

Неупругие процессы и переизлучение импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности при взаимодействии с атомами

Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев¹⁾

Северный (Арктический) федеральный университет им. Ломоносова, 163002 Архангельск, Россия

Поступила в редакцию 10 апреля 2016 г.

После переработки 18 мая 2016 г.

На основе аналитического решения уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений рассмотрены неупругие процессы и переизлучение атомами импульсов электромагнитного поля аттосекундной и меньшей длительности. Развита методика расчетов, позволяющая произвести точный учет пространственной неоднородности поля ультракороткого импульса и импульсов фотонов в процессах переизлучения. Результаты представлены в виде аналитических формул. В качестве примеров рассчитаны вероятности неупругих процессов и спектры переизлучения ультракоротких импульсов электромагнитного поля одноэлектронными атомами.

DOI: 10.7868/S0370274X16120043

1. Введение. Достигнутый к настоящему времени прогресс в методах генерации коротких и ультракоротких электромагнитных импульсов позволил преодолеть “фемтосекундный рубеж” и получить импульсы длительностью в несколько десятков аттосекунд. Появилось новое направление – аттосекундная физика (см., например, обзоры [1–5]) и возможность наблюдения атомных явлений в реальном масштабе времени. Для описания процессов, сопровождающих взаимодействие ультракоротких импульсов с атомами, обычно используются следующие подходы. Для импульсов более коротких, чем характерное атомное время, но более “длинных”, чем аттосекундные, целесообразно применять подходы, основанные на разложении Магнуса для оператора эволюции. Причем до настоящего времени расчеты проводят, учитывая лишь первые несколько членов в разложении [6] оператора эволюции. При этом обычно поле импульса предполагается пространственно однородным на размерах мишени [7–9]. Для импульсов же таких, как аттосекундные и меньшей длительности, естественно применять приближение внезапных возмущений. Тем более что в настоящее время активно обсуждаются возможности (см., например, [10, 11]) генерации значительно более коротких, чем аттосекундные, импульсов. Недавно в работе [12] найдено точное решение уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений при взаимодействии импульсов электромагнитного поля аттосекундной и

меньшей длительности с многоэлектронными атомами. Обычно считается [13], что электрическое поле лазерного источника в пустоте удовлетворяет условию равенства нулю интеграла от поля по времени, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} dt = 0$, где \mathbf{E} – напряженность электрического поля лазерного излучения. Описание взаимодействия атомного электрона в приближении внезапных возмущений предполагает, что во время действия поля импульса электрон предполагается свободным, поэтому поглощение лазерного излучения в пустом пространстве представляет собой существенно нелинейный по полю эффект. Точное решение, полученное в работе [12], позволяет рассчитывать именно такие эффекты.

В настоящей работе на основе точного решения [12] уравнения Шредингера в приближении внезапных возмущений развит метод расчетов неупругих процессов и спектров переизлучения предельно коротких импульсов электромагнитного поля атомами. В рассматриваемых нами случаях считается, что длительность таких импульсов τ значительно меньше характерного атомного времени τ_a , т.е. $\tau \ll \tau_a$. Таким образом, нами рассматриваются электромагнитные импульсы аттосекундной и меньшей длительности. Развита методика позволяет произвести точный учет, как пространственной неоднородности поля электромагнитного импульса, так и импульсов фотонов в процессах переизлучения. При этом поле падающего импульса учитывается точно в рамках приближения внезапных возмущений, а процесс излучения фотона описывается по теории возмущений.

¹⁾e-mail: mezon98@mail.ru

Результаты представлены в виде простых аналитических формул.

