

# Магнонные моды, локализованные на дефектах в двумерном массиве магнитных микрочастиц с перпендикулярной анизотропией

Е. Г. Галкина, Б. А. Иванов<sup>1)</sup>

Институт магнетизма НАН Украины, 03142 Киев, Украина

Институт физики НАН Украины, 03028 Киев, Украина

Поступила в редакцию 30 мая 2016 г.

Исследованы высокочастотные свойства плоских массивов малых ферромагнитных частиц с точечными или протяженными дефектами. Рассмотрены предельные случаи дефектов с локализованным нарушением идеальности решетки или с дальнодействием, обусловленным магнитным дипольным взаимодействием. Найдены общие условия появления магнонных мод, локализованных на дефектах различной природы. Для притягивающего дефекта эти условия существенно отличаются от тех, что известны в квантовой механике для частицы, локализованной в потенциальной яме.

DOI: 10.7868/S0370274X16130075

Развитие современных нанотехнологий дало возможность создавать магнитные материалы, обладающие уникальными свойствами (см. [1]). К таким материалам относятся, в частности, двумерные решетки магнитных частиц (их часто называют магнитными точками – “*magnetic dots*”) на немагнитной подложке, с характерными размерами порядка десятков или сотен нанометров. Применяя частицы в форме удлиненного цилиндра, в них можно создать перпендикулярную анизотропию, что важно для высокочлотной магнитной записи информации [2, 3]. Эти системы представляют собой чистую реализацию дипольных магнетиков, которые изучаются уже более 70 лет [4]. Для них характерна неоднозначность основного состояния [4–8] и существование фазовых переходов при изменении внешнего магнитного поля [9–15].

В массивах магнитных частиц существуют моды коллективных колебаний с зонным спектром [16–20] и неаналитической зависимостью частоты от волнового вектора, что обусловлено медленной сходимостью дипольных сумм вида (8). Частоты этих мод лежат в области нескольких ГГц, а характерные значения квазиимпульса (размеры зоны Бриллюэна) лежат в диапазоне  $10^5$ – $10^6$  см<sup>-1</sup>, что удобно для измерений и полезно для приложений. Данные системы рассматриваются как перспективные магнитные среды в рамках так называемой магноники (“*magnonics*”), новой области прикладного магнетизма (см. [21–23]). Для приложений в рамках магно-

ники важны резонаторные или волноводные структуры различного типа, которые можно создать на основе магнонных мод, локализованных на дефектах различной природы, точечных или протяженных. Неоднозначность основного состояния открывает путь для реализации сред с системой перестраиваемых дефектов [24–27]. Кроме того, изучение динамики массивов магнитных частиц с дефектами может дать полезную информацию о параметрах и качестве приготовления массива [10, 28]. Высокочастотные свойства массивов частиц с дефектами практически не исследованы, отметим только анализ одномерных систем [29]; мод, локализованных на границе массива [30, 31], и численный расчет моды, локализованной на точечном дефекте [28].

В настоящей работе проведено общее рассмотрение условий появления локальных мод для решеток магнитных частиц с дефектами различной природы, точечных и линейных (одномерных), с локализованным нарушением идеальности решетки или с дальнодействием, обусловленным магнитным дипольным взаимодействием.

Состояние квадратной решетки частиц с однородной намагниченностью внутри каждой частицы описывается магнитными моментами частиц,  $\mathbf{m}_l$ , расположенных в узлах решетки  $\mathbf{l} = a(\mathbf{e}_x l + \mathbf{e}_y n)$ , где  $l, n$  – целые числа. Колебания моментов  $\mathbf{m}_l$  можно рассматривать чисто классически, но в линейном приближении удобно ввести операторы рождения и уничтожения  $c_l^\dagger$  и  $c_l$ . Для идеальной решетки собственные моды колебаний моментов (будем называть их магнонами) выражаются через состояния  $c_{\mathbf{k}}^\dagger$  и  $c_{\mathbf{k}}$ ,

<sup>1)</sup>e-mail: bor.a.ivanov@gmail.com

$c_{\mathbf{k}} = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{l})c_{\mathbf{l}}$ ,  $N$  – число частиц в решетке. Проводя диагонализацию, гамильтониан идеальной системы можно записать в виде [17, 19, 30]

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  – энергия магнона, квазиимпульс  $\mathbf{k}$  принимает значения в первой зоне Бриллюэна.

