

Гиперболические метаматериалы на основе брэгговских поляритонных структур

Е. С. Седов^{a,b1)}, М. В. Чарухчян^b, С. М. Аракелян^b, А. П. Алоджанц^{b,c}, Р.-К. Ли^d, А. В. Кавокин^{a,e,f}

^a*School of Physics and Astronomy, University of Southampton, SO17 1BJ Southampton, UK*

^b*Кафедра физики и прикладной математики, Владимирский государственный университет им. Столетовых, 600000 Владимир, Россия*

^c*С.-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (ИТМО), 197101 С.-Петербург, Россия*

^d*Institute of Photonics Technologies, National Tsing-Hua University, 300 Hsinchu, Taiwan*

^e*CNR-SPIN, Viale del Politecnico 1, I-00133 Rome, Italy*

^f*Лаборатория оптики спина, С.-Петербургский государственный университет, 198504 Петергоф, Россия*

Поступила в редакцию 23 мая 2016 г.

Предложен новый гиперболический метаматериал на основе модифицированных полупроводниковых брэгговских зеркал, содержащих периодически расположенные квантовые ямы. Показано, что экситон-поляритоны обладают гиперболической дисперсией вблизи второй фотонно запрещенной зоны. Экситон-фотонное взаимодействие обеспечивает проявление резонансной нелинейности, приводящей к формированию нетривиальных топологических поляритонных образований. Предсказано формирование пространственно-локализованных бризероподобных структур – осциллонов, – представляющих кинк-образные решения эффективного уравнения типа Гинзбурга–Ландау–Хиггса, слабо осциллирующих в одном из пространственных направлений.

DOI: 10.7868/S0370274X16130129

1. Введение. Распространение электромагнитного излучения в сложно структурированных искусственных неоднородных средах, которые принято называть метаматериалами, позволило связать их необычные свойства с геометрией (криволинейной) пространства-времени, что является основой описания явлений в общей теории относительности, см. например, [1]. В фундаментальном аспекте данное обстоятельство выглядит перспективным для поиска аналогов основополагающих явлений в гравитации и космологии, которые могли бы быть смоделированы в таких средах (ср. с [2]). Идея создания сред, в которых свет распространяется по заранее заданной траектории, известная как *трансформационная оптика* [3], позволяет моделировать различные гравитационные эффекты такие, как гравитационное линзирование [4], горизонт событий [2] и др. Среди таковых следует также выделить гиперболические метаматериалы (ГММ), обладающие гиперболической пространственной дисперсией [5]. Аналогия между распространением электромагнитных волн, описы-

ваемым уравнением Гельмгольца в ГММ и эффективным уравнением Клейна–Гордона для описания динамики массивной частицы с фиктивной временной координатой может быть использована для моделирования пространства-времени Минковского на основе ГММ [6]. Однако, для более полной аналогии с задачами гравитации, теории поля и космологии необходимо обеспечить в структуре ГММ также сильную нелинейность типа керровской. Но нелинейный отклик традиционных ГММ достаточно мал. Кроме того, ГММ, содержащие металлические элементы, обладают большими омическими потерями, что приводит к сильному затуханию электромагнитного поля при распространении.

В данной работе мы предлагаем новый подход к моделированию явлений “в криволинейном пространстве-времени” при помощи резонансных ГММ – многослойных полупроводниковых экситон-поляритонных структур, которые могут быть созданы на основе модифицированных брэгговских зеркал, содержащих периодическим образом расположенные полупроводниковые квантовые ямы (КЯ) [7, 8]. Такие структуры характеризуются

¹⁾e-mail: evgeny_sedov@mail.ru

сильной оптической нелинейностью, возникающей в результате экситон-экситонного взаимодействия [9]. Возможность управления дисперсионными свойствами структуры резонансных ГММ позволяет применять их для изучения свойств поля Хиггса (ср. с [10]).