2. Общая часть. Пусть на атом падает импульс электромагнитного поля, представляющий собой плоские волны, распространяющиеся в направлении \mathbf{n}_0 . Длительность импульса τ считаем значительно меньшей характерного атомного времени. Напряженность электрической компоненты поля этого импульса в точке \mathbf{r} в момент времени t запишем в виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\eta)$, где $\eta = t - \mathbf{n}_0 \mathbf{r}/c$, \mathbf{r} , c – скорость света, а скалярный и векторный потенциалы равны [12, 14]: $\varphi = -(\mathbf{E}\mathbf{r})$, $\mathbf{A} = \mathbf{n}_0 \varphi = -\mathbf{n}_0(\mathbf{E}\mathbf{r})$. Будем считать атом расположенным в начале системы координат, что ограничивает область изменения \mathbf{r} окрестностью начала системы координат в пределах порядка характерного размера атома. При этом взаимодействие падающего импульса с атомом отличается от нуля только в интервале времени $\tau \ll 1$, описанном вокруг точки $t = 0$. Поэтому без потери общности можно считать, что $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t = -\infty) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t = +\infty) = 0$. Решение уравнения Шредингера для атома, взаимодействующего с полем падающего импульса (с учетом начального условия $\Psi(t \rightarrow -\infty) = \varphi_0$, где φ_0 – начальная волновая функция атома) имеет вид [12]:

$$\Psi(t) = \varphi_0(\{x_a, y_a, z_a + \delta_a\}) \times \prod_{a=1}^{a=N} \frac{1}{\sqrt{|1 + \frac{\mathbf{E}\mathbf{r}_a}{c^2}|}} \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^t \mathbf{E}\mathbf{r}_a \frac{1 + \frac{\mathbf{E}\mathbf{r}_a}{2c^2}}{1 + \frac{\mathbf{E}\mathbf{r}_a}{c^2}} dt \right\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_a = x_a, y_a, z_a$ – координаты атомного электрона с номером a , $\{x_a, y_a, z_a\}$ – совокупность координат атомных электронов, ($a = 1, \dots, N$), N – число атомных электронов, соответственно $\varphi_0(\{x_a, y_a, z_a\})$ – волновая функция основного состояния многоэлектронного атома, $\delta_a = \int_{-\infty}^t \frac{\mathbf{E}\mathbf{r}_a}{c} \frac{1}{1 + (\mathbf{E}\mathbf{r}_a/c^2)} dt$. Здесь и ниже используются атомные единицы: $m_e = \hbar = e = 1$, m_e – масса электрона, \hbar – постоянная Планка, e – заряд электрона, скорость света $c \approx 137$ ат.ед. Формула (1) описывает эволюцию волновой функции атома только в течении времени действия налетающего импульса. Если атом до действия импульса находился в состоянии φ_0 , тогда амплитуда вероятности обнаружить систему в каком-либо состоянии φ_n после действия импульса равна

$$a_{0,n} = \langle \varphi_n | \Psi(t = +\infty) \rangle, \quad (2)$$

где $\Psi(t = +\infty)$ – функция (1) при $t = +\infty$. Если рассматривать нерелятивистские поля и считать выполненными неравенства $E \ll c/\tau$ и $E \ll c^2$, тогда в нулевом приближении по малым параметрам $E\tau/c \ll 1$ и $E/c^2 \ll 1$ (что, как указано в [12], соответствует

пренебрежению магнитной компонентой поля электромагнитного импульса) функцию (1) можно переписать в простом виде

$$\Psi(t) = \varphi_0(\{x_a, y_a, z_a\}) e^{-i \sum_{a=1}^N \int_{-\infty}^t \mathbf{E}\mathbf{r}_a dt}. \quad (3)$$

Очевидно, что если считать выполненным условие $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} dt = 0$, то амплитуды (2) (при $n \neq 0$) с волновой функцией (3) равны нулю. В таком случае для нахождения амплитуды перехода следует сохранить следующий основной член разложения (при $t = +\infty$) волновой функции (1) по малым параметрам, в виде

$$\Psi(t = +\infty) = \varphi_0(\{x_a, y_a, z_a\}) e^{\frac{i}{2} \sum_{a=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\mathbf{E}\mathbf{r}_a}{c})^2 dt}. \quad (4)$$

Запишем электрическую компоненту электромагнитного поля в общем виде $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 f(\eta_a)$, где \mathbf{E}_0 – амплитуда поля, $\eta_a = t - \mathbf{n}_0 \mathbf{r}_a/c$. Выбрав в (4) направление \mathbf{E} по оси z , амплитуду (2) перехода из $|\varphi_0\rangle$ состояния в $|\varphi_n\rangle$ можно представить в виде

$$a_{0,n} = \langle \varphi_n | e^{i \sum_{a=1}^N \beta z_a^2} | \varphi_0 \rangle, \quad (5)$$

