Письма в ЖЭТФ, том 103, вып. 12, с. 866 – 871

Нарушение $\mathcal{PT}$-симметрии в резонансно-туннельных гетероструктурах

А. А. Горбацевич[+*1)], *Н. М. Шубин*[*]

[+]*Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[*]*Национальный исследовательский университет "МИЭТ", 124498 Зеленоград, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 апреля 2016 г.

После переработки 6 мая 2016 г.

Представлена фермионная модель, основанная на симметричной резонансно-туннельной гетероструктуре, которая демонстрирует спонтанное нарушение симметрии по отношению к одновременному действию операций пространственной инверсии ($\mathcal{P}$) и обращения времени ($\mathcal{T}$). Нарушение $\mathcal{PT}$-симметрии проявляется в слиянии (коллапсе) резонансов. Показано, что резонансные значения энергии в точности совпадают с собственными значениями вспомогательного псевдо-эрмитового $\mathcal{PT}$-инвариантного гамильтониана.

DOI: 10.7868/S0370274X16120079

Спонтанное нарушение симметрии (СНС) служит центральной идеей во многих областях современной физики, особенно в физике элементарных частиц [1] и физике конденсированного состояния [2–6]. СНС означает, что симметрия системы меняется (понижается) при определенном значении некоторого параметра системы, который сам непосредственно не меняет симметрию. Недавно был обнаружен целый новый класс явлений, связанных с СНС в $\mathcal{PT}$-симметричных системах [7–9]. Такие системы инварианты по отношению к одновременной пространственной инверсии ($\mathcal{P}$) и обращению времени ($\mathcal{T}$) и описываются $\mathcal{PT}$-симметричными псевдо-эрмитовыми гамильтонианами – неэрмитовыми гамильтонианами, которые могут обладать действительными собственными значениями [7, 10]. При определенной величине параметра такого гамильтониана пара действительных собственных значений может слиться и образовать пару комплексно-сопряженных собственных значений – нарушение $\mathcal{PT}$-симметрии ($\mathcal{PT}$-НС) [7–9]. Такие точки в пространстве параметров называются особыми точками (ОТ) [11–13]. Собственное состояние гамильтониана в особой точке не вырождено (в отличие от точек кроссинга). Собственные значения гамильтониана с положительной мнимой частью соответствуют неунитарной эволюции волновой функции, которая запрещена условием сохранения нормы (в фермионной системе), поэтому не было ясно, возможно ли существование фермионных систем, имеющих отношение к псевдо-эрмитовым $\mathcal{PT}$-симметричным гамильтонианам. К настоящему моменту все реалистичные применения явления $\mathcal{PT}$-НС с возможностью экспериментальной проверки основаны на формальной эквивалентности уравнения Шредингера и волнового уравнения и описывают электромагнитные явления [14–19]. Величины, нарушающие симметричность относительно обращения во времени ($\mathcal{T}$) в волновом уравнении, соответствуют хорошо определенным параметрам, описывающим процессы усиления и поглощения. В работе [20] была рассмотрена $\mathcal{PT}$-симметричная модель сверхпроводника, в которой нарушение $\mathcal{T}$-симметрии происходило из-за процессов рождения и уничтожения бозонных куперовских пар.

В данной статье рассматривается фермионная модель с $\mathcal{PT}$-НС, основанная на симметричной резонансно-туннельной структуре (РТС). РТС служит типичным примером открытой квантовой системы. Феномен СНС в открытых квантовых системах активно исследовался, например, в модели Калдейры–Леггета [21] СНС происходило за счет подавления туннелирования диссипацией. Позднее в работе [22] было показано, что в симметричных РТС и без диссипации может происходить СНС в точке слияния резонансов – это явление называется коллапс резонансов (КР). В настоящей статье мы строим вспомогательный псевдо-эрмитов $\mathcal{PT}$-симметричный гамильтониан, чьи собственные значения в точности соответствуют резонансным энергиям и его ОТ описывает КР. В физике конденсированного состояния описание и классификация

[1)]e-mail: aagor137@mail.ru

состояний с нарушенной симметрией основана на теории групп, позволяющей ограничить возможное число различных состояний. В случае КР в РТС зеркальная симметрия – единственная симметрия, которая нарушается, однако, число взаимодействующих резонансов может быть различным.

