Письма в ЖЭТФ, том 103, вып. 6, с. 464 – 468 © 2016 г. 25 марта

Аналитическое решение уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений атома электромагнитными импульсами аттосекундной и меньшей длительности

Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев[1)]

Северный (Арктический) федеральный университет им. Ломоносова, 163002 Архангельск, Россия

Поступила в редакцию 27 января 2016 г.

После переработки 8 февраля 2016 г.

Получено точное решение уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений при взаимодействии импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности с многоэлектронными атомами. Оно позволяет произвести точный учет пространственной неоднородности поля ультракороткого импульса. Результат представлен в аналитическом виде.

DOI: 10.7868/S0370274X16060102

1. Введение. Приближение внезапных возмущений (см., например, [1, 2]) в квантовой механике является основой расчетных методик, когда возмущение не является достаточно малым для применения теории возмущений, однако время его действия значительно меньше характерных периодов времени невозмущенной системы. В таком случае приближение внезапных возмущений позволяет решать задачу, не ограничивая величину возмущения. Известно много примеров, когда под действием внезапного возмущения происходят возбуждение или ионизация атома. Прежде всего это возбуждение или ионизация атомов при ядерных реакциях, например при β-распаде ядра, когда вылет быстрого β-электрона воспринимается атомными электронами как внезапное изменение заряда ядра, или при ударе нейтрона о ядро, когда происходит внезапная передача импульса ядру. Приближение внезапных возмущений применяется при рассмотрении многоэлектронных переходов в сложных атомах, когда переходы, происходящие во внутренних оболочках, воспринимаются сравнительно медленными электронами внешних оболочек как мгновенные (см., например, [3]). Как результат действия внезапного возмущения рассматриваются неупругие процессы при столкновениях быстрых многозарядных ионов с атомами (см. обзор [4]) и при столкновениях заряженных частиц с высоковозбужденными атомами [5]. Аналогичное приближение также успешно используется при описании взаимодействия предельно коротких импульсов (few-cycle pulses) с веществом (см., например, [6–13] и приведенные там ссылки). К подобным случаям можно отнести и эффекты взаимодействия атомов с аттосекундными импульсами электромагнитного поля, которые в настоящее время становятся объектом экспериментальных и теоретических исследований. Такие импульсы могут иметь различное происхождение, в том числе являться полями движущихся с релятивистской или ультрарелятивистской скоростью тяжелых ионов [14]. При этом в последнем случае для полей ионов с достаточно большими зарядами теория возмущений неприменима [15] даже при сколь угодно больших энергиях ионов. Достигнутый к настоящему времени прогресс в методах генерации коротких и ультракоротких электромагнитных импульсов позволил преодолеть "фемтосекундный рубеж" и получить импульсы длительностью в несколько десятков аттосекунд. Возникло новое направление – аттосекундная физика (см., например, обзоры [16–20]). Появилась возможность наблюдения атомных явлений в реальном масштабе времени. Для импульсов, более коротких, чем характерное атомное время, но более "длинных", чем аттосекундные целесообразно применять подходы, основанные на разложении Магнуса для оператора эволюции. До настоящего времени расчеты проводят, учитывая лишь первые несколько членов в разложении [1] оператора эволюции. При этом обычно поле импульса предполагается пространственно-однородным на размерах мишени [21–23]. Для импульсов же аттосекундной и меньшей длительности следует применять приближение внезапных возмущений. К тому же сейчас активно обсуждаются возможности (см., например, [24, 25]) генерации значительно более коротких, чем аттосе-

[1)]e-mail: mezon98@mail.ru

кундные, импульсов. Однако до настоящего времени точного решения задачи о взаимодействии атома с такими импульсами электромагнитного поля так и не получено.

В данной работе получено точное решение уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений при взаимодействии импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности с многоэлектронными атомами. При этом поле ультракороткого импульса учитывается точно в рамках приближения внезапных возмущений. Дипольного приближения не используется. Развитая методика позволяет произвести точный учет пространственной неоднородности поля ультракороткого импульса на размерах мишени. Результаты представлены в виде простых аналитических формул.