2. Модель резонансного ГММ. Рассмотрим модифицированное полупроводниковое брэгговское зеркало, схематично представленное на рис. 1а. Структура представляет собой решетку чередующихся диэлектрических слоев, при этом в центрах слоев одного типа содержатся полупроводниковые КЯ. Следует отметить, что в рассматриваемой структуре не выполняется условие брэгговского резонанса, т.е. $n_1 d_1 \neq n_2 d_2$. Это ведет к открытию второй фотонной запрещенной зоны.

Для получения собственных мод структуры мы воспользуемся методом матрицы переноса [11]. Дисперсионное уравнение для бесконечной периодической структуры имеет вид

$$\cos(KD) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{T}), \quad (1)$$

где K – компонента волнового вектора в направлении, перпендикулярном плоскости КЯ, D – период решетки, \hat{T} – матрица переноса через период структуры, которая для рассматриваемой конфигурации может быть представлена в виде

$$\hat{T} = \hat{T}_{d_1/2} \hat{T}_{QW} \hat{T}_{d_1/2} \hat{T}_{d_2},$$

где $\hat{T}_{d_1/2, QW, d_2}$ – матрицы переноса через половину первого слоя, квантовую яму и второй слой соответственно. В дальнейшем мы рассматриваем s -поляризованный свет. В таком случае матрица переноса через половину первого слоя задается как

$$\hat{T}_{d_1/2} = \begin{pmatrix} \cos(k_{z1} d_1/2) & \frac{ik_0}{k_{z1}} \sin(k_{z1} d_1/2) \\ \frac{ik_{z1}}{k_0} \sin(k_{z1} d_1/2) & \cos(k_{z1} d_1/2) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $k_0 = \omega/c$, $k_{z1} = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \mathbf{k}_\rho^2}$; $\mathbf{k}_\rho = (k_x, k_y)$ – компонента волнового вектора в плоскости КЯ; n_1 – показатель преломления первого слоя. Аналогично можно записать матрицу переноса для второго слоя, формально выполнив в (2) следующие замены: $d_1/2 \rightarrow d_2$ и $k_{z1} \rightarrow k_{z2}$. Матрица переноса КЯ имеет вид [11]

$$\hat{T}_{QW} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \frac{k_z r}{k_0 t} & 1 \end{pmatrix},$$

где r и t – коэффициенты отражения и пропускания КЯ, соответственно. В случае s -поляризации они находятся как

$$r = \frac{in_1 k_0 \Gamma_0 / k_{z1}}{\omega_X - \omega - i(\Gamma + n_1 k_0 \Gamma_0 / k_{z1})}, \quad t = 1 + r,$$

где Γ_0 и Γ – скорости излучательного и безызлучательного распада экситона соответственно, ω_X – резонансная частота экситона.

Итак, уравнение (1) определяет частоты собственных мод формируемых в среде экситон-поляритонов, $\omega(K, k_\rho)$. В результате сочетания брэгговского расщепления фотонной дисперсионной ветви с Раби расщеплением в результате взаимодействия с экситонами в КЯ в структуре формируется четыре дисперсионные ветви эситон-поляритонов [8, 12]. В дальнейшем, пренебрегая взаимодействием поляритонных ветвей, ограничимся рассмотрением только нижней ветви. Рис. 1б демонстрирует дисперсионную поверхность нижней дисперсионной ветви в структуре резонансного ГММ.

Для оценок и построений использованы параметры GaN/Al_{0.3}Ga_{0.7}N структуры с узкими In_{0.12}Ga_{0.88}N КЯ. Для такой структуры энергия связи экситонов E_b составляет порядка 45 мэВ, экситонный борковский радиус $a_b \approx 18$ нм, ширина КЯ $d_{QW} = d_{QW} = 10$ нм и частота Раби $\Omega_P \approx 2\pi \times 7.1$ ТГц. Для центра второй фотонной запрещенной зоны $\hbar\omega_B$ имеем 3 эВ; ширина зоны, $\hbar\Omega_B$, составляет 0.05 эВ. Толщина слоев и их показатели преломления: $d_1 = 64.8$ нм, $n_1 = n_{\text{GaN}} = 2.55$ и $d_2 = 115.3$ нм, $n_2 = n_{\text{AlGaIn}} = 2.15$. Полный период решетки $D = d_1 + d_2 = 180.1$ нм. Скорость излучательного распада InGaIn экситоннов составляет $\hbar\Gamma_0 = 2$ мэВ, а скорость безызлучательного распада $\hbar\Gamma = 0.1$ мэВ. Энергия экситона $\hbar\omega_X$ настроена на величину 2.95 эВ.

