Письма в ЖЭТФ, том 101, вып. 3, с. 185 – 189 © 2015 г. 10 февраля

Смешанное состояние и намагниченность тонкой сверхпроводящей (II рода) пленки в параллельном магнитном поле: вариационный метод учета кора вихря

К. С. Пигальский[1)]

Институт химической физики им. Семенова РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 ноября 2014 г.

После переработки 5 декабря 2014 г.

Для тонкой сверхпроводящей пленки (параметр Гинзбурга–Ландау $\kappa \gg 1$) в параллельном поверхности магнитном поле проведены расчеты равновесной вихревой структуры и намагниченности, учитывающие пространственное изменение параметра порядка в коре вихря с помощью вариационной функции. Вариационный метод позволяет более точно, по сравнению с лондоновским приближением, учесть собственную энергию вихря (включая ее изменение при увеличении плотности вихревой решетки), межвихревые взаимодействия и взаимодействие с поверхностью. Получена формула, определяющая поправку к лондоновскому выражению для потока вихря в пленке. Сравнение результатов расчетов в этих моделях показывает, что учет структуры кора вихря становится важным, если толщина пленки $d < 50\xi$. Для таких тонких пленок обнаружен новый размерный эффект, проявляющийся в существенном различии намагниченностей пленки и бесконечного образца в области полей $0.08H_{c2} < H < 0.5H_{c2}$. Показано также, что при уменьшении d вплоть до величины $d = 10\xi$ расщепление центрального вихревого ряда происходит как фазовый переход второго рода.

DOI: 10.7868/S0370274X15030078

1. При формировании смешанного состояния в тонкой сверхпроводящей (II рода) пленке, толщина d которой порядка или меньше лондоновской глубины проникновения λ, помещенной в параллельное поверхности магнитное поле H, существенным является взаимодействие вихрей с поверхностью. Проявление размерных эффектов в такой системе впервые изучалось в [1]. В ней было найдено первое критическое поле $H_{c1}(d)$, в котором становится энергетически выгодным образование вихревой цепочки в центре пленки. Дальнейшие исследования [2–9] показали, что с увеличением H центральный ряд расщепляется на два. Далее происходит последовательное увеличение количества вихревых рядов N, сопровождающееся резкой перестройкой вихревой структуры. Найдены значения полей $H^{(N)}(d)$ образования N-го ряда. Возникающие при этом особенности на полевых зависимостях намагниченности рассчитаны в [1, 4, 6, 8]. Все эти работы были выполнены в рамках лондоновского приближения (ЛП), в котором пренебрегается структурой кора вихря, в частности пространственным изменением параметра порядка вблизи его сердцевины.

В [10] также в рамках ЛП было установлено, что расщепление центрального ряда в поле $H^{(2)}$ может происходить как структурный фазовый переход первого (а не второго) рода, если величина $t = d/\lambda$ меньше критического значения t_{cr}, при котором толщина пленки оказывается довольно малой ($d \approx 15\xi$, где ξ – длина когерентности).

С уменьшением d величины полей $H^{(N)}$ увеличиваются и при $d < \lambda$ могут значительно превышать первое критическое поле бесконечного сверхпроводника $H_{c1}(\infty)$. Анализ различных моделей для описания смешанного состояния бесконечного сверхпроводника, проведенный в [11–13], показал, что даже для сверхпроводников с параметром Гинзбурга–Ландау $\kappa \gg 1$ применимость ЛП ограничена полями в несколько $H_{c1}(\infty)$. В бóльших полях необходимо учитывать структуру кора вихря. Одним из подходов, позволяющих избежать сложной процедуры численного решения системы уравнений Гинзбурга–Ландау, является использование для описания пространственного изменения модуля параметра порядка вблизи сердцевины вихря вариационной функции, предложенной в [14]:

