Пространственная когерентность в переходном излучении коротких электронных сгустков

А. П. Потылицын[1)]

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 634050 Томск, Россия

Поступила в редакцию 2 февраля 2016 г.

После переработки 19 апреля 2016 г.

В работе рассмотрены характеристики когерентного переходного излучения (КПИ), которое генерируется "дискообразным" электронным сгустком, наклоненным относительно направления его распространения. Показано, что в силу пространственной когерентности угловое распределение ПИ становится асимметричным. Для углов наклона, существенно превышающих характерный угол излучения, равный обратному лоренц-фактору, угловое распределение для длин волн, сравнимых с продольным размером сгустка, становится одномодальным. В этом случае максимум выхода КПИ будет совпадать с углом наклона сгустка.

DOI: 10.7868/S0370274X16110023

Когерентное излучение сгустка электронов обусловлено синфазностью испускаемых волн независимыми частицами сгустка. Как правило, в современных ускорителях используются сгустки, эффективный продольный размер которых σ_l существенно превышает поперечный σ_t ($\sigma_l \gg \sigma_t$). Для таких сгустков синфазность достигается на длинах волн, сравнимых или превышающих длину сгустка σ_l, тогда как от поперечного распределения электронов характеристики когерентного излучения практически не зависят [1, 2]. В этом случае говорят о "временно́й" когерентности.

Как будет показано далее, пространственная когерентность начинает играть роль для коротких электронных сгустков при выполнении соотношения $\sigma_t \geq \sigma_l$.

Одним из способов получения ультракоротких сгустков (субпикосекудной длительности) является методика трансформации поперечно-сегментированного сгустка, например, прошедшего через экран с узкими щелями, в продольно-модулированный сгусток ("transverse-to-longitudinal phase space exchange technique") [3, 4]. В этом случае поперечный размер полученных сгустков σ_t существенно превышает продольный σ_l ($\sigma_t \gg \sigma_l$) в отличие от пучков традиционных ускорителей, где выполняется обратное соотношение. Длительность пикосекундных и субпикосекундных сгустков ($\sigma_l \leq 300$ мкм) определяется, как правило, по измеренному спектру когерентного переходного излучения (КПИ) [5, 6].

Спектрально-угловое распределение КПИ определяется через форм-фактор сгустка $F(\mathbf{k})$ [5, 7]

$$\frac{d^2W_{\mathrm{CTR}}}{d\omega d\Omega} = [N + N(N-1)F(\mathbf{k})]\frac{d^2W_{\mathrm{TR}}}{d\omega d\Omega}. \quad (1)$$

Здесь N – число электронов в сгустке, $\frac{d^2W_{\mathrm{TR}}}{d\omega d\Omega}$ – спектрально-угловое распределение ПИ от единичного электрона. Форм-фактор сгустка $F(\mathbf{k})$ связывает характеристики излучения с распределением электронов в сгустке:

$$F(\mathbf{k}) = \left|\int \rho(\mathbf{r}) \exp[-i\Delta\varphi] d\mathbf{r}\right|^2, \ \Delta\varphi = \mathbf{k}\Delta\mathbf{r} - \omega\Delta t. \quad (2)$$

В формуле (2) $\rho(\mathbf{r})$ – распределение электронов в сгустке, $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ – волновой вектор, $\omega = 2\pi c/\lambda$ – частота КПИ с длиной волны λ. Величины $\Delta\mathbf{r}$ и Δt поясняются ниже.

Когерентное переходное излучение обусловлено динамической поляризацией электронных оболочек атомов покоящейся мишени, поэтому фазовый множитель в (2) будет отличаться от аналогичного множителя для процесса излучения ускоренного заряда (например, для когерентного синхротронного излучения [8]).

Сдвиг фазы $\Delta\varphi$ для случая КПИ находится из простых геометрических соотношений (см. рис. 1), где для определенности рассматривается переходное излучение "назад" ("*backward transition radiation*", BTR).