В силу дальнего действия явная зависимость  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  может быть найдена только численно, но для анализа вопроса о локализации магнонных мод достаточно знать общие свойства спектра вблизи верхнего или нижнего краев разрешенной полосы. Для интересующего нас случая (массив с перпендикулярной анизотропией и параллельной ориентацией всех магнитных моментов частиц) минимум  $\omega_{\mathbf{k}}$  всегда расположен в центре зоны Бриллюэна (в точке  $\Gamma$ ) при  $\mathbf{k} = 0$ , а максимум – на краях зоны Бриллюэна в точках  $M$ ,  $a_{\mathbf{k}M} = \pm\pi(\mathbf{e}_x \pm \mathbf{e}_y)$ . При  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  спектр характеризуется неаналитическим поведением,  $\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\min} \propto |\mathbf{k}| > 0$ , а вблизи максимума имеет место стандартная параболическая зависимость,  $\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\mathbf{k}} \propto (\mathbf{k} - \mathbf{k}_M)^2 > 0$  (см. детали в [19]).

Пусть “дефектная” частица, физические параметры которой иные, чем для остальных частиц, расположена в начале координат  $\mathbf{l} = 0$ . Решетку с дефектом можно описать, добавив к идеальному гамильтониану  $H_0$  слагаемое  $H_{\text{int}}$ ,

$$H_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{n}} U(\mathbf{n}) a_{\mathbf{n}}^{\dagger} a_{\mathbf{n}} + [a_0^{\dagger} \sum_{\mathbf{n} \neq 0} V(\mathbf{n}) a_{\mathbf{n}} + \text{h.c.}], \quad (2)$$

где величина  $U(\mathbf{n} = 0) = U_0$  описывает изменение свойств самой частицы, образующей дефект,  $U(\mathbf{n})$  при  $\mathbf{n} \neq 0$  и  $V(\mathbf{n})$  определяют изменение взаимодействия частиц массива, расположенных в точках  $\mathbf{n}$ , с “дефектной” частицей. В импульсном представлении,

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} [U(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + V(\mathbf{k})] a_{\mathbf{k}'}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}, \quad (3)$$

где

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{n}} U(\mathbf{n}) e^{-i\mathbf{n}\mathbf{q}}, \quad V(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} V(\mathbf{n}) e^{-i\mathbf{n}\mathbf{k}}, \quad (4)$$

отметим различную зависимость вкладов взаимодействий типа  $U$  и  $V$  от импульсов квазичастиц.

Амплитуду локальной моды ищем в виде линейной комбинации магнонных операторов,  $a_{\text{loc}} = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$ . Используя уравнение движения  $i\hbar da_{\text{loc}}/dt = \varepsilon_{\text{loc}} a_{\text{loc}} = [a_{\text{loc}}, H]$ , где  $\varepsilon_{\text{loc}}$  – энергия локальной моды, получаем бесконечную систему

уравнений для  $\psi_{\mathbf{k}}$ . Анализ ее разрешимости позволяет найти частоту локальной моды, но замкнутое уравнение для  $\varepsilon_{\text{loc}}$  для общего вида  $U(\mathbf{n})$  и  $V(\mathbf{n})$  выписать не удастся. Поэтому рассмотрим частные случаи.