где

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{c} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\eta_a) dt \quad (6)$$

(очевидно, что при таком интегрировании β не зависит от a). Рассмотрим для простоты переходы в одноэлектронном атоме. В этом случае выражение (5) можно проинтегрировать аналитически до достаточно высоких дискретных состояний $|n\rangle$, но выражения при этом получаются громоздкие. Поэтому рассмотрим, в качестве простого примера, амплитуду вероятности остаться атому в основном состоянии. Тогда несложно получить, что

$$a_{0,0} = \frac{i}{\tilde{\beta}} - \frac{\sqrt{2\pi}(\tilde{\beta} - 2i) \left(\operatorname{Erf} \left(\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{\tilde{\beta}}} \right) - 1 \right)}{(1-i)e^{-\frac{i}{\tilde{\beta}}} 2\tilde{\beta}^{3/2}}, \quad (7)$$

где $\operatorname{Erf}(x)$ – функция ошибок, а $\tilde{\beta} = \beta/Z_a^2$, Z_a – заряд ядра водородоподобного атома. Зная $a_{0,0}$, можно найти полную вероятность всех неупругих процессов $w_r = 1 - w_{0,0}$, где $w_{0,0} = |a_{0,0}|^2$ – вероятность остаться атому в основном состоянии. На рис. 1 вероятность $w_{0,0}$ представлена как функция от значений параметра $\tilde{\beta}$, который ниже будет выражен через комбинацию параметров падающего гауссова электромагнитного импульса, что позволяет, используя кривую на рис. 1, находить значения $w_{0,0}$ при конкретных характеристиках гауссова импульса.

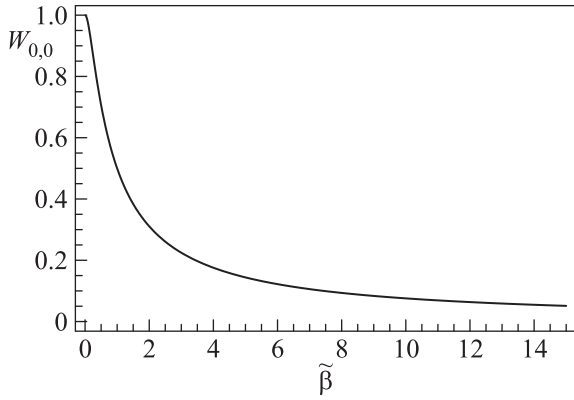


Рис. 1. Вероятность $W_{0,0}$ остаться атому в основном состоянии после взаимодействия с падающим электромагнитным импульсом как функция от параметра $\tilde{\beta}$, связанного с характеристиками гауссова импульса (17) соотношением (20). Значения $\tilde{\beta}$ приведены в атомных единицах

Рассмотрим теперь рассеяние ультракороткого импульса электромагнитного поля на электронах атома, как процесс, происходящий в течении времени взаимодействия атома с полем падающего импульса. В таком случае, условие $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} dt = 0$ не означает, что $\int_{-\infty}^t \mathbf{E} dt$ не вносит вклад в рассеяние электромагнитного импульса. Будем считать, что $E/c^2 \ll 1$, тогда можно разложить в ряд функцию (1) по малым параметрам, и сохраняя первые два основных члена разложения, вносящих основной вклад в амплитуду переизлучения рассеиваемого импульса, получим

$$\begin{aligned} & \Psi_0(t) = \\ & = \exp \left\{ - \sum_{a=1}^N i \int_{-\infty}^t \left(\mathbf{E}(t') \mathbf{r}_a - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{E}(t') \mathbf{r}_a}{c} \right)^2 \right) dt' \right\} \times \\ & \quad \times \varphi_0(\{x_a, y_a, z_a\}), \end{aligned} \quad (8)$$