1)e-mail: potylitsyn@tpu.ru

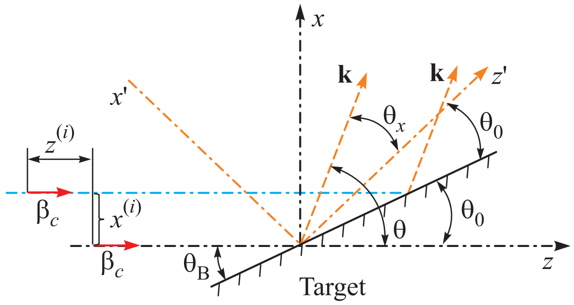

Рис. 1. (Цветной онлайн) Кинематика переходного излучения "назад"

Источниками волн переходного излучения будем считать точки, в которых электроны пересекают мишень, наклоненную к направлению скорости электронов под углом θ_0. Электрон, расположенный в центре сгустка, пересекает мишень в начале координат, электрон с поперечными координатами $\{x^{(i)}, y^{(i)}\}$ в точке $\mathbf{r}^{(i)} = \{x^{(i)}, y^{(i)}, x^{(i)}/\tan\theta_0\}$. Таким образом,

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(i)} - \mathbf{r}_0 = \{x^{(i)}, y^{(i)}, x^{(i)}/\tan\theta_0\}. \tag{3}$$

Время "запаздывания" $\Delta t^{(i)}$ находится из тех же построений

$$\Delta t^{(i)} = 1/\beta c(x^{(i)}/\tan\theta_0 - z^{(i)}), \tag{4}$$

βc – скорость электрона.

Переходное излучение "назад" для ультрарелятивистских частиц ($\gamma \gg 1$, γ – лоренц-фактор частицы) сосредоточено в конусе вблизи угла зеркального отражения, поэтому компоненты волнового вектора $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ простейшим образом выражаются в штрихованной системе координат, повернутой относительно исходной (где скорость электрона βc направлена вдоль оси z) на угол $2\theta_0$ (см. рис. 1):

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{\theta_x, \theta_y, 1 - \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2}\right\}. \tag{5}$$

В формуле (5) проекционные углы $\theta_x, \theta_y \sim \gamma^{-1}$ отсчитываются от направления зеркального отражения. Записывая в штрихованной системе компоненты вектора $\mathbf{r}^{(i)}$:

$$x' = x\cos 2\theta_0 - z\sin 2\theta_0,$$

$$y' = y,$$

$$z' = x\sin 2\theta_0 + z\cos 2\theta_0,$$

можно получить фазовый множитель в следующем виде:

$$\Delta\varphi = \mathbf{k}\Delta\mathbf{r} - \omega\Delta t = \frac{2\pi}{\lambda} \times$$

$$\times \left\{-x\theta_x + y\theta_y + \frac{z}{\beta} - \frac{x}{2\tan\theta_0}(1/\gamma^2 + \theta_x^2 + \theta_y^2)\right\}.$$

Здесь и далее индекс (i) опущен.

Пренебрегая слагаемыми, пропорциональными γ^{-2}, имеем:

$$\Delta\varphi_{\mathrm{BTP}} \approx \frac{2\pi}{\lambda}\{-x\theta_x + y\theta_y + z\}. \tag{6}$$

Слагаемые, пропорциональные компонентам волнового вектора, определяют эффекты пространственной когерентности, поскольку зависят от поперечных координат электронов в сгустке.

Совершенно аналогично можно получить фазовый множитель для переходного излучения "вперед" ("*forward transition radiation*", FTR):

$$\Delta\varphi_{\mathrm{FTR}} \approx \frac{2\pi}{\lambda}\{x\theta_x + y\theta_y + z\}. \tag{7}$$

После поворота в фазовом пространстве сгусток приобретает эллипсоидальную форму, малая ось которого может не совпадать с направлением его распространения (наклонный дискообразный эллипсоид, см. рис. 2). В системе координат $\{X, Y, Z\}$, связанной с эллипсоидом, малая ось эллипсоида направлена вдоль оси Z, которая наклонена относительно исходной оси z под углом ψ.