Примечательно, что дисперсионная поверхность нижней поляритонной ветви характеризуется седловой точкой [13, 14]. В связи с этим, интересной особенностью системы является тот факт, что поляритоны нижней дисперсионной ветви обладают тензорной эффективной массой

$$\mathbf{m}^* = \begin{pmatrix} m_{||}^* & 0 \\ 0 & m_{\perp}^* \end{pmatrix},$$

при этом диагональные элементы тензора \mathbf{m}^* обладают противоположными знаками, $\text{sgn}(m_{||}^*) = -\text{sgn}(m_{\perp}^*) = 1$. Индексы “||” и “⊥” характеризуют компоненты тензора в плоскости КЯ и в направле-

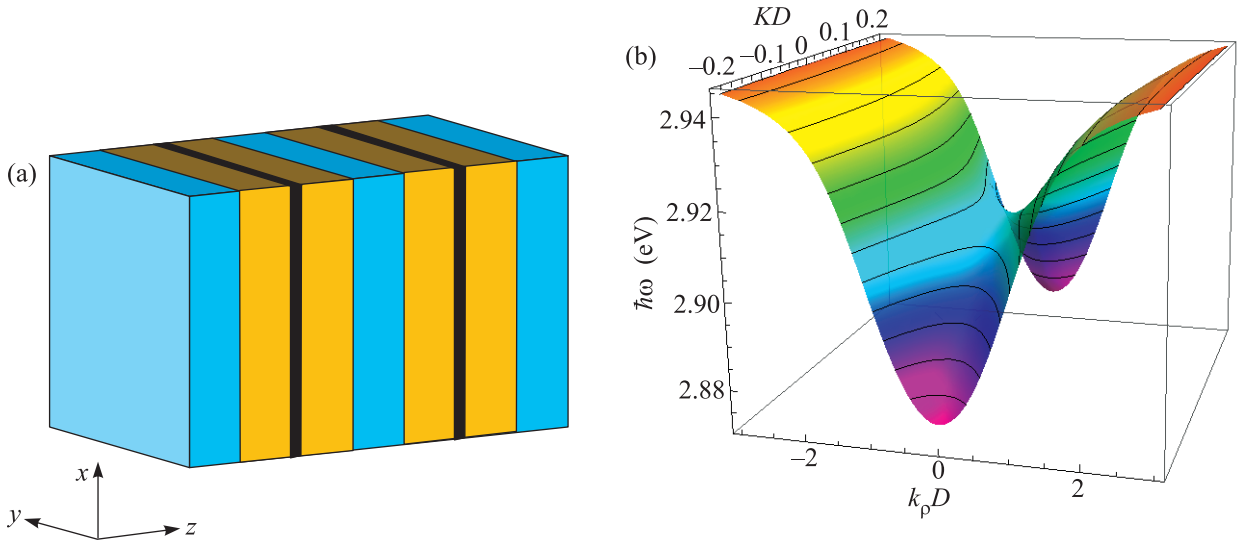


Рис. 1. (Цветной онлайн) (а) – Схематическое изображение пространственно-периодической структуры резонансного ГММ. Черным обозначены узкие КЯ, расположенные в центрах слоев одного типа. (б) – Дисперсионная поверхность нижней ветви экситон-поляритонов в структуре GaN/Al_{0.3}Ga_{0.7}N модифицированного брэгговского зеркала с In_{0.12}Ga_{0.88}N КЯ, расположенными в центрах слоев GaN. Параметры системы, используемые при построении, указаны в тексте

нии роста структуры, соответственно. В общем случае тензор эффективной массы зависит от волнового вектора, однако для волновых векторов, не превышающих периода обратной решетки $1/D$, элементы тензора можно полагать постоянными.

