$  снова позволяет выполнить расчет распределения плотности конденсированных атомов по теории Гросса–Питаевского (1) без подгоночных параметров. Стационарное распределение атомов в ловушке оказывается близким к (4) с параметрами, приведенными в табл. 1. В таком конденсате энергия взаимодействия атомов между собой превосходит их кинетическую энергию в 16 раз. Расчет в приближении Томаса–Ферми [14] дает стационарное распределение плотности, близкое к найденному с помощью уравнения (1), с характеристиками, отмеченными в табл. 1 как ТФ.

Теоретическое распределение плотности конденсированных атомов в разлетающемся облаке приведено на рис. 3d. Согласно этим данным экспериментальная плотность атомов в центре конденсированной фракции меньше расчетной в 2.3 раза. Мы ин-

терпретируем этот результат как проявление взаимодействия двух фракций в вырожденном бозе-газе.

**Обсуждение и выводы.** Нахождение полного количества конденсированных атомов в смеси двух фракций является, пожалуй, самым сложным пунктом обработки экспериментальных данных (см. также [15, 16]). Главной проблемой здесь является отличие распределения атомов в конденсате (см. рис. 3d) от распределения Томаса–Ферми (перевернутая парабола), которое мы использовали для аппроксимации результатов измерений. Более правильной была бы аппроксимация численным решением уравнения (1). Однако такой подход требует слишком трудоемких вычислений. Для оценки возникающей из-за этого систематической ошибки определения количества конденсированных атомов мы сравнили результат аппроксимации для “малого” конденсата (8) с аппроксимацией существенно другой функцией: Гаусс+Гаусс. Это дало следующие величины для неконденсированных и конденсированных атомов:

$$N'_g = (2.5 \pm 0.06) \cdot 10^5; \quad N'_c = (0.45 \pm 0.02) \cdot 10^5. \quad (9)$$

Как и должно быть, полное количество атомов в облаке  $N = N'_g + N'_c$  осталось практически неизменным. Однако доля конденсированных атомов возросла на 20 % из-за широких “крыльев” гауссовой функции. Можно сделать вывод о том, что точность нашего определения числа конденсированных атомов составляет 20%. Отметим, что увеличение  $N_c$  на 20 % приводит к увеличению расчетной плотности атомов в центре разлетающегося облака только на  $\simeq 8 \%$ .

Взаимодействие неконденсированных и конденсированных атомов в ловушке может создавать сложные пространственные структуры в начальном распределении неконденсированных атомов. Поэтому распределение (3) является приближенным. Мы анализируем состояние облака на больших временах разлета, когда начальные структуры уже сгладились и гауссово распределение (3) становится хорошей аппроксимацией. Отметим, что влияние таких структур на определение количеств атомов во фракциях должно быть большим для большого конденсата.

Описание конденсированной фракции с помощью уравнения (1) справедливо для разреженных газов, когда  $na^3 \ll 1$ . В эксперименте  $na^3 = (2-4) \cdot 10^{-5}$ . Оценим связанные с этим параметром поправки к плотности атомов в центре разлетающегося облака  $\eta_c$ . Первый эффект обусловлен добавкой к локальному значению химического потенциала для атомов в ловушке [17, 4]. Эта добавка увеличивает энергию атомов в конденсате:  $\delta\varepsilon/\varepsilon = (7/8)\sqrt{\pi a^3 \eta} \equiv (7/8)\delta_1$ , где  $\eta$  – плотность атомов в центре ловушки в прибли-

