Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 2, с. 75 – 82 © 2016 г. 25 июля

Индуцированный магнитный момент и прецессия спина нейтрино

А. И. Тернов[1)]

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 8 июня 2016

Индуцированный магнитный момент, возникающий при распространении нейтрино в диспергирующей среде, может вызвать переворот спиральности массивного нейтрино во внешнем магнитном поле, причем, в некоторых случаях, более эффективно, чем аномальный магнитный момент. Данное явление исследовано как методами релятивистской квантовой механики, так и с использованием обобщенного уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди.

DOI: 10.7868/S0370274X16140022

1. Введение. Электромагнитные свойства нейтрино [1], являющиеся объектом непрерывного экспериментального поиска, могут привести к ряду физических эффектов, имеющих важное значение для физики элементарных частиц, а также для астрофизики и космологии [2–4].

Так, наличие аномального магнитного (диагонального) момента у дираковского нейтрино может привести к перевороту его спиральности при движении в сильном магнитном поле [5–7]. Переходные (недиагональные) магнитные моменты, взаимодействуя с магнитным полем, вызывают переворот спиральности нейтрино, происходящий одновременно с изменением нейтринного аромата, причем данный эффект может иметь место как для дираковских, так и для майорановских нейтрино [8–11]. Различные физические процессы с изменением спиральности нейтрино во внешнем поле широко обсуждались в связи с проблемой солнечных нейтрино, динамикой коллапса звезд и эволюцией ранней Вселенной [1, 12].

Минимально расширенная Стандартная модель, в которой нейтрино имеют дираковские массы, предсказывает очень малые значения как для диагонального аномального магнитного момента (АММ) [13, 6]

$$\mu_\nu = \frac{3eG_F m_\nu}{8\sqrt{2}\pi^2} \simeq 3.2\cdot 10^{-19}\mu_B \left(\frac{m_\nu}{1\,\text{эВ}}\right), \qquad (1)$$

так и для переходных магнитных моментов нейтрино [14, 2, 1]. Здесь e – абсолютное значение заряда электрона, $G_F = 10^{-5}m_p^{-2}$ – константа Ферми, m_ν – масса нейтрино, $\mu_B = e/2m_e$ – магнетон Бора.

Современные нейтринные эксперименты, а также данные астрофизических наблюдений [1] дают ограничение на магнитные моменты нейтрино на уровне $\mu_\nu \lesssim (10^{-11}\text{–}10^{-12})\,\mu_{\text{B}}$, что на много порядков превышает теоретические предсказания Стандартной модели. Некоторые расширенные модели, широко обсуждаемые в литературе, предсказывают гораздо бóльшие значения магнитных моментов, приближая теоретические предсказания к существующим экспериментальным ограничениям [1].

При исследовании воздействия на нейтрино окружающей материальной среды важную роль играет концепция когерентного взаимодействия нейтрино с частицами среды, в рамках которой удалось полностью разрешить “загадку” солнечных нейтрино [15] на основе эффекта Михеева–Смирнова–Вольфенштейна [16, 17] (МСВ-эффекта), а также предсказать явление спинового света нейтрино в среде [18–21], сопровождающееся переворотом спиральности нейтрино. Имеются указания на то, что влияние некоторых анизотропных сред также может привести к изменению спиральности нейтрино [22, 23].

При движении нейтрино в диспергирующей среде модифицируется *эффективная вершина* электромагнитного взаимодействия нейтрино – появляются новые форм-факторы, отражающие взаимодействие нейтрино с реальными частицами, входящими в состав среды [24–28] (например, с электронами, если нейтрино движется в электронной плазме).

Физически появление дополнительных электромагнитных характеристик нейтрино, имеющих место только в среде, объясняется поляризацией среды за счет слабых взаимодействий во время движения нейтрино [29]. Неоднородности плотности электронов на малых масштабах (порядка дебаевского радиуса в плазме), возникающие вдоль пути движения нейтрино, приводят к появлению индуцированного средой электрического заряда нейтрино [30–33], а наличие

[1)]e-mail: ternov.ai@mipt.ru

псевдовекторных токов, связанных с несохранением четности в слабых взаимодействиях, приводит к появлению аксиального магнитного форм-фактора [24–27] и связанного с ним индуцированного магнитного момента нейтрино [34, 25, 35].