$$f = \frac{f_\infty \rho}{(\rho^2 + \xi_v^2)^{1/2}}. \tag{1}$$

[1)]e-mail: pigalskiy@chph.ras.ru

Здесь ρ – расстояние от центра вихря, ξ_v и f_∞ – вариационные параметры (эффективный радиус кора и параметр порядка вдали от сердцевины вихря), значения которых находят из условия минимума термодинамического потенциала. В частности, для изолированного вихря $\xi_{v0} \simeq \sqrt{2}/\kappa$ (при $\kappa \gg 1$), $f_\infty = 1$. Данный вариационный метод (ВМ) позволяет более точно по сравнению с ЛП рассчитать поле вихря, а следовательно, и межвихревые взаимодействия, а также учесть изменение собственной энергии вихря в полях $H \gg H_{c1}(\infty)$, в которых начинает проявляться перекрытие коров вихрей. В результате применения ВМ удалось получить формулу для намагниченности бесконечного сверхпроводника во всей области магнитных полей $H_{c1}(\infty) \leq H \leq H_{c2}$ (где H_{c2} – второе критическое поле) [11, 12].

В настоящей работе вариационный метод впервые применен для расчета равновесной вихревой структуры и намагниченности для тонкой сверхпроводящей пленки ($d < \lambda$, $\kappa \gg 1$). Проведено сравнение результатов, получаемых вариационным методом и в лондоновском приближении. В частности проведен анализ влияния точности расчетов на вид структурного перехода при расслоении центрального вихревого ряда.

2. Будем проводить расчеты в общепринятой геометрии [15, 16], в которой ось z направлена вдоль внешнего поля, а поверхности пленки совпадают с плоскостями $x = \pm d/2$. Ряды вихрей параллельны друг другу и поверхности и расположены симметрично относительно оси пленки ($x = 0$). Расстояние между вихрями a вдоль всех рядов одинаково, причем в соседних рядах позиции вихрей смещены на $a/2$. В соответствии с [16] плотность энергии Гиббса пленки имеет вид

$$G = \frac{1}{ad}\sum_{n=1}^{N}\left[\epsilon_0 + \frac{2\pi}{\kappa}b_n(0) - 2h\phi_v(x_n)\right]. \qquad (2)$$

Здесь и далее используются безразмерные единицы Гинзбурга–Ландау: все длины измеряются в λ, магнитное поле – в $\sqrt{2}H_c$, где H_c – термодинамическое критическое поле (в этих единицах квант магнитного потока $\phi_0 = 2\pi/\kappa$, $H_{c2} = \kappa$).

Собственная энергия вихря ϵ_0 (первый член в (2)) складывается из энергии, связанной с подавлением параметра порядка в коре вихря, и его собственной электромагнитной энергии. Второй член в (2) – электромагнитная энергия межвихревых взаимодействий, которая определяется полем в центре вихря $b_n(0)$ в n-м ряду [15], создаваемым другими вихрями и полной системой изображений:

$$b_n(0) = \sum_{p=1}^{N}\sum_{k,m=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^k b_v(\rho_{n,p,k,m}), \qquad (3)$$

где

$$\rho_{n,p,k,m} = \left\{\left[kd + (-1)^k x_p - x_n\right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{a}{4} - (-1)^{p-n}\tfrac{a}{4} + ma\right]^2\right\}^{1/2},$$

x_i – координата i-го ряда, штрих у знака суммирования означает, что опущен член с $k = m = 0$ при $p = n$ (собственное поле вихря в его центре уже учтено в ϵ_0). Третий член в (2) описывает взаимодействие пленки с внешним магнитным полем, $\phi_v(x_n)$ – поток вихря в n-м ряду.