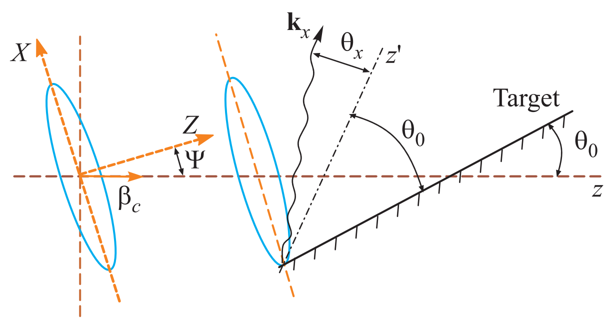

Рис. 2. (Цветной онлайн) Схема генерации когерентного переходного излучения наклонным эллипсоидальным сгустком

Для упрощения вычислений допустим, что распределение $\rho(\mathbf{r})$ описывается тремя независимыми гауссианами в системе $\{X, Y, Z\}$:

$$\rho\{X, Y, Z\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{X^2}{\sigma_x^2} + \frac{Y^2}{\sigma_y^2} + \frac{Z^2}{\sigma_z^2}\right)\right\}. \tag{8}$$

Чтобы вычислить форм-фактор (2), перейдем в исходную систему поворотом на угол ψ (см. рис. 2)

$$\rho\{x, y, z\} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sigma_x\sigma_y\sigma_z} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\frac{(x\cos\psi - z\sin\psi)^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(x\sin\psi + z\cos\psi)^2}{\sigma_z^2}\right]\right\}.$$

Трехмерное интегрирование в (2) выполняется аналитически:

$$F(\mathbf{k}) = F(\omega, \theta_x, \theta_y) =$$
$$= \exp\left\{ -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}[\sigma_x^2\sin^2\psi + \sigma_z^2\cos^2\psi + \theta_x(\sigma_x^2 - \sigma_z^2)\times\right.$$
$$\left.\times\sin 2\psi + \theta_x^2(\sigma_x^2\cos^2\psi + \sigma_z^2\sin^2\psi) + \theta_y^2\sigma_y^2]\right\}. \quad (9)$$

Ранее анализировалась, как правило, стандартная конфигурация сгустков: $\sigma_z \gg \sigma_x, \sigma_y$; $\psi = 0$. В этом случае формула (9) сводится к известному выражению, где эффекты, связанные с пространственной когерентностью, пренебрежимо малы:

$$F_0(\omega) \approx \exp\left\{-4\pi^2\left(\frac{\sigma_z^2}{\lambda^2} + \frac{\sigma_x^2\theta_x^2}{\lambda^2} + \frac{\sigma_y^2\theta_y^2}{\lambda^2}\right)\right\} \approx$$
$$\approx \exp\left\{-4\pi^2\frac{\sigma_z^2}{\lambda^2}\right\}. \quad (10)$$

Однако для "дискообразной" конфигурации при наклонной ориентации диска ($\psi \neq 0$) из (9) следует, что "эффективный" продольный размер сгустка будет определяться первым слагаемым в показателе экспоненты:

$$\sigma_l^2 = \sigma_x^2\sin^2\psi + \sigma_z^2\cos^2\psi > \sigma_z^2, \quad (11)$$

т.е. когерентный спектр будет смещаться в область более длинных волн.

Спектрально-угловое распределение КПИ рассчитывается по формулам (1) и (9). Для представляющих интерес случаев ($N \gg 1$, $\gamma \gg 1$) первым слагаемым в формуле (1) можно пренебречь:

$$\frac{d^2W_{\rm CTR}}{d\omega d\Omega} \approx N^2F(\omega,\theta_x,\theta_y)\frac{e^2}{\pi^2c}\frac{\theta_x^2+\theta_y^2}{(\gamma^{-2}+\theta_x^2+\theta_y^2)^2}. \quad (12)$$

Полученное выражение записано для идеально проводящей мишени, хотя выражение для форм-фактора справедливо и в более общем случае.