Получим аналитические выражения для компонентов тензора эффективной массы поляритонов нижней ветви вблизи седловой точки. Для этого, приняв во внимание тот факт, что в рассматриваемой структуре нарушается условие брэгговского резонанса, введем малые параметры $\xi = (n_1 d_1 / n_2 d_2 - 1)$ и $\delta = \omega / \omega_B - 1$, где $\omega_B = 2\pi c / (n_1 d_1 + n_2 d_2)$ – центр второй фотонной запрещенной зоны в отсутствии КЯ. Выполним разложение в ряд по малым параметрам ξ и δ правой и левой частей уравнения (1) с учетом $K, k_\rho \ll 1/D$. Далее, воспользовавшись определением $m^* = \hbar (\partial^2 \omega / \partial k^2)^{-1}$, выразим компоненты тензора эффективной массы поляритонов в направлении роста структуры и в плоскости КЯ в центре первой зоны Бриллюэна:

$$m_{\perp}^* = -\frac{2\hbar\Omega_B}{(\omega_B - \Omega_B)\omega_B D^2} \frac{\pi^2(n_1 + n_2)^2}{n_1 n_2},$$

$$m_{\parallel}^* = \frac{2\hbar(\omega_B - \Omega_B)}{c^2} \frac{n_1^2 n_2^2}{(n_1^2 - n_1 n_2 + n_2^2)},$$

где $\Omega_B = \omega_B |(n_2 - n_1)(1 - \xi) / 2(n_1 + n_2)|$ – полуширина второй фотонной запрещенной зоны.

3. Уравнение Гросса–Питаевского для брэгговских поляритонов. Гамильтониан системы для

оператора бозонного поля $\hat{\Psi}^\dagger \equiv \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ в прямом пространстве принимает вид [11, 15]

$$\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger \hat{H}_0 \hat{\Psi} + \frac{g}{2} \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi}. \quad (3)$$

В рамках приближения эффективной массы при $k_\rho, K \ll \pi/D$ оператор кинетической энергии задается выражением

$$\hat{H}_0 = \hbar(\omega_B - \Omega_B - \Omega_P) + \frac{\hbar^2 K^2}{2m_{\perp}^*} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{\parallel}^*}.$$

В дальнейших расчетах мы опустим постоянную величину энергии $E_0 = \hbar(\omega_B - \Omega_B - \Omega_P)$. Коэффициент g описывает нелинейное взаимодействие экситонов и может быть оценен как $g \simeq 3E_b a_b^3 D / 2d_{QW}$ [8].

Мы предполагаем, что основное состояние нижней поляритонной ветви макроскопически заселено. Это позволяет, пользуясь приближением среднего поля, заменить оператор $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ его средним значением $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \rangle \equiv \Psi(\mathbf{r})$, которое характеризует волновую функцию (ВФ) поляритонов [16]. В результате мы получаем соответствующее гамильтониану (3) управляющее уравнение Гросса–Питаевского для поляритонной ВФ $\Psi(\mathbf{r})$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_{\parallel}^*} \Delta_{xy} - \frac{\hbar^2}{2m_{\perp}^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + g|\Psi|^2 \right] \Psi. \quad (4)$$

Для поиска стационарного решения уравнения (4) введем новую переменную φ следующим образом: $\Psi = \sqrt{\kappa^2 \kappa_z} \varphi \exp(-iEt/\hbar)$, а также безразмерные координаты $X = x/\kappa$, $Y = y/\kappa$, $Z = z/\kappa_z$, где нормировочные параметры $\kappa = \hbar\sqrt{V/2m_{\parallel}^*g}$, $\kappa_z = \hbar\sqrt{V/2|m_{\perp}^*g}$ – характерные макроскопические масштабы поляритонной системы. Параметр E – энергия системы, которая оценивается как $E \simeq gn_{\infty}$, где n_{∞} – средняя плотность экситон-поляритонного газа в структуре. Подставив Ψ в (4), мы в результате получаем стационарное безразмерное уравнение

$$\partial_{ZZ}\varphi - (\partial_{XX} + \partial_{YY})\varphi - \eta\varphi + G|\varphi|^2\varphi = 0, \quad (5)$$