Формулы для расчета величин, входящих в выражение для энергии Гиббса, в случае лондоновского приближения хорошо известны (см., например, [16]):

$$\epsilon_0^{(\mathrm{LA})} = \frac{2\pi}{\kappa^2}(\ln\kappa + C_1) \qquad (4)$$

(постоянная C_1 не может быть определена в рамках ЛП, ее значение $C_1 \simeq 0.5$ было вычислено в [17]),

$$b_v^{(\mathrm{LA})}(\rho) = \frac{1}{\kappa}K_0(\rho), \qquad (5)$$

где K_i – функция Макдональда i-го порядка,

$$\phi_v^{(\mathrm{LA})}(x_n) = \frac{2\pi}{\kappa}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} x_n}{\operatorname{ch}(d/2)}\right]. \qquad (6)$$

Рассмотрим последовательно соответствующие выражения, получаемые в вариационной модели. Собственная энергия и поле вихря были рассчитаны в [11]. В дальнейшем ограничимся областью полей $H < 0.5H_{c2}$, в которой перекрытие коров вихрей невелико и можно полагать $f_\infty = 1$ [11]. В этом приближении формула для собственной энергии вихря значительно упрощается и имеет вид

$$\epsilon_0^{(\mathrm{VM})} = \frac{\pi\xi_v^2}{2} + \frac{\pi}{2\kappa^2} + \frac{2\pi K_0(\xi_v)}{\kappa^2\xi_v K_1(\xi_v)}, \qquad (7)$$

а поле вихря (получаемое путем подстановки вариационной функции (1) во второе уравнение Гинзбурга–Ландау) определяется выражением

$$b_v^{(\mathrm{VM})}(\rho) = \frac{K_0\left(\sqrt{\rho^2 + \xi_v^2}\right)}{\kappa\xi_v K_1(\xi_v)}. \qquad (8)$$

Отметим, что при $\xi_v = \xi_{v0}$ функция (8) хорошо описывает результаты численного решения системы уравнений Гинзбурга–Ландау вблизи сердцевины изолированного вихря [13]; магнитный поток, создаваемый $b_v^{(\mathrm{VM})}$ в бесконечном сверхпроводнике, точно равен ϕ_0; выражение для $b_v^{(\mathrm{VM})}$ переходит в (5) в пределе $\xi_v \to 0$.

Как известно, лондоновское выражение (5) для $b_v^{(\mathrm{LA})}(\rho)$ плохо описывает поле вихря вблизи его сердцевины (расходясь на его оси), что может приводить и к неточности формулы для потока вихря (6) в случае достаточно тонких пленок. До настоящего времени вопрос границ применимости (6) не рассматривался. Рассчитаем поток изолированного вихря, смещенного на расстояние u от оси пленки, используя более точное выражение (8). Поле, создаваемое вихрем, с учетом его изображений имеет вид

$$b_v^{(\mathrm{VM})}(x,y) = \frac{1}{\kappa\xi_v K_1(\xi_v)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \times$$
$$\times K_0\left\{\sqrt{[kd+(-1)^k u - x]^2 + y^2 + \xi_v^2}\right\}. \qquad (9)$$

Выполнив преобразование Фурье по координате x (используя приемы и формулы, подобные приведенным в приложении к работе [12]) и проведя интегрирование по площади пленки, в итоге получим

$$\phi_v^{(\mathrm{VM})} = \phi_v^{(\mathrm{LA})} - \Delta\phi_v. \qquad (10)$$

Поправка $\Delta\phi_v$ к лондоновскому выражению для потока вихря имеет вид быстро сходящегося ряда:

$$\Delta\phi_v = \frac{8}{\kappa}\sum_{k=0}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi(2k+1)(d-2u)}{2d}\right] \times$$
$$\times \frac{1}{(2k+1)z(k)^2}\left\{1 - \frac{z(k)K_1[\xi_v z(k)]}{K_1(\xi_v)}\right\}, \qquad (11)$$

где $z(k) = \sqrt{1+[\pi(2k+1)/d]^2}$.