Для важного случая, когда изменены только собственные резонансные свойства “дефектной” частицы массива (например, когда она имеет иное, чем все остальные частицы, значение константы одноосной анизотропии, см. [28]) амплитуда  $U(\mathbf{k}) = U_0$  и не зависит от  $\mathbf{k}$ , а  $V(\mathbf{k}) = 0$ . Такой дефект уместно назвать *точечным дефектом*, он соответствует дельта-функциональному потенциалу. Для него уравнения для  $\psi_{\mathbf{k}}$  можно записать в виде  $\psi_{\mathbf{k}}(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\text{loc}}) + U_0 \Psi/N = 0$ ,  $\Psi \equiv \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}$ . Разрешая это уравнение относительно  $\psi_{\mathbf{k}}$ , исключая  $\Psi$  и переходя от суммирования по  $\mathbf{k}$  к интегрированию (по зоне Бриллюэна), получаем для частоты  $\varepsilon_{\text{loc}}$  уравнение Лифшица (см. [32])

$$1 + \frac{a^2}{(2\pi)^2} \int \frac{U_0 d\mathbf{k}}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\text{loc}}} = 0. \quad (5)$$

Если потенциал является притягивающим, т.е.  $U_0 < 0$ , то можно ожидать существования локального состояния ниже континуума, т.е.  $\varepsilon_{\text{loc}} < \varepsilon_{\min}$ . В противном случае, при  $U_0 > 0$ , состояние может возникнуть при  $\varepsilon_{\text{loc}} > \varepsilon_{\max}$  (см. рис. 1). Учитывая, что вид

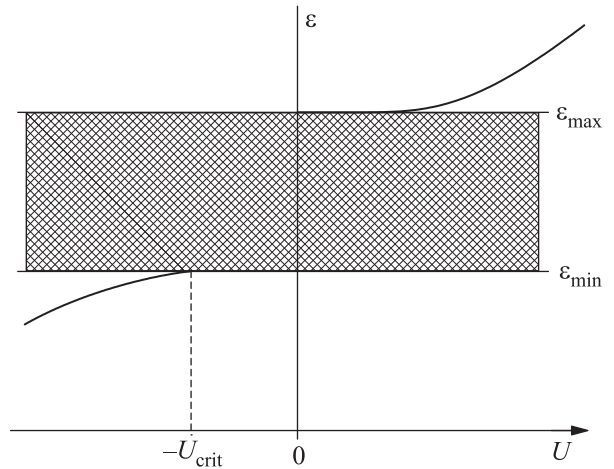


Рис. 1. Положение энергий магнонных мод, локализованных на точечном дефекте, при различных значениях  $U = U_0$  (схематически). Заштрихована область существования “объемных” магнонов. Различие поведения  $\varepsilon_{\text{loc}}$  для разных знаков  $U$  при уменьшении  $|U|$  объясняется в тексте

спектра  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$  достаточно сложный, энергию локальной моды можно найти только численно. Однако важные качественные результаты, прежде всего ответ на вопрос, при каких значениях параметров возникают

локальные моды, может быть исследован точно. Далее будем считать, что дефект достаточно слабый, т.е.  $U_0 \ll \Delta_\varepsilon \equiv \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$ .

Известно, что для стандартного параболического закона дисперсии в одномерном случае локализованные состояния с энергией  $\varepsilon_{\text{loc}} \sim U_0^2/\Delta_\varepsilon \ll |U_0|$  возникают при сколь угодно слабом притяжении к дефекту, в то время как в трехмерном пространстве величина взаимодействия должна превышать определенное пороговое значение  $|U_0| > U_c \sim \Delta_\varepsilon$ . Это условие может быть сделано менее жестким для “мягкого” закона дисперсии типа  $\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon_{\min} \propto |\mathbf{k}|^n$  с  $n > 2$  [33, 34]. Вопрос о наличии или отсутствии порога определяется фактически поведением интеграла в (5): локальное состояние существует при сколь угодно малых  $U_0$  если он расходится при  $\varepsilon_{\text{loc}} = \varepsilon_{\min}$ . В этом случае основной вклад в интеграл вносят области около нуля или  $\mathbf{k}_M$ , соответственно, причем актуальная область в  $\mathbf{k}$ -пространстве мала в меру малости  $U_0/\Delta_\varepsilon$ .