Индуцированный магнитный момент (ИММ) нейтрино играет важную роль в астрофизических приложениях. Он может достигать чрезвычайно больших значений при распространении нейтрино в вырожденном релятивистском электронном газе в коллапсирующем ядре Сверхновой или во внутренних областях нейтронных звезд. В таких условиях, как было показано В. Б. Семикозом [34], ИММ электронного нейтрино равен

$$\mu_\nu^{\mathrm{ind}} = \frac{eG_{\mathrm{F}}\mathrm{p}_{\mathrm{F}}}{2\sqrt{2}\pi^2} \simeq 4.3\cdot 10^{-13}\mu_{\mathrm{B}}\,\left(\frac{\mathrm{p}_{\mathrm{F}}}{1\,\text{МэВ}}\right), \qquad (2)$$

где p_{F} – импульс Ферми электронного газа

$$\mathrm{p}_F \simeq 130\cdot\left(\frac{n_e}{10^{37}\,\text{см}^{-3}}\right)^{1/3}\text{МэВ},$$

n_e – плотность электронов среды (см. также [36, 37]). Заметим, что переходные ИММ для майорановских нейтрино в условиях вырожденного электронного газа имеют тот же порядок величины, что и (2) [38].

Взаимодействие ИММ с внешним электромагнитным полем изменяет закон дисперсии нейтрино. В работах [27, 39–41] было показано, что во внешнем магнитном поле (в системе покоя среды и в линейном по полю приближении) дополнительная энергия взаимодействия нейтрино с полем имеет вид

$$V_H = 2\,\mu_\nu^{\mathrm{ind}}\,(\mathbf{pH})/\,|\mathbf{p}|\,, \qquad (3)$$

где $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{p}$ – трехмерный импульс нейтрино. Взаимодействие (3) оказывает влияние на осцилляции нейтрино, и оно учитывалось во многих работах, исследовавших различные схемы осцилляций и распространения нейтрино в замагниченных средах [36, 37, 42–46].

Анизотропный характер взаимодействия (3) (зависимость от угла между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{H}$) может вызвать асимметрию нейтринного излучения, сопровождающего коллапс массивного звездного ядра. На основе данного явления А. Кузенко и Дж. Сегре предложили известный механизм, объясняющий высокие наблюдаемые скорости движения пульсаров [47].

Необходимо подчеркнуть, что предсказываемый Стандартной моделью ИММ не зависит от массы нейтрино (в отличие от вакуумного АММ, см. (1)), и это следует, в частности, из формулы (2). Поэтому ИММ может существовать и у безмассового нейтрино. В действительности, во всех цитированных выше работах, в которых проводилось исследование ИММ, нейтрино предполагалось безмассовым (формула (3) также получена в безмассовом пределе). Видимо, именно с этим связано наличие во многих работах утверждения о том, что ИММ не может вызвать переворот спиральности нейтрино во внешнем поле – для безмассового нейтрино спиральность жестко задана: частица имеет левую (отрицательную), а античастица – правую (положительную) спиральность[2)].

В настоящей работе мы проведем исследование ИММ, предполагая наличие дираковской массы у нейтрино. Поскольку нас прежде всего будет интересовать влияние ИММ на динамику спина нейтрино во внешнем поле, мы не будем учитывать другие возможные вклады в эффективный потенциал нейтрино в среде (в частности, MCB-потенциал [49]), мы также не будем учитывать наличие АММ у нейтрино. Полагая, что значение ИММ известно и определяется, например, формулой (2), мы покажем, что при наличии дираковской массы ИММ *может вызывать* переворот спиральности нейтрино во внешнем поле, причем, в ряде случаев, более эффективно, чем АММ.

2. Квантово-механическое описание. Как было указано во Введении, при движении нейтрино в среде модифицируется вершинная функция эффективного электромагнитного взаимодействия нейтрино $\langle\nu(p')|\,J_\mu^{EM}(0)\,|\nu(p)\rangle = \overline{u}(p')\,\Gamma_\mu(p,p')\,u(p)$. В частности, появляется новый вклад в вершину Γ_μ, обусловленный наличием псевдовекторных токов и равный [24–27]

$$\Gamma_\mu^{M'}(k,u) = i\mathrm{D}_M(\omega,k)\,e_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\nu k^\alpha u^\beta\gamma^5, \qquad (4)$$

где $k^\mu = p^\mu - p'^\mu$, $u^\mu = \{\gamma_{\mathrm{m}},\,\gamma_{\mathrm{m}}\mathbf{u}\}$ – 4-вектор скорости среды, $\gamma_{\mathrm{m}} = \left(1-\mathbf{u}^2\right)^{-1/2}$ – лоренц-фактор среды, $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\mathrm{D}_M(\omega,k)$ – аксиальный магнитный форм-фактор нейтрино. В статическом пределе $\mathrm{D}_M(0,0) = \mu_\nu^{\mathrm{ind}}$ – ИММ нейтрино в среде [34, 25].