На рис. 1 приведены результаты расчета $\Delta\phi_v$, нормированной на $\phi_v^{(\mathrm{LA})}$, в зависимости от положения вихря для пленок разной толщины. Отметим, что для тонких пленок с одинаковым значением d/ξ величина $\Delta\phi_v/\phi_v^{(\mathrm{LA})}$ слабо зависит от κ при $\kappa \gg 1$. Несмотря на то что поправка довольно мала, при малой толщине пленки она оказывается существенной, поскольку при этом мала и величина потока вихря. Особенно сильно учет поправки сказывается при расчетах намагниченности M пленки:

$$4\pi M = h\left[\frac{2}{d}\,\mathrm{th}\left(\frac{d}{2}\right) - 1\right] + \frac{1}{ad}\sum_{n=1}^{N}\phi_v(x_n). \qquad (12)$$

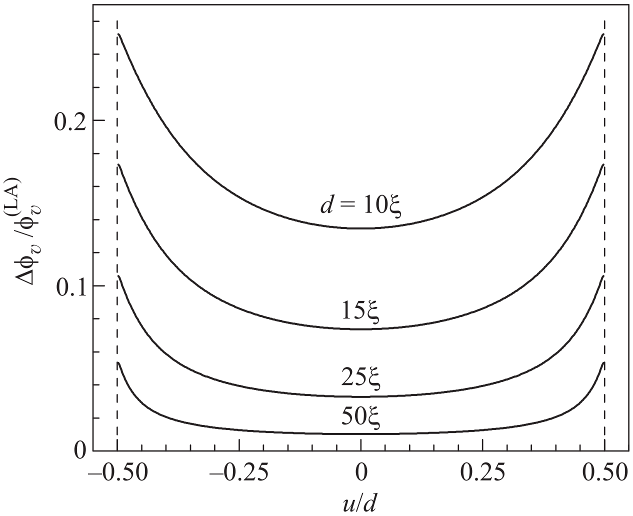

Рис. 1. Относительная величина поправки $\Delta\phi_v$ к лондоновскому выражению для потока вихря в пленке $\phi_v^{(\mathrm{LA})}$ в зависимости от положения вихря при разной толщине пленки d. Штриховая линия – граница пленки

В полях $H \gg H_{c1}$ намагниченность является разностью двух близких величин B и H, и вследствие этого очень чувствительна к точности расчетов.

3. Применим оба рассмотренных подхода для расчета вихревой структуры и намагниченности для пленки с $\kappa = 100$ и $d = 0.25$ (что соответствует $d = 25\xi$), ограничиваясь числом рядов $N \le 5$. Такая толщина пленки была подобрана из условия, что поля образования пяти рядов лежат в области $H < 0.5H_{c2}$ (т.е. можно полагать, что $f_\infty = 1$). С другой стороны, в этой области полей уже ярко проявляются все особенности, связанные с учетом кора вихря. На рис. 2 представлены полевые зависимости параметров вихревой структуры (положений рядов x_n и расстояния между вихрями вдоль рядов a), отвечающие условию минимума энергии Гиббса, как в ЛП, так и при использовании ВМ. В последнем случае минимизация G проводилась и по вариационному параметру ξ_v. Качественное поведение вихревой структуры при использовании обоих методов расчета подобно. Однако более точный учет кора приводит к заметным количественным различиям: возрастают поля образования вихревых рядов, увеличиваются расстояния между вихрями вдоль рядов, а положения рядов оказываются ближе к середине пленки. На рис. 2b также показано расстояние между вихрями в бесконечном образце для треугольной решетки. Интересно отметить, что площадь $S = (x_n - x_{n-1})a/2$, приходящаяся на один вихрь, вблизи центра пленки при $N > 2$ совпадает как для обеих моделей, так и