причем $\Psi_0(t) \rightarrow \varphi_0$ при $t \rightarrow -\infty$. Введем (как в [14]) полную и ортонормированную систему функций

$$\begin{aligned} & \Phi_n(t) = \\ & = \exp \left\{ \sum_{a=1}^N i \int_t^{+\infty} \left(\mathbf{E}(t') \mathbf{r}_a - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{E}(t') \mathbf{r}_a}{c} \right)^2 \right) dt' \right\} \times \\ & \quad \times \varphi_n(\{x_a, y_a, z_a\}), \end{aligned} \quad (9)$$

причем $\Phi_n(t) \rightarrow \varphi_n$ при $t \rightarrow +\infty$, а φ_0 и φ_n принадлежат полной ортонормированной системе собственных функций гамильтониана невозмущенного атома. Тогда, согласно (2), амплитуда перехода атома из начального состояния φ_0 в какое-либо конечное состояние φ_n в результате действия внезапного возмущения

будет иметь вид $a_{0,n} = \langle \Phi_n(t) | \Psi_0(t) \rangle$. Поэтому амплитуду излучения фотона будем вычислять в первом порядке теории возмущений как поправки к состояниям (8) и (9) по взаимодействию атомных электронов с электромагнитным полем излучения

$$\begin{aligned} U = & - \sum_{a, \mathbf{k}, \sigma} \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\sigma} (a_{\mathbf{k}\sigma}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} + a_{\mathbf{k}\sigma} e^{+i\mathbf{k}\mathbf{r}_a}) \times \\ & \times \left(\hat{\mathbf{p}}_a + \frac{\mathbf{A}}{c} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $a_{\mathbf{k}\sigma}^+$ и $a_{\mathbf{k}\sigma}$ – операторы рождения и уничтожения фотона с частотой ω , импульсом \mathbf{k} и поляризацией σ ($\sigma = 1, 2$), $\mathbf{u}_{\mathbf{k}\sigma}$ – единичные векторы поляризации, $\hat{\mathbf{p}}_a$ – операторы импульса атомных электронов ($a = 1, \dots, N$), \mathbf{A} – векторный потенциал поля падающего импульса. При записи формулы (10) считалось, что дивергенция векторного потенциала поля излучения равна нулю и пренебрегалось квадратичным по полю излучения слагаемым, содержащим множитель $1/c^2$. Тогда амплитуда испускания фотона с одновременным переходом атома из состояния φ_0 в состояние φ_n имеет вид

$$\begin{aligned} b_{0n}(\omega) = & i \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} \langle \Phi_n(t) | \times \\ & \times \sum_a e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} \left(\hat{\mathbf{p}}_a + \frac{\mathbf{A}}{c} \right) | \Psi_0(t) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда, после интегрирования по частям по времени и опускания членов, исчезающих при выключении (при $t \rightarrow \pm\infty$) взаимодействия с электромагнитным полем, получаем

$$\begin{aligned} b_{0n}(\omega) = & \frac{1}{\omega} \left(\frac{2\pi}{\omega} \right)^{1/2} \mathbf{u}_{\mathbf{k},\sigma} \langle \varphi_n | \sum_a e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_a \left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) \mathbf{r}_a}{c} \right)^2 dt \right\} | \varphi_0 \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\tilde{\mathbf{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) - \frac{1}{2} \nabla \left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t) \mathbf{r}_a}{c} \right)^2 \right) e^{i\omega t} dt. \quad (13)$$

Представив элемент интегрирования по импульсу фотона в виде

$$(2\pi)^{-3} d^3 \mathbf{k} = (c2\pi)^{-3} d\Omega_{\mathbf{k}} \omega^2 d\omega$$

и выполнив суммирование $|b_{0n}(\omega)|^2$ по поляризациям, получим соответствующий спектр испускания