В стандартной квантовой механике в двумерном случае интеграл расходится логарифмически; говорят, что этот случай отвечает *критической размерности* задачи. Локальное состояние возникает при сколь угодно слабом взаимодействии с дефектом, но его энергия связи экспоненциально мала по параметру  $|U_0|/\Delta_\varepsilon$ . Для нашего случая такое поведение должно реализоваться для отталкивающего дефекта  $U_0 > 0$ , когда локализованные состояния отщепляются от верхнего края зоны  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_M$ , вблизи которого закон дисперсии параболический,  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\max} - D(\mathbf{k} - \mathbf{k}_M)^2$ ,  $D > 0$  (см. [19]). Основной вклад в интеграл возникает за счет малых  $|\mathbf{k} - \mathbf{k}_M| \leq [(\varepsilon_{\text{loc}} - \varepsilon_{\max})/D]^{1/2} \ll 1/a$ , и в главном логарифмическом приближении легко получить

$$\varepsilon_{\text{loc}} - \varepsilon_{\max} = \bar{\varepsilon} \exp\left(-\frac{4\pi D}{a^2 U_0}\right), \quad (6)$$

здесь и далее  $\bar{\varepsilon}$  – параметр обрезания порядка  $\Delta_\varepsilon$ , для определения которого нужно вычислять интеграл по  $\mathbf{k}$  с учетом точного вида спектра  $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ .

В случае притягивающего дефекта с  $U_0 < 0$  ситуация принципиально иная: невозмущенный закон дисперсии квазичастиц линейный,  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\min} + C|\mathbf{k}|$ ,  $C > 0$ , т.е. (в отличие от [33, 34]) спектр более “жесткий”, чем параболический. Интеграл в (5) при  $\varepsilon_{\text{loc}} \rightarrow \varepsilon_{\min}$  сходится и для существования локального уровня потенциал должен быть не мал,  $|U_0| \geq U_c$ , где  $U_c = (2\pi/a)^2 [f d\mathbf{k}/(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\min})]^{-1} \sim C/a$ . При малых значениях  $|U_0| - U_c > 0$  энергия связи мала,

$\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{\text{loc}} \rightarrow 0$  при  $|U_0| \rightarrow U_c$ , зависимость  $\varepsilon_{\text{loc}}$  от  $U_0$  имеет логарифмическую особенность,

$$|U_0| - U_c \propto (\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{\text{loc}}) \ln \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{\text{loc}}}. \quad (7)$$

Найденные выше зависимости представлены на рис. 1, они качественно согласуются с данными численного анализа проблемы [28].

Рассмотрим теперь эффекты, связанные с дальнедействием. Физически интересен случай, когда магнитное поле, создаваемое на других частицах массива “дефектной” частицей, отличается от регулярного. Это возникает, когда магнитный момент частицы на узле  $\mathbf{l} = 0$ ,  $m_{\text{def}}$ , другой, чем для остальных частиц,  $m_0$  (случай, когда дефект создан за счет переворота магнитного момента частицы в точке  $\mathbf{l} = 0$ , был рассмотрен в работе [28]). В такой ситуации уместно говорить о *дипольном дефекте*. Интересующему нас случаю слабого дефекта отвечает неравенство  $\Delta m = m_{\text{def}} - m_0 \ll m_0$ . Потенциал  $U(\mathbf{n})$  определяется  $z$ -проекцией магнитного поля “дефектной” частицы, а  $V(\mathbf{n})$  порождается взаимодействием  $x$  и  $y$  компонент  $\mathbf{m}_{\mathbf{l}=0}$  и  $\mathbf{m}_{\mathbf{l}=\mathbf{n}}$ . Оба потенциала пропорциональны  $m_0 \Delta m / |\mathbf{n}|^3$ , т.е.  $\{U, V\}(\mathbf{k}) \propto \sigma(\mathbf{k})$ , где дипольная сумма

$$\sigma(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} (a/|\mathbf{n}|)^3 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{n}). \quad (8)$$