Если угол наклона "диска" мал ($|\psi| \ll 1$), то показатель экспоненты в (9) можно записать в виде:

$$\{\,\} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}[\sigma_x^2(\psi^2 + 2\theta_x\psi + \theta_x^2) + \sigma_y^2\theta_y^2 + \sigma_z^2] =$$
$$= -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}[\sigma_x^2(\psi+\theta_x)^2 + \sigma_y^2\theta_y^2 + \sigma_z^2]. \quad (13)$$

В полученном выражении опущены члены второго порядка малости. Для такой конфигурации сгустка форм-фактор (9) факторизуется:

$$F(\omega,\theta_x,\theta_y) = F_l(\omega)F_t(\omega,\theta_x,\theta_y). \quad (14)$$

В этом случае продольный форм-фактор

$$F_l(\omega) = \exp\left[-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sigma^2\right] \quad (15)$$

определяется только продольным размером сгустка, тогда как поперечный форм-фактор

$$F_t(\omega,\theta_x,\theta_y) = \exp\left\{-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}[\sigma_x^2(\psi+\theta_x)^2 + \sigma_y^2\theta_y^2]\right\} \quad (16)$$

зависит от поперечных размеров сгустка и угла наклона ψ.

Для начала рассмотрим "перпендикулярную" ориентацию сгустка ($\psi = 0$):

$$\frac{d^2W_{\rm CTR}}{d\omega d\Omega} \approx N^2\exp\left\{-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sigma_z\right\}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}(\sigma_x^2\theta_x^2 + \sigma_y^2\theta_y^2)\right\}\frac{e^2}{\pi^2c}\frac{\theta_x^2+\theta_y^2}{(\gamma^{-2}+\theta_x^2+\theta_y^2)^2}. \quad (17)$$

Продольный форм-фактор стремится к единице в области длин волн $\lambda \gg \sigma_z$, т.е. излучение в этом диапазоне длин волн обладает "временно́й" когерентностью.

Поскольку интенсивность некогерентного ПИ достигает максимума для углов $\theta_x, \theta_y \sim \gamma^{-1}$, поперечный форм-фактор, характеризующий "пространственную" когерентность, приближается к единице в указанной области углов в случае, если поперечные размеры сгустка удовлетворяют условию:

$$\sigma_x, \sigma_y \ll \lambda/2\pi. \quad (18)$$

В противоположном случае эффект пространственной когерентности приводит к подавлению выхода КПИ (см. рис. 3 и 4).

Для наклонного падения диска минимального значения показатель экспоненты в (16) достигает для угла вылета фотона $\theta_x \simeq -\psi$, т.е. в этом случае выход фотонов КПИ будет максимальным.

На рис. 5 приведены угловые распределения КПИ для следующих параметров: $\gamma = 50$; $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_t/2$, $\lambda = \sigma_z\pi/2$, $\psi = 0$; $-5\gamma^{-1}$; $-10\gamma^{-1}$.

Расчеты проводились для угла наклона мишени $\theta_0 = 45°$. Зависимость характеристик КПИ от этого угла неявным образом входит в выражение (17), поскольку проекционные углы θ_x, θ_y отсчитываются

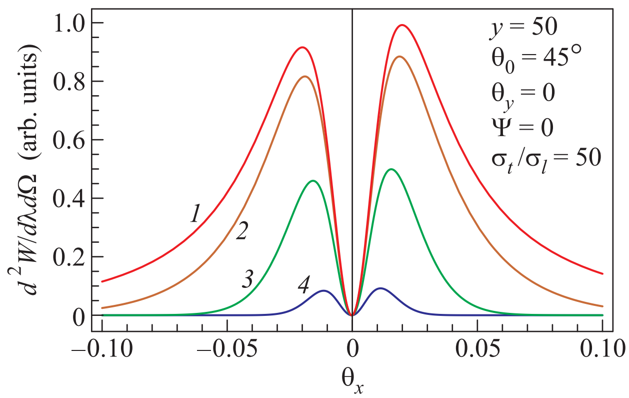

Рис. 3. (Цветной онлайн) Угловые распределения КПИ для перпендикулярной ориентации сгустка ($\psi = 0$). Кривая *1* – $\lambda = 100\sigma_z$, кривая *2* – $\lambda = 25\sigma_z$, кривая *3* – $\lambda = 10\sigma_z$, кривая *4* – $\lambda = 5\sigma_z$