фотона в единицу телесного угла $d\Omega_{\mathbf{k}}$, описанного вокруг \mathbf{k} , с одновременным переходом атома из состояния φ_0 в состояние φ_n :

$$\frac{d^2 W_{0n}}{d\Omega_{\mathbf{k}} d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2 c^3 \omega} \left| \langle \varphi_n | \sum_{a=1}^N e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} [\tilde{\mathbf{E}}(\omega)\mathbf{n}] \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_a \left(\frac{\mathbf{E}(\mathbf{r}_a, t)\mathbf{r}_a}{c} \right)^2 dt \right\} | \varphi_0 \rangle \right|^2, \quad (14)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ единичный вектор направления вылета фотона. После суммирования (14) по полному набору конечных состояний атома φ_n получим:

$$\frac{d^2 W}{d\Omega_{\mathbf{k}} d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{c^3 \omega} \langle \varphi_0 | \sum_{a,a'} e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{a'})} \times \mathbf{f}(\mathbf{r}_a) \mathbf{f}^*(\mathbf{r}_{a'}) | \varphi_0 \rangle. \quad (15)$$

Здесь мы ввели обозначение $\mathbf{f}(\mathbf{r}_a)$ для векторного произведения:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_a) = [\tilde{\mathbf{E}}(\omega)\mathbf{n}], \quad (16)$$

Отметим, что согласно (13), $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$ есть функция не только ω , но и \mathbf{r}_a . Формула (15) описывает полный (просуммированный по поляризациям фотона и по всем возможным конечным состояниям φ_n атомных электронов) спектр излучения фотона частоты ω в единицу телесного угла $d\Omega_{\mathbf{k}}$. Подчеркнем, речь идет об излучении одного фотона всеми атомными электронами только в течение времени действия (поля налетающего импульса) внезапного возмущения. Спектр представлен в виде среднего по основному состоянию атома. Для вычисления среднего в выражении (15) необходимо знание волновой функции многоэлектронного атома и проведение многомерного интегрирования. Полученные формулы для амплитуд (5) и (7) неупругих процессов и спектров переизлучения (15) имеют общий характер и применимы для электромагнитных импульсов произвольной формы, при условиях внезапности их действия и равенства нулю интеграла по полю. Рассмотрим теперь конкретный пример.

3. Импульс гауссовой формы. Рассмотрим неупругие процессы и спектры переизлучения одноклеточным атомом ультракороткого импульса гауссовой формы

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha^2(t - \mathbf{n}_0 \mathbf{r}/c)^2} \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}), \quad (17)$$

где \mathbf{E}_0 – амплитуда, $\mathbf{k}_0 = (\omega_0/c)\mathbf{n}_0$, а \mathbf{n}_0 – единичный вектор направленный вдоль распространения ультракороткого импульса, длительность импульса $\tau \sim 1/\alpha$. Для такого поля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) dt = \mathbf{E}_0 \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega_0}{\alpha})^2}. \quad (18)$$

Если считать, что $\omega_0 \gg \alpha$, то получим $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} dt \rightarrow 0$. Несложно рассчитать по формуле (6) параметр β для такого импульса

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathbf{E}_0}{c} \right)^2 \left(1 + e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega_0}{\alpha})^2} \right). \quad (19)$$

При $\omega_0 \gg \alpha$ из (19) получим, что в формуле (7) параметр

$$\tilde{\beta} = \beta/Z_a^2 = \frac{1}{\alpha Z_a^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\mathbf{E}_0}{c} \right)^2. \quad (20)$$

Нам представляется удобным выбор именно гауссова импульса в качестве конкретного примера по той причине, что такой выбор позволяет проследить переход от поля с неравным нулю интегралом по полю ($\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} dt \neq 0$) к равному нулю интегралу при предельном переходе. В качестве иллюстрации мы провели численные расчеты полной вероятности $w_r = 1 - w_{0,0}$ всех неупругих процессов, используя общую формулу (2) (с волновой функцией (1)), справедливую как при неравном нулю интеграле, так и при равном нулю. В случае гауссова импульса это соответствует расчетам при произвольных ω_0 , в том числе и при $\omega_0 \gg \alpha$. Такие расчеты могут быть проведены только численными методами. Результаты расчетов $w_r = \sum_n |a_{0,n}|^2 = 1 - |a_{0,0}|^2$, где суммирование проводится по полному набору (исключая $n = 0$), при $\alpha = 10$ и $E_0 = 4 \times c = 548$, представлены на рис. 2.