Эти взаимодействия по-разному зависят от импульсов элементарных возбуждений, что приводит к различию их эффектов. Потенциал  $U(\mathbf{q})$  зависит от изменения импульса, которое мало для слабого дефекта. Поэтому все результаты получаются из полученных выше заменой  $U(\mathbf{q}) \rightarrow U(0)$ . Для потенциала  $V(\mathbf{k})$  ситуация иная: уравнение Лифшица может быть выписано точно, оно получается из (5) заменой  $U_0 d\mathbf{k}$  на  $V(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ . В этом случае для уровня вблизи притягивающего дефекта в уравнение входит  $V(\mathbf{k} = 0)$ , а для отталкивающего –  $V(\mathbf{k} = \mathbf{k}_M)$ . Это может приводить к интересному явлению: если величины  $V(\mathbf{k} = 0)$  и  $V(\mathbf{k} = \mathbf{k}_M)$  имеют разные знаки, то один и тот же дефект создает два локализованных состояния, выше и ниже непрерывного спектра. Именно этот случай имеет место для дипольного дефекта: для дипольной суммы  $\sigma(\mathbf{k})$  в (8)  $\sigma(0) = 9.032$  и  $\sigma(\mathbf{k}_M) = -2.645$ . Наличие двух состояний с  $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$  и  $\varepsilon < \varepsilon_{\min}$ , локализованных на узле, в котором магнитный момент частицы перевернут, согласуется с численным расчетом [28].

Перейдем теперь к анализу протяженных дефектов в массиве, которые образованы системой одинаковых “дефектных” частиц, расположенных вдоль

некоторой линии (для определенности – оси  $y$ ). Начнем со случая протяженного дефекта, образованного цепочкой точечных дефектов. Задача описывается одномерным уравнением Лифшица, которое получается из (5) заменой  $(a/2\pi)^2 d\mathbf{k} \rightarrow (a/2\pi) dk$ .

Образование локальной моды ниже полосы объемных мод отвечает критическому поведению: локальное состояние существует при сколь угодно слабом притягивающем взаимодействии  $U_0$ , но энергия связи экспоненциально мала,

$$\varepsilon_{\min} - \varepsilon_{\text{loc}} = \bar{\varepsilon} \exp\left(-\frac{2\pi C}{a|U_0|}\right). \quad (9)$$

Таким образом, для квазичастиц с неаналитическим законом дисперсии вида  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\min} + C|\mathbf{k}|$ ,  $C > 0$ , критической размерности отвечает одномерный случай (протяженный дефект в двумерной решетке).

Наличие отталкивающего дефекта приводит к появлению локального уровня при  $\varepsilon_{\text{loc}} > \varepsilon_{\max}$ , где невозмущенный закон дисперсии квазичастиц параболический и справедлив стандартной результат для одномерного случая: для слабого дефекта отщепление энергии от края зоны квадратично по  $U_0$ ,  $\varepsilon_{\text{loc}} - \varepsilon_{\max} = (aU_0/2)^2/D \sim U_0^2/\Delta\varepsilon$ .

Рассмотрим теперь локализованные моды для протяженного дефекта с учетом дальнего действия. Для дефекта в виде цепочки частиц с  $\Delta m = m_{\text{def}} - m_0 \neq 0$  наиболее важную роль играет неоднородность  $z$ -проекции магнитного поля. Ее вклад можно описать гамильтонианом

$$H_{\text{int}} = \sum_{\mathbf{n} \neq 0} U(n_x) a_{\mathbf{n}}^\dagger a_{\mathbf{n}}, \quad U(n_x) = - \sum_{n_y} \frac{m_0 \Delta m}{(n_x^2 + n_y^2)^{3/2}}, \quad (10)$$