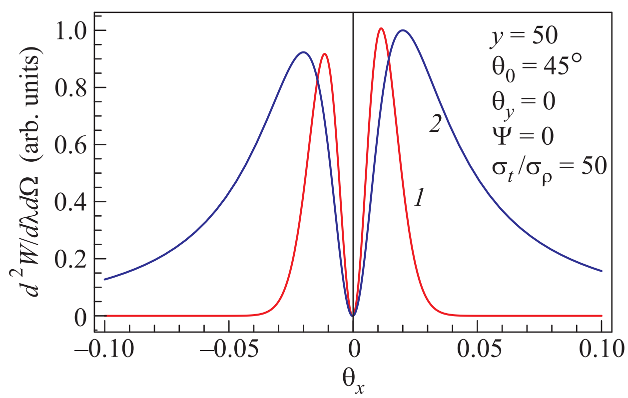

Рис. 4. (Цветной онлайн) Сравнение угловых распределений КПИ (кривая *1*, $\lambda = 5\sigma_z$) и некогерентного ПИ (кривая *2*). Кривые нормированы по максимуму

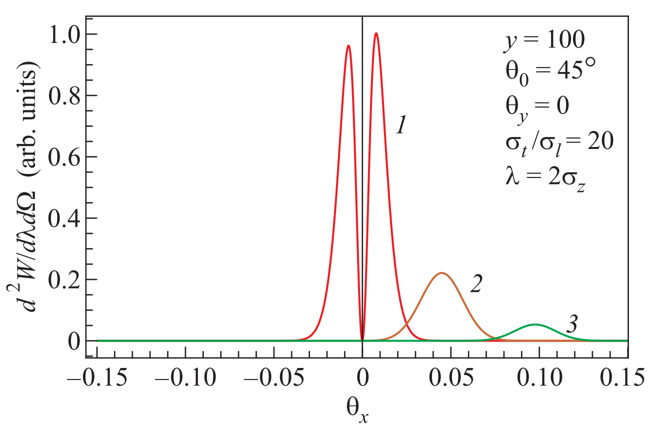

Рис. 5. (Цветной онлайн) Угловые распределения КПИ для наклонного падения эллипсоидального сгустка. Кривая *1* – $\psi = 0$; кривая *2* – $\psi = -0.05$; кривая *3* – $\psi = -0.1$

от направления зеркального отражения от мишени, повернутой на угол θ_0 относительно скорости электрона.

Как следует из рис. 5, при существенном нарушении пространственной когерентности максимум выхода КПИ сдвигается при изменении угла наклона в соответствии с формулой (16). Асимметрия угловых распределений КПИ наиболее ярко проявляется при углах наклона эллипсоида $|\psi| \gg \gamma^{-1}$ (см. кривые *2*, *3*). В этом случае вместо стандартного "двугорбого" распределения переходного излучения наблюдается единственный максимум, который можно трактовать как проявление черенковского механизма излучения при сверхсветовом движении источника излучения [9, 10]. Источником излучения в данном случае является ограниченная область на поверхности мишени, где электроны сгустка взаимодействуют с поверхностью мишени (см. рис. 2). Из элементарных геометрических построений можно определить скорость перемещения такого источника вдоль поверхности мишени:

$$\nu_s = \beta c \frac{\cos\psi}{\cos(\theta_0 - \psi)} > c, \text{ если}$$

$$\theta_0 > \max\{-\gamma^{-2}/2\tan\psi, 2\psi + \gamma^{-2}/2\tan\psi\}. \tag{19}$$

Таким образом, угол, под которым распространяется черенковское излучение (относительно скорости источника, т.е. относительно поверхности мишени) определяется соотношением:

$$\cos\theta_{\text{ch}} = c/\nu_s = \cos(\theta_0 - \psi)/\beta\cos\psi. \tag{20}$$

Для углов наклона эллипсоида $\psi \ll 1$ в ультрарелятивистском случае имеем:

$$\cos\theta_{\text{ch}} \approx \cos(\theta_0 - \psi), \quad \theta_{\text{ch}} \approx \theta_0 - \psi. \tag{21}$$

Переходя к проекционному углу θ_x (см. рис. 2), получим связь между углами θ_x и ψ:

$$\theta_x = \theta_{\text{ch}} - \theta_0 \approx -\psi,$$

что согласуется с ранее полученными результатами (см. рис. 5).