Итак, рассмотрим туннелирование электронов через произвольную многобарьерную структуру с одним уровнем в каждой квантовой яме, описываемую гамильтонианом [23]:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i a_i^\dagger a_i + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\tau_i a_{i+1}^\dagger a_i + h.c.\right) + \hat{H}_{LC} + \hat{H}_{RC}, \tag{1}$$

где $a_i^\dagger(a_i)$ – оператор рождения (уничтожения) электрона в i-й яме с энергией ε_i и τ_i – туннельный матричный элемент между i-й и $(i+1)$-й ямой. Гамильтонианы $\hat{H}_{LC}/\hat{H}_{RC}$ описывают левый/правый контакты со спектром ε_p и взаимодействие со структурой за счет туннельных матричных элементов $t_{L(R)}$:

$$\hat{H}_{LC(RC)} = \sum_p \varepsilon_p a_{L(R),p}^\dagger a_{L(R),p} + + \sum_p \left(t_{L(R)} a_{1(N)}^\dagger a_{L(R),p} + h.c.\right), \tag{2}$$

где оператор $a_{L(R),p}$ соответствует состоянию с импульсом p в левом (правом) контакте. Используя технику Келдыша в приближении сильной связи между ямами [24, 25], запишем выражение для тока через РТС, состоящую из N связанных ям в известном виде [24, 23]:

$$I = \frac{e}{2\pi} \int 4\Gamma_L(\omega)\Gamma_R(\omega)|G_{1N}^r(\omega)|^2 (f_L(\omega) - f_R(\omega)) d\omega. \tag{3}$$

Здесь $f_{L,R}$ – функция распределения Ферми–Дирака, G_{1N}^r – полная запаздывающая функция Грина системы и $\Gamma_{L,R} = \pi|t_{L,R}|^2\rho_{L,R}$ – быстрота ухода электронов из внешних ям (1-ая или N-ая) в левый или правый контакт с плотностью состояний $\rho_{L,R}$ за счет матричного элемента $t_{L,R}$. В соответствии с (3) можно определить коэффициент прохождения структуры как[2)]:

$$T_{NW} = 4\Gamma_L\Gamma_R|G_{1N}^r|^2. \tag{4}$$

Полный пропагатор G_{1N}^r учитывает взаимодействие с континуумом состояний в контактах при помощи соответствующих собственно-энергетических частей [24]:

$$\Sigma_{L,R} = |t_{L,R}|^2 g_{L,R}^r = \delta_{L,R} - i\Gamma_{L,R}, \tag{5}$$

[2)] Индекс NW означает, что рассматривается РТС из N ям.

где $g_{L,R}^r$ есть запаздывающие функции Грина в контактах. Следуя, например, работе [23], можно записать полный пропагатор в виде:

$$G_{1N}^r = \frac{G_{1N}^{0r}}{\Delta}, \tag{6}$$

где G_{1N}^{0r} – запаздывающая функция Грина изолированной РТС и

$$\Delta = (1 - \Sigma_L G_{11}^{0r})(1 - \Sigma_R G_{NN}^{0r}) - \Sigma_L \Sigma_R G_{1N}^{0r} G_{N1}^{0r}.$$

Запаздывающая функция Грина G_{1N}^{0r} системы из N связанных ям, не взаимодействующих с континуумом состояний в контактах, может быть получена из уравнения Дайсона [24]:

$$G_{ij}^{0r} = \delta_{ij} g_{ii}^r + g_{ii}^r \left(\tau_i G_{i+1,j}^{0r} + \tau_{i-1}^* G_{i-1,j}^{0r}\right), \tag{7}$$

где $g_{ii}^r(\omega) = (\omega - \varepsilon_i + i0)^{-1}$ – функции Грина изолированных ям с единственным энергетическим уровнем ε_i. Прикладываемое напряжение делает систему пространственно неоднородной, что влияет на энергии квазилокализованных состояний в ямах [24]. Мы считаем вклад от приложенного напряжения уже учтенным в энергиях ε_i.