2. Основная часть. Пусть невозмущенная система (атом) описывается независящим от времени гамильтонианом $\hat{H}_0$ с собственными функциями φ_n и энергиями ε_n. Пусть на атом падает импульс электромагнитного поля, взаимодействие атома с которым обозначим как $\hat{V}(t)$. В рассматриваемых нами случаях считается, что длительность ультракоротких импульсов τ значительно меньше характерного атомного времени τ_a, т.е. $\tau \ll \tau_a$. Таким образом, нами рассматриваются импульсы аттосекундной и меньшей длительности. Вместо того чтобы использовать явный вид оператора эволюции, проще найти решение уравнения Шредингера с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, где внезапное возмущение $\hat{V}(t)$ действует в течение времени, значительно меньшего характерных периодов времени невозмущенной системы, описываемой гамильтонианом $\hat{H}_0$. Пусть до взаимодействия импульса с атомом система находилась в состоянии φ_0 с энергией ε_0. Пусть взаимодействие импульса с атомом начинается в момент времени $t = t_0$ и заканчивается при $t = t_1$, так что $t_1 - t_0 = \tau$. Тогда при $t < t_0$ волновая функция атома равна $\Psi = e^{-i\varepsilon_0 t}\varphi_0$. Далее, при $t_0 < t < t_1$ на атом действует внезапное возмущение $\hat{V}(t)$. Следуя идее внезапного возмущения, эволюцию волновой функции атома в этом интервале времени можно находить, пренебрегая гамильтонианом $\hat{H}_0$, задав начальное условие $\Psi \to e^{-i\varepsilon_0 t_0}\varphi_0$ при $t \to t_0$ сверху. Соответственно при $t > t_1$ эволюция волновой функции Ψ опять описывается невозмущенным гамильтонианом $\hat{H}_0$ и Ψ следует искать в виде разложения по собственным функциям оператора $\hat{H}_0$. При этом коэффициенты разложения полностью определяются значениями волновой функции на интервале времени $t_0 < t < t_1$ действия поля импульса. Таким образом, из вышеперечисленных трех шагов нам не известна лишь волновая функция в интервале времени действия поля импульса и необходимо найти решение уравнения Шредингера именно в этом интервале. Такая последовательность действий и изложена ниже.

Часто векторный ($\mathbf{A}$) и скалярный (φ) потенциалы электромагнитных волн выбираются так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю. В такой калибровке взаимодействие электрона с внешним электромагнитным полем имеет вид (здесь и ниже используются атомные единицы: $m_e = \hbar = e = 1$, где m_e – масса электрона, $\hbar$ – постоянная Планка, e – заряд электрона):

$$\hat{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2c}(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}) + \frac{1}{2c^2}\mathbf{A}^2, \tag{1}$$

где $\hat{\mathbf{p}}$ – оператор импульса электрона, $c \approx 137$ ат.ед. – скорость света. Рассмотрим общий случай, когда внешнее поле представляет собой плоские волны, распространяющиеся в направлении $\mathbf{n}_0$. Запишем поле в виде $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\eta)$, где $\eta = t - \mathbf{n}_0\mathbf{r}/c$. Напряженность поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{A}}{d\eta}$. Для того чтобы выразить взаимодействие (1) через наблюдаемые величины, проведем калибровочное преобразование [26]: $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$, $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$, где $f = -\mathbf{A}\mathbf{r}$. В результате $\varphi' = -(\mathbf{E}\mathbf{r})$, $\mathbf{A}' = \mathbf{n}_0\varphi' = -\mathbf{n}_0(\mathbf{E}\mathbf{r})$. При этом для волновой функции переход от одной калибровки к другой осуществляется преобразованием вида $e^{\frac{i}{c}\mathbf{A}\mathbf{r}}$. В такой калибровке взаимодействие электрона с электромагнитным полем выражается только через напряженность электрического поля и $\hat{V}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\hat{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2c}(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A}' + \mathbf{A}'\hat{\mathbf{p}}) + \frac{1}{2c^2}(\mathbf{A}')^2 - \varphi'. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение Шредингера для одноэлектронного атома, на который действует внешнее классическое электромагнитное поле (φ', $\mathbf{A}'$):

$$\left\{\hat{H}_0 + \hat{V}(\mathbf{r}, t)\right\}\Psi = i\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \tag{3}$$