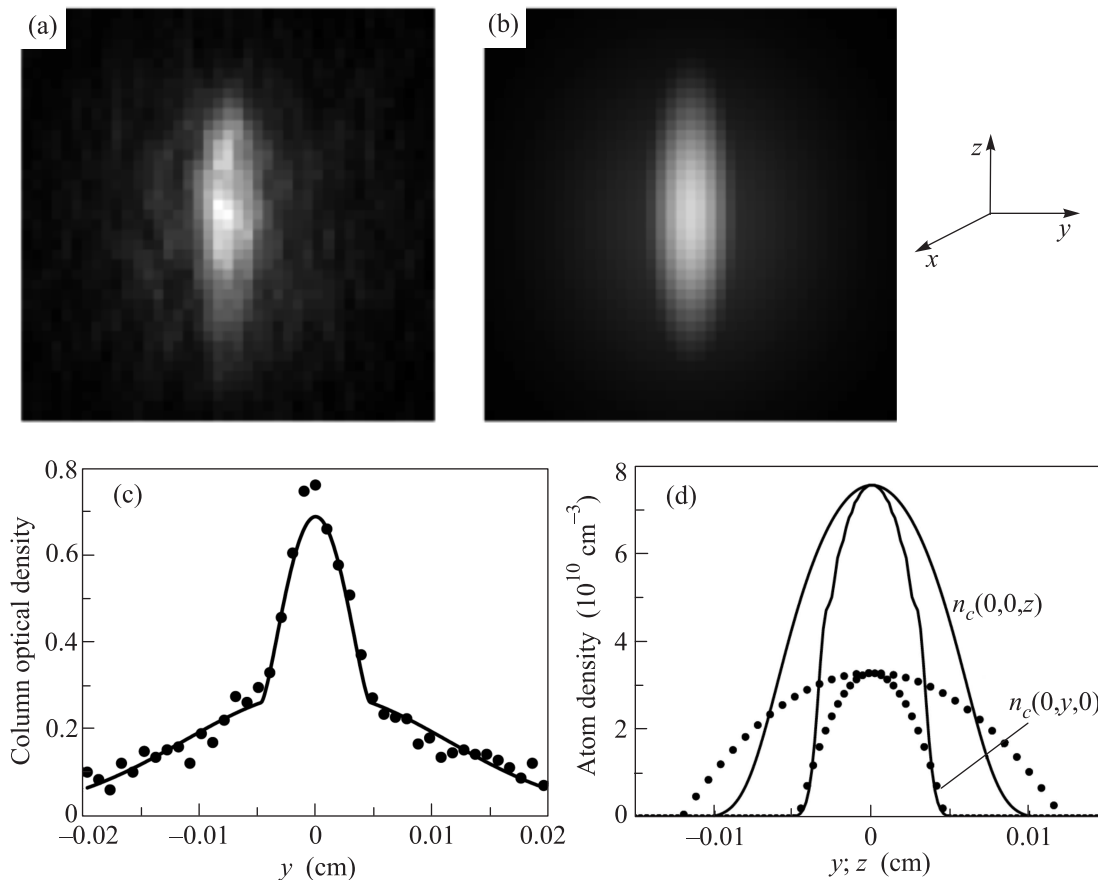


Рис. 3. Конденсат с малым количеством атомов. (а) – Экспериментальное распределение интегральной оптической плотности в плоскости  $(yz)$ . (б) – Результат аппроксимации функцией гаусс + перевернутая парабола. (с) – Экспериментальная (кружки) и теоретическая (сплошная линия) зависимости интегральной оптической плотности в центре облака от аксиальной координаты  $y$ . (д) – экспериментальные (кружки) и теоретические (сплошные линии) распределения плотностей конденсированных атомов по осям  $y$  и  $z$  в центре облака

жени Томаса–Ферми. Приближенно кинетическая энергия разлетающихся атомов также увеличивается на  $(7/8)\delta_1$ . Это уменьшает плотность атомов в центре разлетающегося облака:  $\delta\eta_c/\eta_c \simeq -(21/16)\delta_1$ .

Еще одна поправка вызвана квантовым опустошением конденсата из-за нулевых колебаний элементарных возбуждений на величину  $\delta N_c/N_c = -(5/8)\delta_1$  [4]. Это непосредственно уменьшает  $\eta_c$ :  $\delta\eta_c/\eta_c = -(5/8)\delta_1$ . Кроме этого, уменьшение  $N_c$  уменьшает кинетическую энергию разлетающихся атомов, что, наоборот, увеличивает  $\eta_c$ :  $\delta\eta_c/\eta_c \simeq (3/8)\delta_1$ . Суммируя все три эффекта, получаем оценку  $\delta\eta_c/\eta_c \simeq -1.3\%$  ( $-1.8\%$ ) для малого (большого) конденсата. Таким образом, мы видим, что в наших условиях уравнение (1) описывает разлет конденсированной фракции достаточно точно.

В эксперименте магнитная ловушка выключается за время  $< 250$  мкс. Нас интересует превращение энергии межатомного взаимодействия в кинетиче-

скую энергию разлетающихся атомов без перемешивания между различными степенями свободы. Перемешивание осуществляется за время свободного пролета атома в конденсате, которое в наших экспериментах составляет  $> 1$  мс. Это позволяет считать выключение магнитной ловушки мгновенным.