Используя свойства определителей трехдиагональных матриц, можно показать, что коэффициент прохождения (4) может быть записан в виде дроби с характеристическим многочленом эффективного гамильтониана системы в знаменателе [26]:

$$T_{NW} = \frac{P^2}{\left|\det\left(\omega - \hat{H}_{\text{eff}}\right)\right|^2}, \tag{8}$$

где $P^2 = 4\Gamma_L\Gamma_R|\tau_1|^2 \cdot \ldots \cdot |\tau_{N-1}|^2$. Матрица эффективного гамильтониана $\hat{H}_{\text{eff}}$ в (8) записывается известным образом:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_L + \hat{H}_R. \tag{9}$$

Здесь $\hat{H}_0$ – матрица гамильтониана изолированной N-ямной РТС:

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \tau_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \tau_1^* & \varepsilon_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{N-1} & \tau_{N-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \tau_{N-1}^* & \varepsilon_N \end{pmatrix}, \tag{10}$$

а взаимодействие с контактами учитывается в $(\hat{H}_L)_{ij} = \Sigma_L \delta_{i1}\delta_{j1}$ и $(\hat{H}_R)_{ij} = \Sigma_R \delta_{iN}\delta_{jN}$. Действительная составляющая $\delta_{L,R}$ собственно-энергетической части соответствует сдвигу энергии, а мнимая составляющая $\Gamma_{L,R}$ описывает уход в континуум (5), что, в некотором роде, близко по смыслу к оптическому потенциалу Фешбаха [27, 28].

Собственные значения $\hat{H}_{\text{eff}}$ совпадают с полюсами матрицы рассеяния [29, 30], однако, как следует из [22, 29], не совпадают с положением единичных максимумов прозрачности. После некоторых преобразований в знаменателе выражения (8) можно записать прозрачность произвольной многобарьерной структуры как:

$$T_{NW} = \frac{P^2}{|Q|^2 + P^2}, \tag{11}$$

где

$$Q = \det\left(\omega - \hat{H}_{\text{aux}}\right) \tag{12}$$

представляет собой характеристический многочлен неэрмитового вспомогательного гамильтониана, описывающего поток электронов слева направо[3)]:

$$\hat{H}_{\text{aux}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_L^* + \hat{H}_R. \tag{13}$$

Здесь $\hat{H}_L^*$ – комплексно сопряженная матрица к $\hat{H}_L$ из (9). Таким образом, видно, что резонансы прозрачности строго определены собственными значениями вспомогательного гамильтониана (13), который, в отличие от $\hat{H}_{\text{eff}}$ из (9), имеет разные знаки мнимых слагаемых в первом и последнем элементе на главной диагонали. Выражения (11)–(12) представляют компактное обобщение формулы Брейта–Вигнера на многоуровневый случай.

Далее будем рассматривать только симметричные N-ямные РТС с одинаковыми ямами ($t_L = t_R$, $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ и $\tau_{N-i} = \tau_i$ для всех i). Более того, мы полагаем, что сдвиги энергии уровней крайних ям будут нулевые: $\delta_L = \delta_R = 0$ (физически это означает, что мы рассматриваем структуры с уровнями, расположенными на середине высоты барьеров). Такое приближение делает вспомогательный гамильтониан (13) $\mathcal{PT}$-симметричным[4)]:

$$\hat{H}_{\text{aux}}^{\text{symm}} = \hat{H}_{\mathcal{PT}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_\Gamma, \tag{14}$$

где $(\hat{H}_\Gamma)_{ij} = i\Gamma(\delta_{i1}\delta_{j1} - \delta_{iN}\delta_{jN})$ соответствует случаю потока электронов слева направо. Таким образом, единичные максимумы прозрачности симметричных РТС, в соответствии с (11), определяются собственными значениями $\mathcal{PT}$-симметричного псевдо-эрмитового гамильтониана (14). Например, в двухбарьерной симметричной РТС вспомогательный гамильтониан представляет собой действительный скаляр, описывающий единственный резонансный пик, поэтому $Q_{1W} = \omega - \varepsilon_0$. Выражение (11) для коэффициента прохождения в этом случае превращается в простую формулу Брейт–Вигнера. Для структур с $N = 2, 3, 4, 5$ ямами многочлены Q имеют вид (полагаем $\omega - \varepsilon_0 \mapsto \omega$):