Вершина (4) модифицирует эффективный лагранжиан нейтрино, взаимодействующего со средой [26], и, как следствие, уравнение Дирака для нейтрино в среде и во внешнем поле будет иметь вид

$$\left\{i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\nu + \mu_\nu^{\mathrm{ind}}\gamma^\mu\left(1+\gamma^5\right)\widetilde{F}_{\mu\nu}u^\nu\right\}\Psi(\mathbf{r},t) = 0, \qquad (5)$$

где $\widetilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}e_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$. Здесь мы оставили *только* вклад ИММ и добавили проектор на левую киральность нейтрино $\left(1+\gamma^5\right)$ в соответствии с [25, 27, 29].

[2)] В работе [48] впервые рассматривается возможность переворота спиральности массивных нейтрино за счет взаимодействия ИММ с магнитным полем. Основные выводы работы [48], касающиеся переворота спиральности, вызываемого ИММ, совпадают с нашими.

Еще раз подчеркнем, что в нашем подходе мы используем только статическое значение ИММ и не учитываем его возможной зависимости от свойств среды, ее скорости, а также от энергии нейтрино и от напряженности внешнего поля.

В постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{H}$, направленном вдоль оси z, и в системе покоя среды $u^\mu = \{1, \mathbf{0}\}$ уравнение (5) принимает вид

$$\mathcal{H}\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r}); \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathrm{V};$$
$$\mathcal{H}_0 = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}) + \gamma^0 m_\nu, \quad \mathrm{V} = -\mu_\nu^{\mathrm{ind}} H \Sigma_3 (1+\gamma^5), \qquad (6)$$

где $\Psi(\mathbf{r},t) = e^{-i\varepsilon t}\psi(\mathbf{r})$, ε – энергия нейтрино, $\mathbf{p}$ – его импульс, $\mathcal{H}_0$ – гамильтониан свободного нейтрино, V – слагаемое, описывающее взаимодействие ИММ с магнитным полем, используется стандартное представление матриц Дирака [50], причем $\alpha_i = \gamma^0\gamma^i$, $\Sigma_i = -\gamma^5\gamma^0\gamma^i$.

Точным спиновым интегралом движения, коммутирующим с $\mathcal{H}$, является третья компонента 4-векторного оператора поляризации спина [51, 52]

$$\mathrm{T}^3 = \gamma^0\Sigma_3 - \gamma^5 p_z/m_\nu, \qquad (7)$$

описывающая проекцию спина нейтрино на направление магнитного поля.

Определим закон дисперсии дираковского массивного нейтрино с учетом ИММ. В нашем случае достаточно ограничиться линейным приближением по полю $\mathbf{H}$. Стационарная волновая функция свободного нейтрино будет подчиняться условиям

$$\mathcal{H}_0\psi_0 = \varepsilon_0\psi_0, \quad \mathrm{T}^3\psi_0 = \zeta\frac{\lambda}{m_\nu}\,\psi_0, \qquad (8)$$

где $\varepsilon_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\nu^2}$, $\lambda = \sqrt{m_\nu^2 + p_z^2}$. Находим точное решение системы (8) и используем полученные функции для определения уровней энергии нейтрино с ИММ во внешнем магнитном поле:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \mu_\nu^{\mathrm{ind}} H \left\{\frac{p_z}{\varepsilon_0} - \zeta\frac{1}{\varepsilon_0}\sqrt{m_\nu^2 + p_z^2}\right\}. \qquad (9)$$

Как следует из (9), энергия нейтрино явно зависит от ориентации спина во внешнем поле: $\zeta = -1$ соответствует спину, направленному против поля, а $\zeta = +1$ – спину, направленному по полю. Лишь в случае релятивистского движения нейтрино вдоль поля $p_z \gg m_\nu$ (в пренебрежении массой нейтрино) дисперсионное соотношение (9) переходит в выражение

$$\varepsilon \simeq \varepsilon_0 + \mu_\nu^{\mathrm{ind}} H \frac{p_z}{\varepsilon_0}\,(1-\zeta)\,, \qquad (10)$$

которое при $\zeta = -1$ соответствует взаимодействию вида (3). Заметим, что для нейтрино, движущегося вдоль поля, $\zeta = -1$ отвечает левой спиральности нейтрино. Если же нейтрино имеет правую спиральность, то оно в этом пределе вовсе не должно взаимодействовать с полем (см. формулу (10)).