где $\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{p}}^2 + U(\mathbf{r})$ – гамильтониан изолированного атома. Решим дифференциальное уравнение (3) в приближении внезапных возмущений, когда гамильтонианом $\hat{H}_0$ можно пренебречь. Выбирая ось z вдоль распространения волны $\mathbf{n}_0$, осуществляя замену переменных $\eta^- = t - z/c, \eta^+ = t + z/c$ и подставляя в явном виде φ', $\mathbf{A}'$, получим следующее диференциальное уравнение:

$$\left\{-i\mathbf{Er}\frac{1+\frac{\mathbf{Er}}{2c^2}}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}-\frac{1}{2c^2}\frac{\partial\mathbf{Er}}{\partial\eta^-}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}-\frac{\partial}{\partial\eta^-}\right\}\Psi = \\ =\frac{1-\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta^+}. \qquad (4)$$

В этом уравнении учтено, что $\mathbf{E}$ есть функция только η^- и $\mathbf{E}$ перпендикулярно $\mathbf{n}_0$, поэтому скалярное произведение $\mathbf{Er}$ отбирает лишь x- и y-компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$.

Важно отметить, что именно ограничение, связанное с тем, что импульс является плоским и распространяется со скоростью света в вакууме в направлении выделенной оси, позволяет выразить преобразованные потенциалы только через электрическую компоненту электромагнитного импульса. Такой подход аналогичен редукции неоднородного волнового уравнения для поля электромагнитного импульса от второго порядка к первому, впервые проведенной при использовании приближения среды малой плотности в работе [27].

Решить уравнение (4) уже несложно. Будем считать атом расположенным в начале системы координат, что ограничивает область изменения $\mathbf{r}$ в окрестности начала системы координат в пределах порядка характерного размера атома. При этом взаимодействие импульса с атомом отличается от нуля только в интервале времени $\tau << 1$, описанном вокруг точки $t = 0$. Это позволяет решать уравнение (4) следующим образом. Выбрав начальные условия в виде $\Psi(t\to-\infty)=\varphi_0$, где φ_0 – начальная волновая функция атома, будем искать решение в виде

$$\Psi(t)=\varphi_0(x,y,z+\alpha)\times \\ \times e^{\left\{-i\int_{-\infty}^{\eta^-}\mathbf{Er}\frac{1+\frac{\mathbf{Er}}{2c^2}}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}d\eta^- -\frac{1}{2c^2}\int_{-\infty}^{\eta^-}\frac{\partial\mathbf{Er}}{\partial\eta^-}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}d\eta^-\right\}}, \qquad (5)$$

где $\alpha=\alpha(x,y,z,t)$ – неизвестная функция. Такой выбор решения значительно упрощает задачу, поскольку если условно считать $\varphi_0(x,y,z+\alpha)$ постоянной, то экспонента, входящая в правую часть (5), обращает в нуль левую часть уравнения (4). В результате после подстановки (5) в (4) и сокращения экспоненты остаются только слагаемые, содержащие производные функции $\varphi_0(x,y,z+\alpha)=\varphi_0(x,y,f)$, где $f=f(\eta^+,\eta^-)=z+\alpha$. При этом

$$\frac{\partial\varphi_0(x,y,z+\alpha)}{\partial\eta^\pm}=\frac{\partial\varphi_0(x,y,f)}{\partial f}\left(\pm1\frac{c}{2}+\frac{\partial\alpha}{\partial\eta^\pm}\right).$$

Таким образом, после сокращения производной $\frac{\partial\varphi_0}{\partial f}$ уравнение для функции $\alpha=\alpha(x,y,z,t)$ имеет вид

$$\frac{\frac{\mathbf{Er}}{c}}{1-\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}-\frac{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}{1-\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta^-}=\frac{\partial\alpha}{\partial\eta^+}. \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) с начальным условием $\alpha\to0$ при $\eta^-\to-\infty$ проще всего найти, полагая, что α не зависит от η^+. Тогда правая часть (6) обращается в нуль. В таком случае уравнение для α сразу решается. Удовлетворяющее условию $\alpha\to0$ при $\eta^-\to-\infty$ решение уравнения (6) имеет вид

$$\alpha=\int_{-\infty}^{\eta^-}\frac{\mathbf{Er}}{c}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}d\eta^-. \qquad (7)$$