функция  $U(n_x)$  хорошо интерполируется простым выражением,  $U(n_x) = -\alpha(m_0 \Delta m/a)(n_x^2 + \beta^2 a^2)^{-1}$ , где коэффициенты  $\alpha = 0.865$  и  $\beta = 0.838$  близки к единице. Получается, что убывание потенциала на больших расстояниях  $x \equiv n_x$  достаточно медленное,  $U(x) \propto 1/x^2$ . В этом случае, как и для кулоновского потенциала, может возникать бесконечное число локальных мод (см. [35]). Состояния с большими квантовыми числами  $n \gg 1$  являются квазиклассическими. Их исследование для произвольного закона дисперсии можно провести (как и для зонных электронов проводимости), выбрав функцию Гамильтона в виде  $H(p, x) = \varepsilon(p) + U(x)$ , где зависимость от импульса  $p = \hbar k$ ,  $k = k_x$  определяется  $\varepsilon(k)$ , а потенциал  $U(x)$  получается из  $U(n_x)$  заменой  $n_x$  на непрерывную координату  $x$ . Классическим аналогом состояния, локализованного около дефекта, является финитное движение, анализ которого

удобно провести на фазовой плоскости (ФП) канонических переменных  $p, x$  (см. рис. 2). Фазовые траектории для состояния с энергией  $\varepsilon$  определяются уравнением  $H(p, x) = \varepsilon$

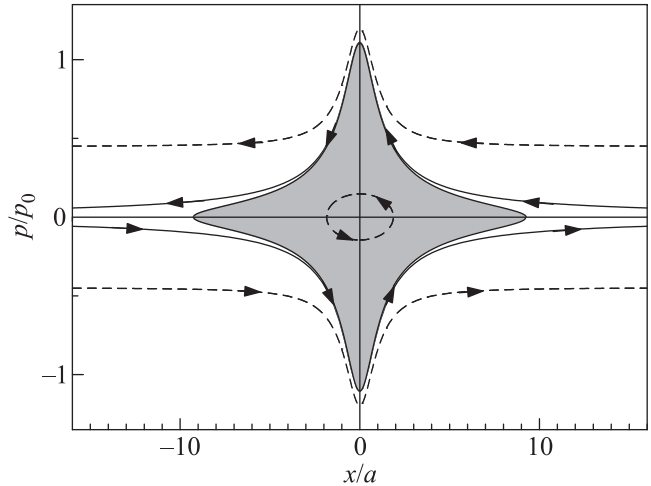


Рис. 2. Динамика изображающей точки ФП для описания протяженного дипольного дефекта с отталкиванием. Используются безразмерные переменные  $p/p_0$  и  $x/a$ , где  $p_0 = \hbar\sqrt{m_0\Delta m/Da^3}$ . Затенена область ФП для финитного движения вблизи сепаратрисы (жирная линия) при  $\varepsilon = \varepsilon(k_M) + 0.01 \cdot U(0)$ , штриховыми линиями показаны траектории инфинитного движения и финитного движения с  $n \sim 1$

Особенностью задачи с ограниченной сверху “кинетической энергией”  $\varepsilon(p)$  является наличие финитного движения не только около минимума притягивающего потенциала, но и около максимума отталкивающего потенциала. Оно описывается двумя типами особых точек типа центр на ФП, которые расположены в минимуме или максимуме функции Гамильтона  $H(p, x)$  по отношению к  $x$  и  $p$ , со значениями  $H_{\min}$  и  $H_{\max}$ , которые различаются направлением движения изображающей точки ФП. Сепаратриса разделяет локализованные состояния и инфинитное движение, отвечающее непрерывному спектру.

Условие квазиклассического квантования состоит в том, что площадь области ФП, ограниченной траекторией для энергии  $\varepsilon_{\text{loc},n} \equiv \varepsilon_n$  с  $n \gg 1$ , равна  $\hbar n$ . Наличие состояний с  $n \rightarrow \infty$  означает, что интеграл  $\oint p(x) dx$ , определяющий эту площадь, расходится при приближении к сепаратрисной траектории, т.е. при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\min}$  или  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\max}$ .