С другой стороны, если нейтрино движется перпендикулярно направлению магнитного поля ($p_z = 0$), то, в соответствии с (3), оно не может взаимодействовать с внешним полем, а на самом деле, как видно из (9), взаимодействие с полем для такого нейтрино существует, хотя и подавлено малым множителем m_ν/ε_0 (см. также результат, приведенный в [48]).

Заметим далее, что слагаемое в (9), пропорциональное p_z/ε_0, происходит от члена $\sim \Sigma_3\gamma^5 = -\alpha_3$ в гамильтониане (6) (или, что то же самое, от члена $\sim\gamma^\mu \widetilde{F}_{\mu\nu}u^\nu$ в (5)). Оно дает постоянный вклад в энергию нейтрино (9), не зависит от проекции спина на направление магнитного поля и не имеет, по существу, отношения к ИММ. В дальнейшем при анализе прецессии спина нейтрино оно не будет учитываться.

Интересно сравнить закон дисперсии (9) с дисперсионным соотношением для дираковского нейтрино с АММ, движущимся во внешнем однородном магнитном поле, которое было вычислено ранее [53, 54]:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \tilde{\zeta}\frac{\mu_\nu H}{\varepsilon_0}\sqrt{m_\nu^2 + p_\perp^2}, \qquad (11)$$

где μ_ν – АММ нейтрино, а квантовое число $\tilde{\zeta} = \pm 1$ также, как и ζ, соответствует ориентации спина нейтрино вдоль или против направления магнитного поля $\mathbf{H}$. Заметим, однако, что квантовое число $\tilde{\zeta}$ определяется собственным значением *не оператора* T^3 (см. (7), (8)), а оператора магнитной поляризации

$$\mu_3 = \Pi^{12} = m\Sigma_3 + i\gamma^0\gamma^5\,[\boldsymbol{\Sigma}\times\mathbf{p}]_3\,,$$

который является компонентой Π^{12} *тензора* поляризации спина [51, 52]. Из сопоставления (9) и (11) можно заключить, что взаимодействие АММ с внешним полем проявляется, в основном, при поперечном по отношению к полю движении нейтрино, в то время, как взаимодействие ИММ наиболее существенно в случае продольного движения.

Рассмотрим далее движение продольно-поляризованного нейтрино, обладающего ИММ, во внешнем магнитном поле. Оператор продольной поляризации (или спиральности[3)]) $(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p})/|\mathbf{p}|$ не коммутирует с гамильтонианом (6) и, следовательно, не является ин-

[3)] В работе [55] рассматривается динамика спина дираковского нейтрино с АММ во внешнем поле и в среде при определении спиральности способом, отличным от нашего.

тегралом движения. Составим суперпозицию состояний, являющихся решениями системы (8)

$$\Psi(t) = A\psi_0(\zeta=+1)e^{-i\varepsilon_{+1}t} + B\psi_0(\zeta=-1)e^{-i\varepsilon_{-1}t}, \quad (12)$$

где уровни энергии $\varepsilon_{\pm 1}$ определяются формулой (9). Коэффициенты A и B в (12) выберем так, чтобы функция $\Psi(t)$ удовлетворяла начальному условию

$$(\mathbf{\Sigma p})\,\Psi(0) = -|\mathbf{p}|\Psi(0),$$

полагая, что в начальный момент спин нейтрино направлен против его импульса (левая спиральность). Используя суперпозицию (12), находим среднее значение проекции спина нейтрино на направление движения в произвольный момент времени:

$$\left\langle \frac{(\mathbf{\Sigma p})}{|\mathbf{p}|} \right\rangle_t = -\frac{1}{1 - v^2\sin^2\theta} \times$$
$$\times \left\{ \cos^2\theta + \left(1 - v^2\right)\sin^2\theta\cos\omega_H t \right\}, \quad (13)$$

где $\omega_H = 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}} H \left(1 - v^2\sin^2\theta\right)^{1/2}$, $p = |\mathbf{p}|$, θ – угол между импульсом нейтрино $\mathbf{p}$ и направлением магнитного поля $\mathbf{H}$.