Теперь при любых конечных z мы можем перейти в решении (5) ко времени t и переписать его в виде

$$\Psi(t)=\varphi_0\left(x,y,z+\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathbf{Er}}{c}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}dt\right)\times \\ \times e^{\left\{-i\int_{-\infty}^{t}\mathbf{Er}\frac{1+\frac{\mathbf{Er}}{2c^2}}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}dt-\frac{1}{2c^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\mathbf{Er}}{\partial\eta^-}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}dt\right\}}, \qquad (8)$$

где, конечно же, $\mathbf{E}$ есть функция $t-z/c=\eta^-$. Создается впечатление, что функция (8) не удовлетворяет условию не зависящей от времени нормировки $\int|\Psi(t)|^2d^3r=\int|\varphi_0(x,y,z)|^2d^3r=1$. Поэтому покажем, что условие номировки выполняется, если (без потери общности) считать, что $\mathbf{E}\to0$ при $t\to-\infty$. Для этого представим входящее в правую часть (8) выражение следующим образом:

$$e^{-\frac{1}{2c^2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial\mathbf{Er}}{\partial\eta^-}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}dt}=e^{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t}\frac{\partial}{\partial t}\ln|1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}|dt}= \\ =\frac{1}{\sqrt{|1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}|}}. \qquad (9)$$

Тогда волновая функция (8) примет вид

$$\Psi(t)=\varphi_0\left(x,y,z+\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathbf{Er}}{c}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}dt\right)\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{|1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}|}}e^{\left\{-i\int_{-\infty}^{t}\mathbf{Er}\frac{1+\frac{\mathbf{Er}}{2c^2}}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}dt\right\}}. \qquad (10)$$

Для того чтобы проверить выполнение условия нормировки, достаточно в (10) провести замену $z'=z+\int_{-\infty}^{t-z/c}\frac{\mathbf{Er}}{c}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}d\eta^-$. Тогда $dz'=dz-\frac{\mathbf{Er}}{c^2}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}dz=dz\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}}$. Таким образом условие $\int|\Psi(t)|^2d^3r=\int|\varphi_0(x,y,z)|^2d^3r=1$ оказывается выполненным. Отметим также, что в случае выполнения неравенств $E\ll c/\tau$ и $E\ll c^2$ функцию (10) можно переписать в простом виде:

$$\Psi(t)=\varphi_0(x,y,z)\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{t}\mathbf{Er}dt\right\}. \qquad (11)$$

Появление координатного сдвига электрона вдоль оси z, фигурирующего в решении (10) в аргументах функции φ_0, нуждается в дополнительных комментариях. Такой сдвиг вдоль направления распространения налетающего импульса обусловлен влиянием магнитной компоненты поля импульса (см., например, качественное описание на основе силы Лоренца в [28]). Возможно и количественное описание, которое в том числе позволит получить альтернативную форму записи решения (10) с явно выделенными зависимостями от электрической и магнитной компонент поля налетающего импульса. Представим преобразованный векторный потенциал $\mathbf{A}^{'}$, входящий в (2), в следующем виде:

$$\mathbf{A}^{'} = -(\mathbf{r}\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = -(\mathbf{n}_0\mathbf{r})\mathbf{E} - \mathbf{r}\times\mathbf{H}, \quad (12)$$

где $\mathbf{H}$ – магнитная компонента электромагнитного поля. Зная, что $\mathbf{A}^{'}$ направлен по направлению распространения поля электромагнитного импульса, получим $\mathbf{A}^{'}\mathbf{n}_0 = A_z^{'} = A^{'}$. Далее умножим выражение (12) на $\mathbf{n}_0$ и получим

$$\mathbf{A}^{'}\mathbf{n}_0 = A_z^{'} = A^{'} = -(\mathbf{r}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_0. \quad (13)$$

Теперь перепишем (2) с учетом электрической и магнитной компонент электромагнитного поля:

$$\hat{V}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2c}(\hat{p}_z A^{'} + A^{'}\hat{p}_z) + \frac{1}{2c^2}(A^{'})^2 - \varphi^{'}, \quad (14)$$