Полные числа конденсированных атомов в теоретических расчетах и эксперименте равны по построению. Поэтому отличие экспериментальных и теоретических плотностей атомов в центре облака целиком обусловлено различиями пространственных размеров экспериментального и теоретического облаков атомов. Аксиальные размеры в эксперименте и в теории совпадают между собой с точностью наших измерений (рис. 2d и 3d). Радиальные же теоретические и экспериментальные размеры для “малого” конденсата заметно различны. Это и приводит к различию экспериментальных и теоретических плотностей конденсированных атомов в центре обла-

ка в случае “малого” конденсата. Отметим, что непосредственное количественное сравнение экспериментального и теоретического размеров затруднено из-за функционального различия экспериментального и теоретического профилей (см. рис. 3d).

Указание на более быстрый разлет конденсированных атомов в радиальном направлении, чем это предсказывает теория Гросса–Питаевского, было получено в работах и других авторов [18, 15, 19–21]. В них анализ основывался на сравнении экспериментального и теоретического отношений радиального и аксиального размеров облака. Нам представляется, что более точной мерой состояния конденсированной фракции в двухкомпонентном вырожденном бозе-газе может служить плотность конденсированных частиц в центре разлетающегося облака. Это иллюстрирует рис. 3d, где небольшие отличия радиальных размеров трансформируются в значительные различия экспериментальных и теоретических плотностей атомов в центре облака.

Анализ, выполненный в настоящей работе, показывает, что для сильно вытянутого сигарообразного газа ультрахолодных атомов присутствие большого количества неконденсированных атомов приводит к аномально быстрому разлету конденсированной фракции в радиальном направлении. Удобной количественной характеристикой этого эффекта является сравнение плотности конденсированных атомов в центре облака с предсказаниями теории Гросса–Питаевского.

Авторы благодарны М.А. Никулину за полезные обсуждения содержания статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант # 15-02-05754). Работа М.П. Федорука и С.Б. Медведева выполнялась при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект # 14-21-00110).

1. E. A. Cornell and C. E. Wieman, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 875 (2002).
2. W. Ketterle, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1131 (2002).
3. A. Einstein, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl.* 3 (1925).

4. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
5. N. P. Proukakis and B. Jackson, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41**, 203002 (2008).
6. K. Gawryluk, M. Brewczyk, M. Gajda, and K. Rzazewski, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **43**, 105303 (2010).
7. S. K. Nemirovskii, *Phys. Rep.* **524**, 85 (2013).
8. U. Ernst, J. Schuster, F. Schreck, A. Marte, A. Kuhn, and G. Rempe, *Appl. Phys. B* **67**, 719 (1998).
9. Ю. В. Лиханова, С. Б. Медведев, М. П. Федорук, П. Л. Чаповский, *Труды конференции, Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2015, Октябрь 19-23, 2015, Академгородок, Новосибирск, Россия, ИВМиМГ СО РАН, Абвей, Новосибирск* (2015), p. 467.
10. W. Bao and Q. Du, *SIAM J. Sci. Comp.* **25**, 1674 (2004).
11. П. Л. Чаповский, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 148 (2012).
12. T. Esslinger, I. Bloch, and T. W. Hansch, *Phys. Rev. A: At., Mol., Opt. Phys.* **58**, 2664 (1998).
13. Y. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A: At., Mol., Opt. Phys.* **55**, R18 (1997).
14. G. Baym and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 6 (1996).
15. F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect, *Phys. Rev. A: At., Mol., Opt. Phys.* **70**, 013607 (2004).
16. J. Szczepkowski, R. Gartman, M. Witkowski, L. Tracewski, M. Zawada, and W. Gawlik, *Rev. Sci. Instr.* **80**, 053103 (2009).
17. T. D. Lee, K. Huang, and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **106**, 1135 (1957).
18. B. D. Busch, C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and L. V. Hau, *Europhys. Lett.* **51**, 485 (2000).
19. M. Zawada, R. Abdoul, J. Chwederczuk, R. Gartman, J. Szczepkowski, L. Tracewski, M. Witkowski, and W. Gawlik, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **41**, 241001 (2008).
20. W. Gawlik, W. Jastrzebski, J. Szczepkowski, M. Witkowski, J. Zachorowski, and M. Zawada, *Physica Scripta T* **135**, 014028 (2009).
21. M. A. Caracanhas, J. A. Seman, E. R. F. Ramos, E. A. L. Hann, K. M. F. Magalhaes, K. Helmerson, and V. S. Bagnato, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **42**, 145304 (2009).