Формула (13) показывает, что при движении нейтрино с ИММ вдоль магнитного поля ($\cos\theta = 1$) продольная поляризация сохраняется (как и для нейтрино с АММ, см. ниже формулу (15)). При движении перпендикулярно полю ($\cos\theta = 0$) имеем

$$\langle(\mathbf{\Sigma p})/|\mathbf{p}|\rangle_t = \cos\omega_H t,$$
$$\omega_H = 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}} H\sqrt{1 - v^2} = 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}} H\, m_\nu/\varepsilon_0, \quad (14)$$

т.е. продольная поляризация прецессирует с частотой ω_H.

Сравним формулу (13), описывающую временную эволюцию спиральности нейтрино с ИММ, с соответствующей формулой, описывающей изменение во времени продольной поляризации дираковского нейтрино, обусловленное взаимодействием АММ с внешним магнитным полем [53, 54] (см. также [56])

$$\left\langle \frac{(\mathbf{\Sigma p})}{|\mathbf{p}|} \right\rangle_t^{\mathrm{AMM}} = -\frac{1}{1 - v^2\cos^2\theta} \times$$
$$\times \left\{ \left(1 - v^2\right)\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos\widetilde{\omega}_H t \right\}, \quad (15)$$

где частота прецессии $\widetilde{\omega}_H = 2\mu_\nu H \left(1 - v^2\cos^2\theta\right)^{1/2}$. Сопоставляя (15) и (13), (14), видим, что в случае перпендикулярного к полю движения нейтрино частота прецессии его спиральности ω_H, происходящей за счет ИММ, включает в отличие от частоты $\widetilde{\omega}_H$, характеризующей прецессию, связанную с наличием АММ, дополнительный малый множитель $m_\nu/\varepsilon_0 = \gamma^{-1}$, где γ – лоренц-фактор нейтрино.

Таким образом, характерное время переворота спиральности за счет ИММ

$$T = \frac{\pi}{\omega_H} = \frac{\pi}{2\mu_\nu^{\mathrm{ind}} H}\gamma \quad (16)$$

оказывается очень велико для ультрарелятивистских нейтрино ($\gamma \gg 1$).

Тем не менее, если принять для оценок, что плотность электронов $n_e \simeq 10^{37}$ см$^{-3}$ (для внутренних областей нейтронной звезды), то при этом ИММ нейтрино согласно (2) будет равен $\mu_\nu^{\mathrm{ind}} \simeq 0.6\cdot 10^{-10}\mu_{\mathrm{B}}$. Если положить $m_\nu \simeq 1$ эВ [57], $\varepsilon_\nu = 1$ МэВ, то (при $\mathbf{p} \perp \mathbf{H}$) частота прецессии спина, вызываемой ИММ, (см. (14)) будет равна $2\mu_\nu^{\mathrm{ind}} H\, m_\nu/\varepsilon_\nu \simeq 1.2\cdot 10^{-16}\mu_{\mathrm{B}} H$. Как следует из сравнения (15) и (14), прецессию спина с точно такой же частотой мог бы вызвать АММ, равный $\mu_\nu \simeq 6\cdot 10^{-17}\mu_B$. Стандартная модель в этих условиях дает значение АММ порядка $\mu_\nu \simeq 3.2\cdot 10^{-19}\mu_B$ (см. (1)). Таким образом, в рассматриваемых условиях (в смысле воздействия на прецессию спина) ИММ нейтрино оказывается примерно в 200 раз эффективнее, чем предсказываемый Стандартной моделью вакуумный АММ. Ясно, что в этом случае наличие АММ у нейтрино можно вообще не учитывать.

Если положить в данных условиях, что напряженность магнитного поля $H \sim 10^{14}$ Гс (см., например, [58]), то мы получим характерное расстояние переворота спиральности нейтрино (см. (16)), равное

$$L = cT = c\pi/\omega_H \simeq 5.6\cdot 10^6\ \text{см},$$

которое по порядку величины совпадает с типичными значениями радиусов нейтронных звезд $R \simeq 10{-}14$ км [58].