где $\eta = EV/g$, $G = V/\kappa^2\kappa_z$. Безразмерная поляритонная ВФ φ подчиняется условию нормировки, $\iiint_{L^2L^2L^2} \varphi^2 dXdYdZ = N$, где N – число поляритонов в структуре; $L_X = L_Y = L$ и L_Z – характерные нормированные размеры структуры.

В линейном пределе, эквивалентном пределу малой плотности поляритонов, когда нелинейными эффектами, вызванными поляритон-поляритонным взаимодействием, можно пренебречь, уравнение (5) имеет решение в виде плоской волны $\Psi \propto e^{i\mathbf{QR}}$. Компоненты волнового вектора \mathbf{Q} вдоль оптической оси структуры и в плоскости КЯ связаны соотношением $Q_Z = \pm\sqrt{Q_{\parallel}^2 - \eta}$, где $Q_{\parallel}^2 = Q_X^2 + Q_Y^2$. Соответствующий изочастотный контур представлен на рис. 2а.

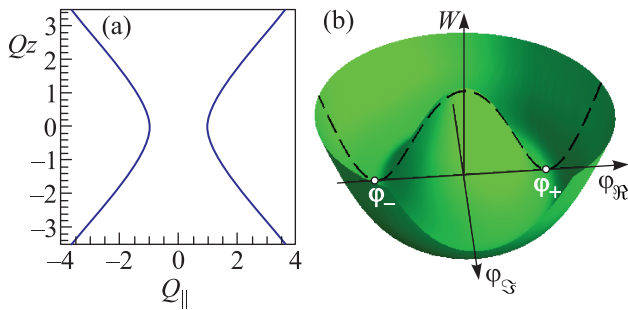


Рис. 2. (Цветной онлайн) (а) – Изочастотная поверхность для брэгговских экситон-поляритонов в линейном режиме. Значения $Q_{\parallel,z}$ даны в единицах $\sqrt{\eta}$. Эффективные массы поляритонов в структуре: $m_{\parallel}^* \approx 5.6 \cdot 10^{-35}$ кг, $m_{\perp}^* \approx -0.8 \cdot 10^{-36}$ кг. (б) – Схематическое изображение потенциала Хиггса W в зависимости от компонентов φ_{\Re} и φ_{\Im} комплексного поля φ

4. Поляритонное поле Хиггса. Нелинейное уравнение (5) с псевдо-временной координатой Z представляет собой уравнение типа Гинзбурга–Ландау–Хиггса (ГЛХ), которое обсуждалось в литературе в связи с вопросами эволюции вселенной [17, 18]. Для изучения свойств уравнения (5) удобно

представить поле Хиггса φ в виде комплексного скалярного поля $\varphi = \varphi_{\Re} + i\varphi_{\Im}$. Потенциал в форме “мексиканской шляпы” $W \equiv W(\varphi_{\Re}, \varphi_{\Im})$ схематично изображен на рис. 2б. Состояние ложного вакуума соответствует значению $\varphi = 0$, в то время как истинные вакуумные состояния описываются выражениями $\varphi_{\pm} = \pm\sqrt{\tilde{n}_{\infty}} = \pm\sqrt{\eta/G}$ [10], где \tilde{n}_{∞} представляет собой безразмерную плотность экситон поляритонного газа; \tilde{n}_{∞} связана с размерной плотностью выражением $\tilde{n}_{\infty} = n_{\infty}\kappa^2\kappa_z$.