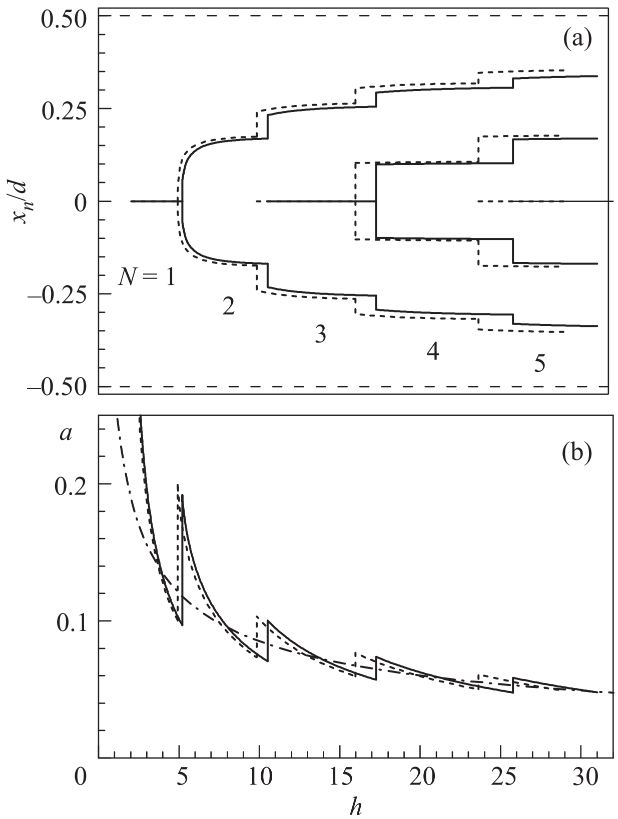

Рис. 2. Полевые зависимости положения рядов (a) и расстояния между вихрями вдоль рядов (b) для пленки с $\kappa = 100$ и $d = 0.25$. Сплошные линии – вариационный метод, штриховые – лондоновское приближение. Штрихпунктир – расстояние между вихрями в бесконечном образце

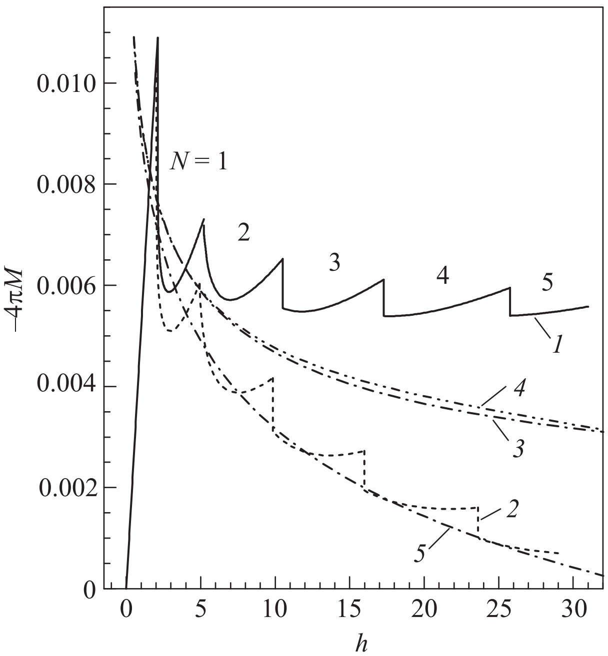

Рис. 3. Полевые зависимости намагниченности. Расчеты для пленки с $\kappa = 100$ и $d = 0.25$: *1* – вариационный метод, *2* – лондоновское приближение. Расчеты для бесконечного образца с тем же значением κ: *3*, *4* – вариационный метод, *5* – лондоновское приближение

с соответствующей величиной для бесконечного образца.

Значительно более существенными оказываются различия в поведении полевых зависимостей намагниченности (рис. 3). На этом же рисунке для сравнения приведены равновесные зависимости $M(H)$ для бесконечного образца, рассчитанные в рамках как ВМ (кривые *3* и *4*), так и ЛП (кривая *5*). Необходимые для таких расчетов формулы подробно рассмотрены в [12]. Кривая *3* отвечает тем же приближениям, что и при расчетах для пленки, кривая *4* – результаты полного расчета, включающего минимизацию по вариационному параметру f_∞ (формулы (19) и (20) из [12]).