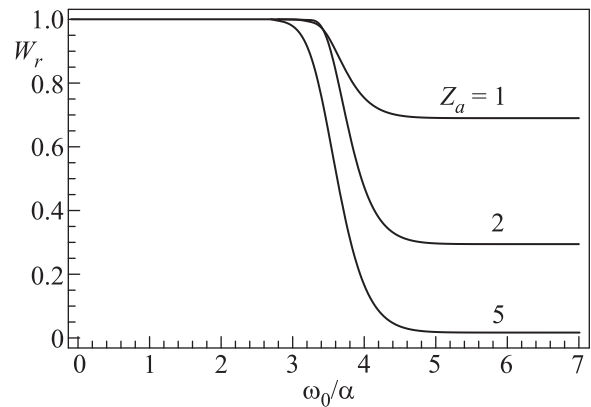


Рис. 2. Зависимость полной вероятности W_r неупругих процессов от безразмерного параметра ω_0/α для трех значений Z_a – заряда ядра водородоподобного атома

Видно, как по мере роста ω_0/α при $\omega_0/\alpha \approx 4$ происходит переход к полю с равным нулю интегралом по полю.

Рассмотрим теперь рассеяние гауссова импульса при $\omega_0 \gg \alpha$ на водородоподобном атоме, для которого формула (15) принимает вид

$$\frac{d^2W}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{c^3\omega} \langle \varphi_0 | \mathbf{f}(\mathbf{r})\mathbf{f}^*(\mathbf{r}) | \varphi_0 \rangle. \quad (21)$$

Для расчета выражения (21) необходимо, согласно (16), сначала найти $\tilde{\mathbf{E}}(\omega)$, что сделать несложно:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\omega) &= \tilde{\mathbf{E}}_1(\omega) + \tilde{\mathbf{E}}_2(\omega), \\ \tilde{\mathbf{E}}_1(\omega) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\alpha}\right)^2} e^{+i\frac{\omega}{\omega_0}\mathbf{k}_0\mathbf{r}} \mathbf{E}_0, \\ \tilde{\mathbf{E}}_2(\omega) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}\alpha} \left(e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{\omega-2\omega_0}{\alpha}\right)^2} \right) \times \\ &\quad \times \nabla \left\{ e^{+i\frac{\omega}{\omega_0}\mathbf{k}_0\mathbf{r}} \left(\frac{\mathbf{E}_0\mathbf{r}}{c} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

В выражениях (22) учтено, что $\omega_0 \gg \alpha$. В итоге получим выражение для расчета углового распределения спектра в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2W}{d\Omega_{\mathbf{k}}d\omega} &= \frac{1}{16\pi\alpha^2} \frac{1}{c^3\omega} \left\{ \frac{9}{16} \left(\frac{E_0}{Z_a c} \right)^4 \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega-2\omega_0}{\alpha}\right)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \right) \left(\frac{\omega}{\omega_0} [\mathbf{k}_0\mathbf{n}] \right)^2 + [\mathbf{E}_0\mathbf{n}]^2 \left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right)^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{Z_a c^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega-2\omega_0}{\alpha}\right)^2} + e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (23)$$

где Z_a – заряд ядра водородоподобного атома. Выражение (23) можно проинтегрировать по углам вылета фотона, тогда получим полный спектр переизлучения (для удобства интерпретации приведем лишь этот результат в системе СГС):

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\omega} &= \frac{e^4 E_0^2}{6m_e^2 \omega c^3 \alpha^2} \left\{ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega-\omega_0}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{E_0 \hbar^2}{m_e^2 e Z_a c^2} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \times \left(e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega-2\omega_0}{\alpha}\right)^2} \right) \times \\ &\quad \left. \times \left(1 + \frac{9}{8} \left(\frac{\omega \hbar^2}{Z_a m_e e^2 c} \right)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда следует, что второе слагаемое внутри фигурных скобок в правой части выражения (24) является чисто квантовой поправкой к классическому рассеянию, представленному первым слагаемым. Причем спектр классического рассеяния локализован на частотах вблизи ω_0 , тогда как квантовая часть соответствует рассеянию на низких частотах и на частотах вблизи $2\omega_0$ с дисперсией α . Появление рассеяния на этих частотах обусловлено разложением функции (1)