Случаи  $U(x) < 0$  и  $U(x) > 0$  отличаются принципиально. Для притягивающего дефекта асимптотическая форма сепаратрисы определяется соотношением  $\varepsilon(p) - \varepsilon_{\min} = Cp/\hbar = \alpha m_0 \Delta m / a x^2$ , инте-

грал  $\int p dx$  сходится и возможно только конечное число локальных состояний. При малых  $\Delta m \rightarrow 0$  такое состояние только одно, его энергия связи мала и определяется формулой (9). Если же  $\Delta m < 0$  и дипольный дефект отталкивающий, то на сепаратрисе  $\varepsilon_{\max} - \varepsilon(p) = D(p/\hbar)^2 = \alpha m_0 |\Delta m| / a x^2$  и интеграл  $\int p dx$  логарифмически расходится при  $x \rightarrow \infty$ . Следовательно, около такого дефекта существует бесконечное число локализованных состояний, энергии которых  $\varepsilon_n$  с ростом  $n$  сгущаются к верхнему краю непрерывного спектра. Максимальное отщепление уровня  $\varepsilon_1 - \varepsilon_{\max}$  при малом  $|\Delta m|$  квадратично по  $|\Delta m|$ ,  $\varepsilon_1 - \varepsilon_{\max} \propto (m_0 \Delta m)^2 / D a^4$ . При больших  $n$  анализ можно провести без использования неравенства  $\Delta m \ll m_0$ , отщепление уровня  $\varepsilon_n$  экспоненциально мало,

$$\varepsilon_n - \varepsilon_{\max} = \frac{(m_0 \Delta m) \beta^2}{\alpha a^3} \exp\left(-\frac{n}{n_0}\right), \quad n_0 = 8 \frac{\sqrt{\alpha m_0 |\Delta m|}}{\sqrt{a D}}. \quad (11)$$

Интересно отметить, что граница массива качественно может быть рассмотрена как дефект с  $\Delta m < 0$ . Существование нескольких мод, локализованных около границы массива, частоты которых  $\varepsilon_n$  с ростом  $n$  быстро приближались к  $\varepsilon_{\max}$ , было найдено при численном анализе конечных массивов частиц [30, 31]. Полученный выше результат подтверждает гипотезу [30, 31], что на самом деле число таких мод бесконечно.

Таким образом, для решеток магнитных частиц с дефектами различной природы, точечных и линейных (одномерных), локализованных или с дипольным взаимодействием, существует широкий спектр локальных мод. Условия появления локальных мод около притягивающего дефекта более жесткие, чем в стандартных задачах квантовой механики: для точечного дефекта взаимодействие должно быть достаточно сильным, а случай протяженного дефекта (одномерный случай) отвечает критической размерности. Для отталкивающего протяженного дипольного дефекта существует бесконечное число локальных мод, энергии которых сгущаются к верхней границе континуума магنونных мод.

Мы признательны В.Г. Барьяхтару и П.В. Бондаренко, Р.В. Вербе и А.Н. Славину за полезные обсуждения. Работа поддержана НАН Украины, гранты # 1/16-Н и ВЦ/157.