Рассмотрим поведение поляритонов в присутствии слабых возмущений $\delta\varphi_{\Re,\Im}$ основного состояния системы φ_0 , т.е. представим решения уравнения (5) в виде $\varphi_{\Re} = \varphi_0 + \delta\varphi_{\Re}$, $\varphi_{\Im} = \delta\varphi_{\Im}$ ($\delta\varphi_{\Re,\Im} \ll \varphi_0$). Учитывая свойства глобальной $U(1)$ симметрии лагранжиана уравнения (5), можно полагать, что поле $\delta\varphi_{\Re}$ обладает аналогом эффективной массы в 2+1-мерном пространстве, в то время как поле $\delta\varphi_{\Im}$ является безмассовым и аналогично бозону Намбу–Голдстоуна. Сосредоточим внимание на свойствах поля φ_{\Re} . Уравнение (5) имеет классическое (стационарное) решение в форме кинка или темного солитона $\varphi_0(X, Y) = \pm\sqrt{\tilde{n}_{\infty}} \tanh\left[\sqrt{\eta/2}(X - X_0 + Y - Y_0)\right]$, где параметры X_0, Y_0 характеризуют расположение минимума огибающей функции. Перепишем решение в обобщенном виде. Для этого повернем систему координат вокруг оси Z на угол $\pi/4$, что эквивалентно введению новых декартовых координат $X \rightarrow (X - Y)/\sqrt{2}$ и $Y \rightarrow (X + Y)/\sqrt{2}$. Очевидно, что в при повороте преобразование параметров X_0 и Y_0 описывается выражениями $X_0 \rightarrow (X_0 - Y_0)/\sqrt{2}$ и $Y_0 \rightarrow (X_0 + Y_0)/\sqrt{2}$. В результате стационарное солитонное решение примет вид

$$\varphi_0(X) = \pm\sqrt{\tilde{n}_{\infty}} \tanh\left[\sqrt{\frac{\eta}{2}}(X + X_0)\right]. \quad (6)$$

При $X \rightarrow \infty$ солитонное решение (6) приближается к вакуумным состояниям φ_{\pm} . Для простоты мы полагаем минимум кинка находящимся в центре структуры, т.е. в новых координатах полагаем $X_0 = L/\sqrt{2}$ и $Y_0 = 0$. Из условия нормировки для φ получаем выражение для критического числа частиц в кинке: $N \simeq L_Z(L^2\eta - 8\ln[\cosh[\tilde{L}]])/G$, где введен безразмерный параметр $\tilde{L} = L\sqrt{\eta}/2$.

В соответствии с [10], в пределе $\tilde{n}_{\infty} \gg 1$ солитон можно рассматривать как классический объект. Рассмотрим поле φ слабо флуктуирующим в направлении Z , т.е. представим его в виде $\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\delta\varphi$ ($\delta\varphi_{\Re} \equiv \varepsilon\delta\varphi$, $|\varphi_0| \gg \varepsilon|\delta\varphi|$), где осциллирующее решение $\delta\varphi = \delta\varphi(X) \cos(\Omega(Z - Z_0))$ характеризует продольные колебания с пространственной частотой Ω . Под-

ставляя φ и (6) в (5) и линеаризуя уравнение по $\delta\varphi$, мы получим первое возбужденное состояние системы

$$\delta\varphi(X) = \sqrt{\tilde{n}_\infty} \tanh \left[\sqrt{\frac{\eta}{2}} (X + X_0) \right] \times \\ \times \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{\eta}{2}} (X + X_0) \right].$$

при $\Omega^2 = 3\eta/2$. В результате имеем состояние, названное “осциллоном Хиггса”, когда классический кинк φ_0 сопровождается осцилляциями поля Хиггса φ с малой амплитудой.

На рис. 3а представлен возбужденный кинк φ^2 как функция от размерных пространственных координат x и z при фиксированном значении y . Затемненная плоскость на рис. 3а обозначает вакуумное состояние φ_\pm^2 . С учетом периодичности решения в направлении Z (с периодом $2\pi/\Omega$) мы рассматриваем формирование осциллона в трехмерном объеме $L_X \times L_Y \times L_Z$. Условие $\eta = 2\pi^2 j^2 / 3L_Z^2$ соответствует нормированной энергии $\eta \equiv E_j V / g$. На рис. 3б представлен квадрат амплитуды квантованного осциллона Хиггса $\delta\varphi^2$ в основном состоянии ($j = 1$).