по малому параметру $E/c^2 \ll 1$, с сохранением только первых двух основных членов разложения, вносящих основной вклад в амплитуду переизлучения рассеиваемого импульса (см. формулу (8)). Отметим, что при учете последующих членов разложения появятся пики при частотах $3\omega_0$ и далее большей кратности по ω_0 . Однако это утверждение не является строгим результатом и имеет лишь качественный характер. Поскольку эти высшие поправки, строго говоря, следует рассматривать уже не на основе уравнения Шредингера, а при использовании, например, уравнения Дирака или его квазирелятивистских версий. Ведь следующий член разложения по $E/c^2 \ll 1$ содержит четвертую степень скорости света в знаменателе, а это уже равносильно учету релятивистской поправки к кинетической энергии электрона, которая не содержится в уравнении Шредингера.

Если проинтегрировать спектр (24) по всем частотам фотона, то получим полную вероятность переизлучения. Однако существует логарифмическая расходимость на нижнем пределе интегрирования по частоте. Введем нижний предел интегрирования $\Lambda \ll 1$, строго говоря, эта величина крайне мала [15] и определяется применимостью первого порядка теории возмущений для переизлучения падающего импульса электромагнитного поля. В области низких частот вкладами от пиков на частотах кратных ω_0 можно пренебречь по сравнению с вкладом от члена $e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}$. В результате полная вероятность переизлучения при $\omega_0 \gg \alpha$ оказывается равной:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Lambda}^{+\infty} \frac{dW}{d\omega} d\omega = \frac{E_0^2}{6c^3\alpha^2} \left(\frac{\alpha}{\omega_0} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{Z_a c^2} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\ln \left(\frac{2\alpha e^{-\gamma/2}}{\Lambda} \right) + \frac{9}{4} \left(\frac{\alpha}{Z_a c} \right)^2 \left(1 + \frac{\sqrt{\pi} \omega_0}{2\alpha} \right) \right] \right), \end{aligned} \quad (25)$$

где γ – постоянная Эйлера. Следует сказать, что квантовая поправка (выражение в квадратных скобках) может быть сравнимой и даже доминировать над первой при достаточно малых Λ (либо при достаточно больших ω_0/α). В свою очередь, квантовая поправка состоит из двух частей, первая из которых обусловлена перерассеянием на низких частотах, а вторая часть – это перерассеяние на удвоенной частоте $2\omega_0$ с дисперсией α .

Работа выполнена в рамках КГЗ Министерства образования и науки РФ (# 3.1726.2014/К) и стипендии президента РФ (СП-1800.2015.1).

1. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).

2. P. P. Agostini and L. F. DiMauro, Rep. Prog. Phys. **67**, 813 (2004).
3. P. B. Corkit and F. Krausz, Nature Phys. **3**, 381 (2007).
4. V. Astapenko, *Interaction of Ultrashort Electromagnetic Pulses with Matter*, Springer Briefs in Physics, Springer, Heidelberg (2013), 102 p.
5. А. М. Желтиков, УФН **181**, 33 (2011).
6. А. М. Дыхне, Г. Л. Юдин, УФН, **125**, 377 (1978).
7. A. Lugovskoy and I. Bray, Phys. Rev. A **77**, 023420 (2008).
8. M. Klaiber, D. Dimitrovski, and J. S. Briggs, Phys. Rev. A **79**, 043402 (2009).
9. D. Dimitrovski, M. Ferre, and L. B. Madsen, Phys. Rev. A **80**, 053412 (2009).
10. A. E. Kaplan, Lasers in Engineering **24**, 3 (2013).
11. G. Mourou, S. Mironov, E. Khazanov, and A. Sergeev, Eur. Phys. J. Special Topics **223**, 1181 (2014).
12. Д. Н. Макаров, В. И. Матвеев, Письма в ЖЭТФ **103**, 464 (2016).
13. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов, УФН **185**, 3 (2015).
14. В. И. Матвеев, ЖЭТФ **124**, 1023 (2003).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая электродинамика*, Наука, М. (1989).