3. C. A. Ross, M. Hwang, M. Shima, J. Y. Cheng, M. Farhoud, T. A. Savas, H. I. Smith, W. Schwarzacher, F. M. Ross, M. Redjial, and F. V. Humphrey, *Phys. Rev. B* **65**, 144417 (2002).
4. J. M. Luttinger and L. Tisza, *Phys. Rev.* **70**, 954 (1946).
5. П. И. Белобров, Р. С. Гехт, В. А. Игнатченко, *ЖЭТФ* **84**, 1097 (1983).
6. J. G. Brankov and D. M. Danchev, *Physica A* **144**, 128 (1987).
7. K. Yu. Guslienko, *Appl. Phys. Lett.* **75**, 394 (1999).
8. Б. А. Иванов, *ФНТ* **31**, 841 (2005).
9. J. E. L. Bishop, A. Yu. Galkin, and B. A. Ivanov, *Phys. Rev. B* **65**, 174403 (2002).
10. А. Ю. Галкин, Б. А. Иванов, А. Ю. Меркулов, *ЖЭТФ* **128**, 1260 (2005).
11. Б. А. Иванов, В. Е. Киреев, *Письма в ЖЭТФ* **90**, 848 (2009).
12. А. Ю. Галкин, Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **83**, 450 (2006).
13. П. В. Бондаренко, А. Ю. Галкин, Б. А. Иванов, *ЖЭТФ* **139**, 1127 (2011).
14. А. М. Шутый, *Письма в ЖЭТФ* **97**, 601 (2013).
15. И. Р. Каретникова, К. Р. Мухаматчин, И. М. Нефедов, М. В. Сапожников, А. А. Фраерман, И. А. Шерешевский, *ЖЭТФ* **145**, 497 (2014).
16. P. Politi and M. G. Pini, *Phys. Rev. B* **66**, 214414 (2002).
17. A. Yu. Galkin, B. A. Ivanov, and C. E. Zaspel, *Phys. Rev. B* **74**, 144419 (2006).
18. P. Chu, D. L. Mills, and R. E. Arias, *Phys. Rev. B* **73**, 104425 (2006).
19. P. V. Bondarenko, A. Yu. Galkin, B. A. Ivanov, and C. E. Zaspel, *Phys. Rev. B* **81**, 224415 (2010).
20. R. Verba, G. Melkov, V. Tiberkevich, and A. Slavin, *Phys. Rev. B* **85**, 014427 (2012).
21. V. V. Kruglyak, S. O. Demokritov, and D. Grundler, *J. of Phys. D* **43**, 264001 (2010).
22. S. Demokritov and A. Slavin, *Magnonics: From Fundamentals to Applications*, Topics in Applied Physics, Springer, N.Y. (2012).
23. С. А. Никитов, Д. В. Калябин, И. В. Лисенков и др. (Collaboration), *УФН* **185**, 1099 (2015).
24. S. Tacchi, M. Madami, G. Gubbiotti, G. Carlotti, S. Goolaup, A. O. Adeyeye, N. Singh, and M. P. Kostylev, *Phys. Rev. B* **82**, 184408 (2010).
25. J. Topp, D. Heitmann, M. P. Kostylev, and D. Grundler, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 207205 (2010).
26. R. Verba, V. Tiberkevich, E. Bankowski, T. Meitzler, G. Melkov, and A. Slavin, *Appl. Phys. Lett.* **103**, 082407 (2013).
27. R. Verba, V. Tiberkevich, K. Guslienko, G. Melkov, and A. Slavin, *Phys. Rev. B* **87**, 134419 (2013).

1. *Advanced Magnetic Nanostructures*, ed. by D. J. Sellmyer and R. Skomski, Springer, N.Y. (2006).

2. G. Meier, M. Kleiber, D. Grundler, D. Heitmann, and R. Wiesendanger, *Appl. Phys. Lett.* **72**, 2168 (1998).

28. R. Verba, V. Tiberkevich, E. Bankowski, T. Meitzler, G. Melkov, and A. N. Slavin, *IEEE Magnetics Lett.* **4**, 4000404 (2013).
29. V. V. Kruglyak, M. L. Sokolovskii, V. S. Tkachenko, and A. N. Kuchko, *J. Appl. Phys.* **99**, 08C906 (2006).
30. П. В. Бондаренко, *Письма в ЖТФ* **40**, 78 (2014).
31. I. Lisenkov, V. Tyberkevych, A. Slavin, P. Bondarenko, B. A. Ivanov, E. Bankowski, T. Meitzler, and S. Nikitov, *Phys. Rev. B* **90**, 104417 (2014).
32. И. М. Лифшиц, С. И. Пекар, *УФН* **56**, 531 (1955).
33. Б. А. Иванов, А. М. Косевич, *ФНТ* **2**, 787 (1976).
34. Б. А. Иванов, А. М. Косевич, *ФНТ* **9**, 845 (1983).
35. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, М. (1982).