Знак минус в последнем выражении соответствует правилу определения углов (отрицательные значения угла, соответствуют области между осью z' и плоскостью мишени, см. рис. 1).

Зависимость "полного" форм-фактора (14) от длины волны для фиксированного угла вылета фотонов КПИ ($\theta_x = 0.01$, $\theta_y = 0$) приведена на рис. 6 для различных углов наклона ψ. С увеличением угла

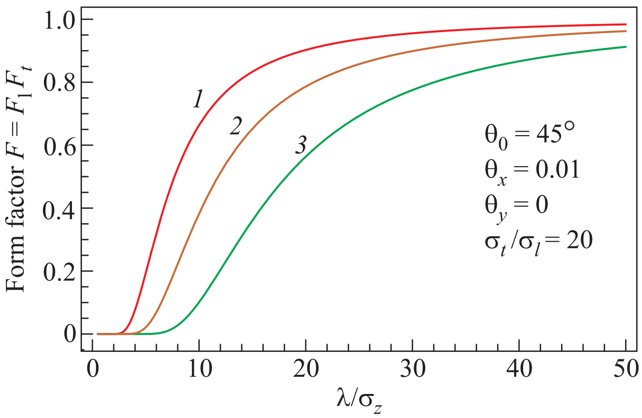

Рис. 6. (Цветной онлайн) Зависимость “полного” форм-фактора $F = F_l F_t$ от длины волны. Кривая *1* – $\psi = 0$; кривая *2* – $\psi = 0.05$; кривая *3* – $\psi = 0.1$

наклона диска ψ возрастает “эффективный” продольный размер сгустка (см. (11)) и, следовательно, “порог когерентности” сдвигается в длинноволновую часть спектра. Ясно, что спектр КПИ, измеренный для конечного телесного угла $\Delta\Omega = \Delta\theta_x \Delta\theta_y$ и в этом случае будет зависеть от угла наклона эллипсоидального сгустка.

Таким образом, в заключение следует отметить, что в случае неопределенного значения угла наклона “дискообразного” сгустка ψ измерения спектра КПИ не позволяют получить информацию об “истинном” продольном размере сгустка. Величина угла наклона эллипсоида может быть определена при дополнительных измерениях асимметричного углового распределения когерентного переходного излучения.

Работа выполнена в рамках программы “Наука” Минобразования РФ, проект # 3.709.2014/К.

---

1. V. L. Ginzburg and V. N. Tsytovich, *Transition Radiation and Transition Scattering*, Adam Hilger, N.Y.–London (1990).
2. H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2003), 922 p.
3. Y.-E. Sun, P. Piot, A. Johnson, A. H. Lumpkin, T. J. Maxwell, J. Ruan, and R. Thurman-Keup, Phys. Rev. Lett. **105**, 234801 (2010).
4. P. Piot, Y.-E. Sun, T. Y. Maxwell, J. Ruan, A. H. Lumpkin, M. M. Rihaoui, and R. Thurman-Keup, App. Phys. Lett. **98**, 261501 (2011).
5. Y. Shibata, T. Takahashi, T. Kanai, K. Ishi, and M. Ikezawa, Phys. Rev. E **50**, 1479 (1994).
6. E. Chiadroni, A. Bacci, M. Bellaveglia et al. (Collaboration), App. Phys. Lett. **102**, 094101 (2013).
7. A. P. Potylitsyn, M. I. Ryazanov, M. N. Strikhanov, and A. A. Tishchenko, *Diffraction Radiation from Relativistic particles*, Springer-Verlag, Berlin (2010), p. 239.
8. E. B. Blum, U. Happek, and A. J. Sievers, Nucl. Instrum. and Methods A **307**, 568 (1991).
9. B. M. Bolotovskii and A. V. Serov, Physics-Uspekhi **175**, 943 (2005).
10. B. M. Bolotovskii and A. V. Serov, Zh. Tekh. Fiz. **72**, 3 (2002).