При малом числе вихревых рядов зависимости $M(H)$ для пленки, рассчитанные обоими методами (кривые *1* и *2*), сильно осциллируют, отслеживая образование каждого последующего ряда. Подобные, но менее выраженные осцилляции были получены в [4, 6] и для пленок бо́льшей толщины ($d \geq 2$). Однако с увеличением поля (и, соответственно, N) проявляются качественные различия в результатах расчета. В случае лондоновского приближения зависимость $M(H)$ (кривая *2*) приближается к соответствующей кривой для бесконечного образца, что полностью согласуется с выводами работы [16], также полученными в ЛП. Более точный учет кора приводит к неожиданному результату: величина $-4\pi M$ для пленки уменьшается с полем значительно медленнее, чем соответствующая величина для бесконечного образца, не приближаясь к ней и превышая ее почти в два раза в поле $h = 30$. Анализ показывает, что этот эффект связан главным образом с меньшей величиной потока вихря ϕ_v при использовании более точного (по сравнению с ЛП) выражения (10) для ϕ_v. Как видно из рис. 1, чем меньше d, тем существеннее уменьшение $\phi_v^{(\mathrm{VM})}$ относительно $\phi_v^{(\mathrm{LA})}$, т.е. тем сильнее сказывается более точное описание поля вихря вблизи его сердцевины на результаты расчета. Таким образом, применение вариационного метода позволило обнаружить новый размерный эффект для пленок малой толщины ($d < 50\xi$) – заметное различие намагниченностей пленки и бесконечного образца в области магнитных полей $0.08H_{c2} < H < 0.5H_{c2}$. Расчеты в бо́льших полях, т.е. при бо́льшей плотности вихрей, выходят за рамки используемых в работе приближений и являются предметом дальнейших исследований.

В литературе существует лишь ограниченное число экспериментальных данных о поведении $M(H)$ для систем, близких рассматриваемой в настоящей работе. Намагниченность тонкой пленки Nb измерялась в [18]. Однако заметный гистерезис из-за поверхностного барьера не позволил получить достоверную информацию о величине равновесной намагниченности. Намагниченность многослойных гетероструктур Nb/Cu (в которых поверхностный барьер значительно подавлен) исследовалась в [4, 19]. Качественно поведение экспериментальных зависимостей $M(H)$ (которые, осциллируя около некоторого уровня, быстро спадают вблизи H_{c2}) лучше соответствует результатам расчетов вариационным методом, чем полученным в лондоновском приближении (а также сильно отличается от поведения $M(H)$ для массивных образцов). Однако для проведения количественного сравнения необходимы дополнительные экспериментальные исследования.

4. Вернемся коротко к вопросу о том, как происходит расщепление центрального вихревого ряда в непосредственной близости к полю $h^{(2)}$ (см. рис. 4). Расчеты с использованием ВМ показывают,

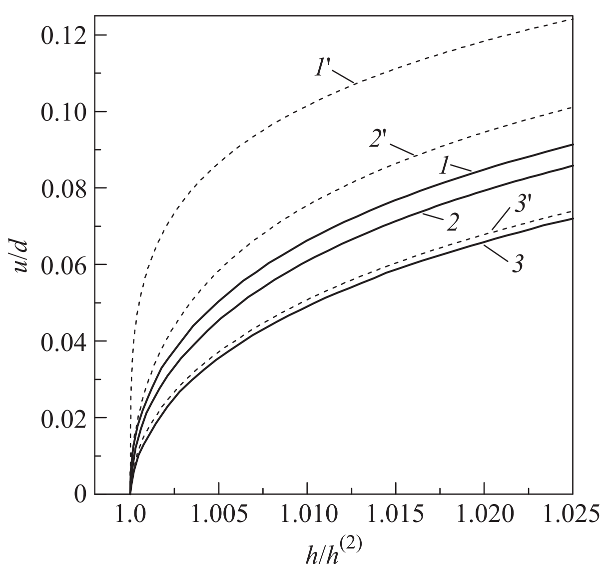

Рис. 4. Зависимость положения вихревых рядов от внешнего поля вблизи $h^{(2)}$ при разных d (в единицах λ): 0.1 (*1, 1'*); 0.15 (*2, 2'*) и 0.5 (*3, 3'*). Сплошные кривые – вариационный метод, штриховые – лондоновское приближение