$$\begin{gathered} Q_{2W} = \omega^2 - |\tau_1|^2 + \Gamma^2, \\ Q_{3W} = \omega\left(\omega^2 - 2|\tau_1|^2 + \Gamma^2\right), \\ Q_{4W} = \omega^4 - \omega^2\left(2|\tau_1|^2 + |\tau_2|^2 - \Gamma^2\right) + \\ + |\tau_1|^4 - |\tau_2|^2\Gamma^2, \\ Q_{5W} = \omega(\omega^4 - \omega^2\left(2|\tau_1|^2 + 2|\tau_2|^2 - \Gamma^2\right) + \\ + |\tau_1|^4 + 2|\tau_1|^2|\tau_2|^2 - 2|\tau_2|^2\Gamma^2). \end{gathered} \tag{15}$$

Непосредственно в режиме КР в N-ямной симметричной РТС коэффициент прохождения принимает существенно не Брейт–Вигнеровский вид:

$$T_{NW}(\omega) = \frac{\tilde{\Gamma}^{2N}}{(\omega - \varepsilon_0)^{2N} + \tilde{\Gamma}^{2N}}. \tag{16}$$

где $\tilde{\Gamma} = C_N\Gamma$ и C_N – некоторая ненулевая константа, зависящая от N. Главная особенность выражения (16) состоит в том, что первые $2N-1$ производные принимают нулевые значения в точке $\omega = \varepsilon_0$ и первая ненулевая будет только производная $2N$-го порядка.

В общем случае многочлен Q имеет $N - 2M$ действительных и $2M$ комплексных корней, но только действительные корни соответствуют единичным максимумам прозрачности. Изменяя параметры системы $\{\tau_i\}$ и Γ, можно добиться слияния всех действительных корней (и, соответственно, резонансов) и превращения их в комплексные. В случае четного числа ям N все корни Q могут быть сделаны комплексными и, соответственно, единственный оставшийся пик прозрачности будет меньше 1, а также иметь асимметричное распределение электронов. В случае нечетного числа ям N всегда будет иметься хотя бы один действительный корень, соответствующий энергии $\omega = \varepsilon_0$. После КР этот пик останется единичным и сохранит симметрию распределения электронов. В соответствии с известными свойствами матриц [31] собственные значения трехдиагональной матрицы $\hat{H}_0$ в (14) будут действительны и невырождены. Поэтому в случае слабого взаимодействия с континуумом ($\Gamma \ll \min(|\tau_i|)$) все резонансы будут иметь единую прозрачность, а также будут разделены друг от друга. С увеличением Γ действительные

[3)]Изменение направления потока электронов приведет к переопределению $\hat{H}_{\text{aux}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_L + \hat{H}_R^*$. Также нетрудно видеть, что направление потока электронов, как и следовало того ожидать, не влияет на коэффициент прохождения.

[4)]Он инвариантен относительно одновременного обращения времени (комплексного сопряжения) и пространственного зеркального отражения ($j \in \{1, ..., N\} \mapsto N + 1 - j$).

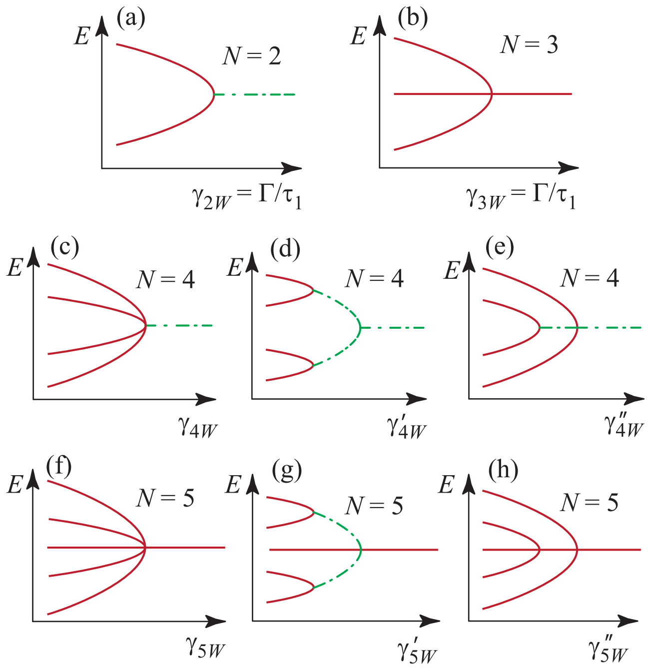

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематический вид возможных вариантов достижения КР (ОТ) в РТС с $N = 2$, 3, 4, 5 ямами. Сплошная линия – единичные максимумы прозрачности, штрих-пунктирная линия – не единичные максимумы