где $A^{'}$ определяется через (13), а $\varphi^{'} = -(\mathbf{Er})$. Очевидно, что $\mathbf{A}^{'}$ не вносит вклада в электрическую компоненту, т.к. $\mathbf{E}\perp\mathbf{n}_0$. В итоге несложно получить волновую функцию, выраженную через магнитную и электрическую компоненты электромагнитного поля (аналогично тому, как это было сделано при выводе формулы (10)):

$$\Psi(t) = \\ = \varphi_0\left(x, y, z + \int_{-\infty}^{t}\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_0}{c}\frac{1}{1+\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_0}{c^2}}dt\right)\times \\ \times\frac{1}{\sqrt{|1+\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_0}{c^2}|}}e^{\left\{-i\int_{-\infty}^{t}\mathbf{Er}\frac{1+\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_0}{2c^2}}{1+\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{H})\mathbf{n}_0}{c^2}}dt\right\}}. \quad (15)$$

Из этой формулы следует, что координатный сдвиг вдоль оси z целиком определяется магнитной компонентой поля электромагнитного импульса. Заметим, что если пренебречь в решении (15) магнитной компонентой, т.е. считать $\mathbf{H} = 0$, то мы сразу получаем формулу (11).

Естественное обобщение решения (10) на случай многоэлектронного атома имеет вид

$$\Psi(t) = \varphi_0(\{x_a, y_a, z_a + \alpha_a\})\times \\ \times\prod_{a=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{|1+\frac{\mathbf{Er}_a}{c^2}|}}e^{\left\{-i\int_{-\infty}^{t}\mathbf{Er}_a\frac{1+\frac{\mathbf{Er}_a}{2c^2}}{1+\frac{\mathbf{Er}_a}{c^2}}dt\right\}}, \quad (16)$$

где $\mathbf{r}_a = x_a, y_a, z_a$ – координаты атомного электрона с номером a, $\{x_a, y_a, z_a\}$ – совокупность координат атомных электронов ($a = 1, ..., N$), N – число атомных электронов, $\varphi_0(\{x_a, y_a, z_a\})$ – волновая функция основного состояния многоэлектронного атома, $\alpha_a = \int_{-\infty}^{t}\frac{\mathbf{Er}_a}{c}\frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}_a}{c^2}}dt$. Хотя формулы (10) и (16) описывают эволюцию волновой функции атома только за время действия налетающего импульса, они, в принципе, имеют самостоятельное значение. Эти формулы позволяют рассчитывать процессы, протекающие только в течение указанного времени, например процессы переизлучения импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности, не в дипольном приближении, причем более точно, чем это делалось ранее в работах [26, 29–31]. Если же нас интересует эволюция волновой функции атома после действия импульса, то необходимо поступать следующим образом. Пусть система до действия импульса находилась в состоянии φ_0. Тогда амплитуда вероятности обнаружить систему в каком-либо состоянии φ_n после действия импульса равна

$$a_n = \langle\varphi_n|\Psi(t = +\infty)\rangle, \quad (17)$$

где $\Psi(t = +\infty)$ – функция (16) при $t = +\infty$. Введем отдельное обозначение $\Phi(t)$ для зависящей от времени волновой функции атома после действия импульса. Тогда, как описывалось в начале настоящего пункта, имеем

$$\Phi(t) = \sum_n a_n\varphi_n e^{-i\varepsilon_n t}. \quad (18)$$

Формула (18) с коэффициентами (17) и есть точное решение уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений после взаимодействия импульса электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности с многоэлектронным атомом. Отметим, что в [32] в подобной (18) форме приведено известное точное решение уравнения Дирака в поле ультрарелятивистского иона.

Знание точного решения всегда полезно. Например, точное решение позволяет ответить на принципиальный вопрос: существует ли возбуждение атома полем ультракороткого импульса, если интеграл от поля по времени равен нулю, т.е. если $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}dt = 0$? Подчеркнем, что обычно считается [33], что электрическое поле лазерного источника удовлетворяет этому условию. Интересным представляется и наличие смещений атомных электронов, описываемых функцией $\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{Er}}{c} \frac{1}{1+\frac{\mathbf{Er}}{c^2}} dt$, из-за взаимодействия с полем ультракороткого импульса. Как видно из выражений (10) и (16), амплитуды электронных переходов и смещения атомных электронов не равны нулю при равенстве нулю интеграла от поля по времени. Фигурирующий в формулах (7)–(10) и (16) безразмерный параметр $\frac{\mathbf{Er}}{2c^2}$ по порядку величины равен отношению энергии взаимодействия атомного электрона с полем импульса к релятивистской энергии покоя данного электрона. В принятых изначально условиях это отношение мало, так как рассматривается нерелятивистская задача. Замечание о том, что смещения атомных электронов и амплитуды переходов отличны от нуля при равенстве нулю интеграла от поля по времени, справедливо при учете релятивистских эффектов, которые в рамках настоящей работы имеют поправочный характер. Найденное решение, выражаемое формулами (8), (10), (16) и (18), также может быть использовано в дальнейших работах по взаимодействию предельно коротких импульсов со средами малой плотности в самосогласованных режимах.