что этот процесс имеет типичный вид фазового перехода (ФП) второго рода даже при уменьшении толщины пленки до значения $d = 10\xi$ (кривая *1* на рис. 4). Вид ФП сохраняется и при расчетах в рамках ЛП, однако в этом случае расщепление центрального ряда оказывается более резким, а протяженность участка $u(h)$ вблизи $h^{(2)}$, близкого к вертикальному, увеличивается с уменьшением d.

Эти результаты находятся в противоречии с выводам работы [10], в которой было обнаружено наличие двух близко расположенных устойчивых вихревых позиций в полях немного ниже $h^{(2)}$ для $d \approx 10\xi$, что трактуется автором [10] как проявление фазового перехода первого рода. В [10] при расчете энергии Гиббса вместо прямого суммирования полей вихрей и их изображений (применяемого в настоящей работе) использовалось разложение в ряд Фурье. В результате применения такого преобразования возможно появление на зависимости $G(u)$ слабых локальных минимумов при учете конечного числа членов ряда, что в итоге и может послужить объяснением полученных в [10] результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант # 14-19-00781).

1. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **46**, 1464 (1964).
2. C. Carter, Canad. J. Phys. **47**, 1447 (1969).
3. S. Takács, Czech. J. Phys. B **33**, 1248 (1983).
4. J. Guimpel, L. Civale, F. de la Cruz, J. M. Murduck, and I. K. Schuller, Phys. Rev. B **38**, 2342 (1988).
5. S. H. Brongersma, E. Verweij, N. J. Koeman, D. G. de Groot, R. Griessen, and B. I. Ivlev, Phys. Rev. Lett. **71**, 2319 (1993).
6. К. С. Пигальский, Л. Г. Мамсурова, ФТТ **39**, 1943 (1997).
7. G. Carneiro, Phys. Rev. B **57**, 6077 (1998).
8. E. Sardella, M. M. Doria, and P. R. S. Netto, Phys. Rev. B **60**, 13158 (1999).
9. Д. А. Лужбин, ФТТ **43**, 1751 (2001).
10. Д. А. Лужбин, Письма в ЖЭТФ **93**, 566 (2011).
11. Z. Hao, J. R. Clem, M. W. McElfresh, L. Civale, A. P. Malozemoff, and F. Holtzberg, Phys. Rev. B **43**, 2844 (1991).
12. В. В. Погосов, А. Л. Рахманов, К. И. Кугель, ЖЭТФ **118**, 676 (2000).
13. Л. Г. Мамсурова, К. С. Пигальский, В. В. Погосов, Н. Г. Трусевич, ФНТ **27**, 153 (2001).
14. J. R. Clem, J. Low Temp. Phys. **18**, 427 (1975).
15. В. В. Шмидт, ЖЭТФ **61**, 398 (1971).
16. А. И. Русинов, Г. С. Мкртчян, ЖЭТФ **61**, 773 (1971).
17. C. R. Hu, Phys. Rev. B **6**, 1756 (1972).
18. A. Pan, M. Ziese, R. Höhne, P. Esquinazi, S. Knappe, and H. Koch, Physica C **301**, 72 (1998).
19. M. Ziese, P. Esquinazi, P. Wagner, H. Adrian, S. H. Brongersma, and R. Griessen, Phys. Rev. B **53**, 8658 (1996).