собственные значения могут слиться и превратиться в пару комплексно сопряженных, что приведет к слиянию и соответствующих резонансов. Таким образом, КР достигается при определенном соотношении между параметрами структуры, когда сливаются все собственные значения, то есть точка КР есть ОТ порядка N. КР в симметричной структуре с четным числом ям N при этом соответствует $\mathcal{PT}$-НС во вспомогательном гамильтониане $\hat{H}_{\rm aux}$.

Из (15) следует, что в двухъямной структуре слияние резонансов происходит при $\Gamma = |\tau_1|$, в трехъямной КР происходит при критическом соотношении: $\Gamma = \sqrt{2}|\tau_1|$, в случае 4-х ям критические соотношения следующие: $|\tau_2| = |\tau_1|\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $\Gamma = |\tau_2|(\sqrt{2}-1)^{-1}$ и для 5-ямной РТС: $|\tau_1| = |\tau_2|\sqrt{1+\sqrt{5}}$, $\Gamma = |\tau_2|\sqrt{4+2\sqrt{5}}$. Для четного N многочлен Q_{NW} есть многочлен степени $N/2$ от переменной $(\omega-\varepsilon_0)^2$. В случае же нечетного N многочлен Q_{NW} представляет собой многочлен степени $(N-1)/2$ от $(\omega-\varepsilon_0)^2$, умноженный на $(\omega-\varepsilon_0)$. Это означает, что количество независимых параметров структуры ($\{\tau_i\}$ и Γ) достаточно для полного контроля положения корней многочлена Q. Значит, все возможные положения резонансов могут быть достигнуты при помощи изменения параметров структуры. Переход из состояния до коллапса резонансов (все пики прозрачности разделены) в состояние после КР (единственный пик прозрачности) может быть осуществлен через точку КР, где все единичные резонансы сливаются вместе. Для реализации этого перехода достаточно изменить параметры структуры в некотором направлении в пространстве параметров. В случае трех- и четырехбарьерных РТС такой переход осуществляется увеличением параметра $\gamma_{2,3W} = \Gamma/\tau_1$ (рис. 1a и b). В случае более сложных структур необходимое направление представляет собой некоторый Жорданов путь в пространстве параметров, чей естественный параметр γ_{NW} определяет, каким образом нужно изменить структуру, чтобы добиться КР. Выбор пути определяет взаимодействие резонансов (корней Q) друг с другом, поэтому можно реализовать все возможные варианты слияния резонансов за счет выбора различных путей. Таким образом, существует много путей достижения режима КР, например, для структур с $N = 2,3,4,5$ схемы возможного поведения положений резонансов приведены на рис. 1.

Полученные выше результаты основаны на приближении сильной связи, однако все качественные выводы являются общими. Чтобы продемонстрировать ключевое отличие КР в РТС с четным и нечетным числом ям N, рассмотрим численное решение уравнения Шредингера с эффективной массой:

$$\left(-(2m^*)^{-1}\hbar^2\nabla^2 + U(x)\right)\psi(x) = E\psi(x), \tag{17}$$

где потенциал $U(x)$ описывает многобарьерную РТС. Рис. 2 показывает коэффициент прохождения и распределение электронной волновой функции в режиме после КР для структур с кусочно-постоянным потенциалом $U(x)$, с высотой барьеров $V = 0.3$ эВ и $N = 2,3,4,5$ ямами, шириной внешних барьеров 2 нм и эффективной массой $m^* = 0.067m_0$. Как было показано выше в приближении сильной связи, переход в состояние после КР происходит при определенном соотношении между параметрами струкутры. Например, для двухъямной структуры переход происходит при $\gamma_{2W} = \Gamma/|\tau_1| > \gamma_{2W}^{\rm crit} = 1$, что в формализме уравнения Шредингера (17) можно расписать как $\gamma_{2W} = \Gamma/|\tau_1| \propto |t_{L,R}|^2/|\tau_1| \propto e^{-2\kappa w}/e^{-\kappa l} > 1$, где мы считаем барьеры слабо прозрачными, w обозначает ширину крайних барьеров, l – ширину центрального и $\kappa = \hbar^{-1}\sqrt{2m(V-E)}$. Таким образом, следуя аналогичным рассуждениям, можно получить, что переход в состояние после КР в трехъямной РТС происходит при $\gamma_{3W} = \Gamma/|\tau_1| \propto |t_{L,R}|^2/|\tau_1| \propto e^{-2\kappa w}/e^{-\kappa l} > \gamma_{3W}^{\rm crit} = \sqrt{2}$, следовательно, в трехъямной РТС переход происходит при $l \gtrsim 2w + \log 2/(2\kappa)$. Точно такой же подход применим и к более сложным струк-

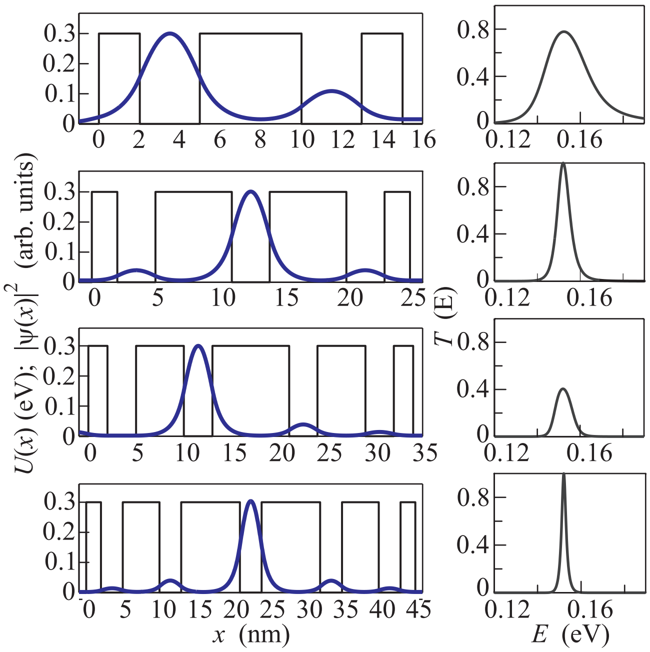

Рис. 2. (Цветной онлайн)Численно рассчитанные распределения электронной волновой функции и коэффициент прохождения для симметричных РТС с $N = 2$, 3, 4, 5 ямами в состоянии после КР ($\gamma > \gamma^{\mathrm{crit}}$)

турам (с большим N). Записать непосредственные условия перехода при этом становится сложнее, но они по-прежнему определяются, например, соотношением между толщинами барьеров, которые явным образом входят в потенциал $U(x)$ и, соответственно, уравнение (17).

В случае четного N прозрачность в состоянии после КР имеет величину, меньшую единицы, а также нарушенную симметрию распределения электронов, в то время как при нечетном N прозрачность единственного пика после КР единичная и распределение электронов в нем симметрично. Механизм нарушения симметрии в точке КР довольно простой: электронные волновые функции, соответствующие смежным уровням вблизи точки КР, отличаются по симметрии, поэтому, сливаясь в точке КР, они образуют комбинацию симметричного и антисимметричного состояний, которое является несимметричным.

В заключение отметим, что в данной работе было показано существование нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии в симметричных квантовых резонансно-туннельных гетероструктурах с четным числом ям. Это нарушение проявляется как слияние резонансов. Был введен вспомогательный псевдо-эрмитовый $\mathcal{PT}$-симметричный гамильтониан $H_{\mathcal{PT}}$, чьи собственные значения точно определяют положения максимумов прозрачности. $H_{\mathcal{PT}}$ может быть непосредственно получен из эффективного гамильтониана открытой квантовой системы, описывающего уход в континуум. Нарушение $\mathcal{PT}$-симметрии соответствует особым точкам вспомогательного гамильтониана $H_{\mathcal{PT}}$. Таким образом, было описано нарушение $\mathcal{PT}$-симметрии в фермионной системе. Особые точки в структурах с нечетным числом ям не сопровождаются нарушением $\mathcal{PT}$-симметрии. Оптическая аналогия описанного в данной работе нарушения $\mathcal{PT}$-симметрии может наблюдаться в системах связанных волноводов.