Плотность энергии J поляритонного поля Хиггса описывается выражением $J = \frac{1}{2}[(\partial_Z \varphi)^2 + (\partial_X \varphi)^2 + (\partial_Y \varphi)^2 - \eta\varphi^2 + \frac{G}{2}\varphi^4]$. Интегрируя J по пространственным координатам X, Y с учетом $|\varphi_0| \gg \varepsilon|\delta\varphi|$, мы получаем плотность энергии в направлении Z :

$$E_{0,Z} = \frac{\eta}{3G} \left(2 - 3\tilde{L}^2 + 8 \ln \left[\cosh[\tilde{L}] \right] - 2\operatorname{sech}^2[\tilde{L}] \right). \quad (7)$$

Плотность энергии вакуумных состояний φ_\pm в направлении Z находится как $E_{\pm,Z} = -\tilde{L}^2 \eta / G$. Учитывая (7), можно ввести аналог эффективной “массы” кинка φ как $M \sim E_{0,Z} - E_{\pm,Z}$ [17].

5. Заключение В настоящей работе предложен физический принцип моделирования свойств гиперболических метаматериалов в пространственно-периодической структуре модифицированного брэгговского зеркала с квантовыми ямами. Показано, что управляющее уравнение Гросса–Питаевского для поляритонов может быть преобразовано в нелинейное уравнение типа ГЛХ, которое описывает физически нетривиальные свойства поля. Предсказано формирование образований в форме кинка для слабозаимодействующих поляритонов. Осцилляции с малой амплитудой (осциллоны) возникают в поляритонном поле Хиггса в результате флуктуаций. Резонансные поляритонные ГММ обладают значительными перспективами для моделирования фундаментальных процессов эволюции вселенной.

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания ВлГУ # 16.440.2014/К на