Работа выполнена в рамках КГЗ Министерства образования и науки РФ (# 3.1726.2014/К, при частичной поддержке РФФИ (грант # 15-02-01894) и стипендии Президента РФ (СП-1800.2015.1).

1. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, УФН **125**, 377 (1978).
2. А. Б. Мигдал, *Качественные методы в квантовой теории*, Наука, М. (1975).
3. В. И. Матвеев, Э. С. Парилис, УФН, **138**, 583 (1982).
4. В. И. Матвеев, ЭЧАЯ **26**, 780 (1995).
5. И. С. Персиваль, в кн. *Атомы в астрофизике*, под ред. Ф. Г. Берка, В. Б. Эйспера, Д. Г. Хаммера, И. С. Персиваля, Мир, М. (1998), с. 87.
6. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, Письма в ЖЭТФ **47**, 442 (1988).
7. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990).
8. S. V. Sazonov and E. V. Trifonov, J. Phys. B: Atomic, Molecular and Optical Physics **27**, L7 (1994).
9. A. Nazarkin, G. Korn, Phys. Rev. A **58**, R61 (1998).
10. А. Ю. Пархоменко, С. В. Сазонов, ЖЭТФ **114**, 1595 (1998).
11. С. В. Сазонов, ЖЭТФ **124**, 803 (2003).
12. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, Письма в ЖЭТФ **83**, 573 (2006).
13. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **102**, 951 (2015).
14. R. Moshammer, W. Schmitt, J. Ullrich, H. Kollmus, A. Cassimi, R. Dörner, O. Jagutzki, R. Mann, R. E. Olson, H. T. Prinz, H. Schmidt-Böcking, and L. Spielberger, Phys. Rev. Lett. **79**, 3621 (1997).
15. J. Eichler and W. E. Meyrhoft, *Relativistic Atomic Collisions*, Academic Press Inc., N.Y. (1995).
16. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
17. P. Pierre Agostini and L. F. DiMauro, Rep. Prog. Phys. **67**, 813 (2004).
18. P. B. Corkit and F. Krausz, Nature Phys. **3**, 381 (2007).
19. V. Astapenko, *Interaction of Ulrashort Electomagnetic Pulses with Matter*, Springer Briefs in Physics, Springer-Verlag Berlin, and Heidelberg GmbH and Co. KG (2013), 102 p.
20. А. М. Желтиков, УФН **181**, 33 (2011).
21. A. Lugovskoy and I. Bray, Phys. Rev. A **77**, 023420 (2008).
22. M. Klaiber, D. Dimitrovski, and J. S. Briggs, Phys. Rev. A **79**, 043402 (2009).
23. D. Dimitrovski, M. Ferre, and L. B. Madsen, Phys. Rev. A **80**, 053412 (2009).
24. A. E. Kaplan, Las. Engineering **24**, 3 (2013).
25. G. Mourou, S. Mironov, E. Khazanov, and A. Sergeev, Eur. Phys. J. Special Topics **223**, 1181 (2014).
26. В. И. Матвеев, ЖЭТФ **124**, 1023 (2003).
27. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A.: Math., Nucl. Gen. **6**, 1337 (1973).
28. П. Г. Крюков, *Фемтосекундные импульсы*, Физмалит, М. (2008).
29. Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, ЖЭТФ **146**, 685 (2014).
30. Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, Письма в ЖЭТФ **101**, 170 (2015).
31. В. А. Астапенко, ЖЭТФ, **139**, 228 (2011).
32. A. J. Baltz, Phys. Rev. Lett. **78**, 1231 (1997).
33. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов, УФН **185** , 3(2015).