А.А.Г. благодарит программу фундаментальных исследований президиума РАН за поддержку.

1. Y. Nambuб Rev. Mod. Phys. **81**, 1015 (2009).
2. Y. Lemonik, I.L. Aleiner, C. Toke, and V.I. Fal'ko, Phys. Rev. B **82**, 201408 (2010).
3. Y. Saito and H. Hyuga, Rev. Mod. Phys. **85**, 603 (2013).
4. B. Waclaw, J. Sopik, and W. Janke, Phys. Rev. Lett. **103**, 080602 (2009).
5. H. Ohadi, E. Kammann, T.C.H. Liew, K.G. Lagoudakis, A.V. Kavokin, and P.G. Lagoudakis, Phys. Rev. Lett. **109**, 016404 (2012).
6. K. Sun, H. Yao, E. Fradkin, and S.A. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **103**, 046811 (2009).
7. C.M. Bender and S. Boettcher, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).
8. C.M. Bender, S. Boettcher, and P.N. Meisinger, J. Math. Phys. **40**, 2201 (1999).
9. C.M. Bender, Rep. Progress in Physics **70**, 947 (2007).
10. A. Mostafazadeh, J. Geometric Methods in Mod. Phys. **7**, 1191 (2010).
11. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin (1995), p. 64.
12. W.D. Heiss, J. Phys. A: Math. and Theor. **45**, 444016 (2012).
13. M.V. Berry, Czech. J. Phys. **54**, 1039 (2004).
14. A. Guo, G.J. Salmo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G.A. Siviloglou, and D.N. Christodoulides, Phys. Rev. Lett. **103**, 093902 (2009).
15. L. Feng, M. Ayache, J. Huang, Y.-L. Xu, M.-H. Lu, Y.-F. Chen, Y. Fainman, and A. Scherer, Science **333**, 729 (2011).
16. M. Liertzer, L. Ge, A. Cerjan, A.D. Stone, H.E. Türeic, and S. Rotter, Phys. Rev. Lett. **108**, 173901 (2012).
17. M. Brandstetter, M. Liertzer, C. Deutsch, P. Klang, J. Schöberl, H.E. Türeci, G. Strasser, K. Unterrainer, and S. Rotter, Nat. Commun. **5**, 4034 (2014).
18. Y.D. Chong, L. Ge, and A.D. Stone, Phys. Rev. Lett. **106**, 093902 (2011).
19. P. Ambichl, K.G. Makris, L. Ge, Y. Chong, A.D. Stone, and S. Rotter, Phys. Rev. X **3**, 041030 (2013).

20. N. M. Chtchelkatchev, A. A. Golubov, T. I. Baturina, and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. **109**, 150405 (2012).
21. A. J. Bray and M. A. Moore, Phys. Rev. Lett. **49**, 1545 (1982).
22. A. A. Gorbatsevich, M. N. Zhuravlev, and V. V. Kapaev, JETP **107**, 288 (2008).
23. Y. V. Kopaev and S. N. Molotkov, JETP Lett. **59**, 800 (1994).
24. C. Caroli, R. Combescot, P. Nozieres, and D. Saint-James, J. Phys. C: Solid State Phys. **4**, 916 (1971).
25. C. Caroli, R. Combescot, P. Nozieres, and D. Saint-James, J. Phys. C: Solid State Phys. **5**, 21 (1972).
26. G. L. Celardo and L. Kaplan, Phys. Rev. B **79**, 155108 (2009).
27. H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958).
28. H. Feshbach, Ann. Phys. **19**, 287 (1962).
29. S. Garmon, M. Gianfreda, and N. Hatano, Phys. Rev. A **92**, 022125 (2015).
30. F.-M. Dittes, Phys. Rep. **4**, 215 (2000).
31. A. J. Fox and F. A. Johnson, Comp. J. **9**, 98 (1966).