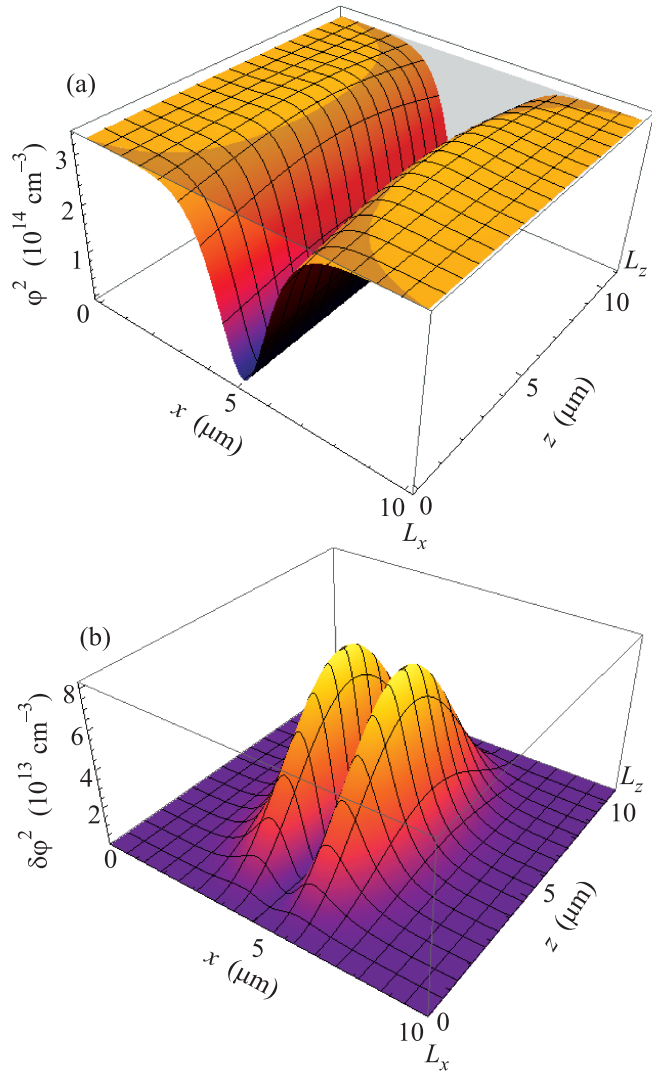


Рис. 3. (Цветной онлайн) (а) – Возбужденное поле Хиггса φ^2 , (б) – Возбуждение $\delta\varphi^2$ в зависимости от пространственных координат x и z . Значения φ^2 и $\delta\varphi^2$ представлены в размерном виде: $\varphi^2 \rightarrow \varphi^2 / \kappa^2 \kappa_z$, $\delta\varphi^2 \rightarrow \delta\varphi^2 / \kappa^2 \kappa_z$. Параметры: $X_0 = Y_0 = L/2$, $Z_0 = \pi/2\Omega$, $\varepsilon = 0.2$, $L_x = L_y = 10$ мкм, $L_z \approx 10.9$ мкм, $g \approx 7.1$ мэВ · мкм³, $n_\infty \approx 3.3 \cdot 10^{14}$ см⁻³, $E_1 \approx 2.36$ мэВ. Затемненная плоскость $\varphi^2 = n_\infty$ на (б) соответствует вакуумным решениям

выполнение государственных работ в сфере научной деятельности, частично при финансовой поддержке грантов РФФИ # 15-52-52001, # 15-59-30406. Работа Е.С.С. поддержана грантом РФФИ # 16-32-60104, а также грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых # МК-8031.2016.2.

1. A. J. Ward and J. B. Pendry, J. of Mod. Optics **43**, 773 (1996).

2. U. Leonhardt and T. Philbin, *Progress in Optics* **53**, 69 (2009).
3. H. Chen, C. Chan, and P. Sheng, *Nature Mater.* **9**, 387 (2010).
4. C. Sheng, H. Liu, Y. Wang, S. N. Zhu, and D. A. Genov, *Nature Photon.* **7**, 902 (2013).
5. A. Poddubny, I. Iorsh, P. A. Belov, and Yu. S. Kivshar, *Nature Photon.* **7**, 948 (2013).
6. I. I. Smolyaninov, *Phys. Rev. A* **88**, 033843 (2013).
7. A. V. Poshakinskiy, A. N. Poddubny, L. Pilozzi, and E. L. Ivchenko, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 107403 (2014).
8. E. S. Sedov, I. V. Iorsh, S. M. Arakelian, A. P. Alodjants, and A. Kavokin, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 237402 (2015).
9. M. Abbarchi, A. Amo, V. G. Sala, D. D. Solnyshkov, H. Flayac, L. Ferrier, I. Sagnes, E. Galopin, A. Lemaitre, G. Malpuech, and J. Bloch, *Nature Phys.* **9**, 275 (2013).
10. V. A. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, Princeton, NJ (2002).
11. A. V. Kavokin, J. Baumber, G. Malpuech, and F. Laussy, *Microcavities*, Oxford University Press, Oxford (2007).
12. A. Yu. Sivachenko, M. E. Raikh, and Z. V. Vardeny, *Phys. Rev. A* **64**, 013809 (2001).
13. F. Biancalana, L. Mouchliadis, C. Creatore, S. Osborne, and W. Langbein, *Phys. Rev. B* **80**, 121306(R) (2009).
14. E. S. Sedov, E. D. Cherotchenko, S. M. Arakelian, and A. V. Kavokin, *Light propagation in tuneable exciton-polariton hyperbolic metamaterials*, unpublished.
15. Yu. D. Zavorotnev and O. Yu. Popova, *J. of Photonic Materials and Technology* **1**, 10 (2015).
16. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
17. V. G. Makhankov, *Phys. Rep. C* **35**, 1 (1978).
18. M. V. Charukhchyan, E. S. Sedov, S. M. Arakelian, and A. P. Alodjants, *Phys. Rev. A.* **89**, 063624 (2014).