3. Квазиклассическое описание. Как известно, в рамках квазиклассической теории спина (см. [59] и приведенные там ссылки) эволюция спина релятивистского электрона во внешнем электромагнитном поле описывается уравнением Баргманна–Мишеля–Телегди [60] (уравнение БМТ, см. также [50, 61]). Поскольку электрон является заряженной частицей, эволюция его спина определяется взаимодействием с внешним полем как нормального магнитного момента (равного магнетону Бора $\mu_{\mathrm{B}} = e/2m_e$), так и АММ (который приближенно равен швингеровскому значению $\mu_{\mathrm{B}}\alpha/2\pi$, $\alpha \simeq 1/137$ – постоянная тонкой структуры).

У массивного дираковского нейтрино весь магнитный момент является аномальным (1), поэтому уравнение БМТ для нейтрино имеет вид (см. также [62])

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = 2\mu_\nu \left\{ F^{\mu\nu} s_\nu + v^\mu \left(s_\alpha F^{\alpha\beta} v_\beta \right) \right\}. \qquad (17)$$

В формуле (17) использованы обозначения: τ – собственное время, μ_ν – АММ нейтрино, $v^\mu = \{\gamma, \gamma\mathbf{v}\}$ – 4-вектор его скорости, $\gamma = \varepsilon_\nu / m_\nu$ – лоренц-фактор, $\mathbf{v} = \mathbf{p}/\varepsilon_\nu$ – трехмерная скорость нейтрино, s^μ – "классический" 4-вектор поляризации спина нейтрино, имеющий компоненты [50, 61]

$$s^\mu = \left\{ \frac{\boldsymbol{\zeta}\mathbf{p}}{m_\nu}, \boldsymbol{\zeta} + \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{p})}{m_\nu(\varepsilon_\nu + m_\nu)} \right\} = \\ = \left\{ (\boldsymbol{\zeta}\mathbf{v})\,\gamma, \boldsymbol{\zeta} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{v}) \right\}, \qquad (18)$$

$\boldsymbol{\zeta}$ – единичный вектор в направлении поляризации в системе покоя частицы ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$), равный удвоенному среднему значению спинового оператора Паули $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ ($\boldsymbol{\zeta} = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_0$), причем среднее от матриц $\boldsymbol{\sigma}$ вычисляется по спиновому состоянию, заданному трехмерным спинором φ в биспиноре свободного нейтрино [50]

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{2m_\nu}} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon_\nu + m_\nu}\,\varphi \\ \sqrt{\varepsilon_\nu - m_\nu}\,(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\varphi \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, а также $\overline{u}(p)u(p) = 1$.

Исходя из (17), можно получить уравнение, описывающее временную эволюцию вектора $\boldsymbol{\zeta}$, непосредственно характеризующего поляризацию частицы в ее "мгновенной" системе покоя [50, 61]:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = 2\mu_\nu \left\{ [\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{H}] - [\boldsymbol{\zeta}\times[\mathbf{v}\times\mathbf{E}]] - \frac{\gamma}{1+\gamma}[\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{v}](\mathbf{v}\mathbf{H}) \right\}, \qquad (20)$$

где $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ – напряженности магнитного и электрического поля в лабораторной системе отсчета.

Осуществим обобщение уравнения БМТ ((17) и (20)) на случай наличия у нейтрино ИММ. Известно, что уравнение БМТ является классическим приближением общего уравнения эволюции спина в представлении Гейзенберга. Соответствующий метод получения уравнения БМТ для электрона был развит в работах [63, 64] (см. также [65]), а общая идея метода восходит к работе [51].

Рассмотрим трехмерный вектор-оператор поляризации спина [51, 52]

$$\mathbf{O} = \gamma^0\boldsymbol{\Sigma} - \gamma^5\frac{\mathbf{p}}{\varepsilon_\nu} - \gamma^0\frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p})}{\varepsilon_\nu(\varepsilon_\nu + m_\nu)}. \qquad (21)$$

Оператор $\mathbf{O}$ характеризует "истинный" спин в системе покоя частицы, поскольку усреднение по волновым функциям свободного нейтрино (19) дает: $\langle\mathbf{O}\rangle = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_0 = \boldsymbol{\zeta}$. Получение явного вида квазиклассического уравнения эволюции спина нейтрино, имеющего ИММ, состоит из трех этапов.

1. Запишем квантовое уравнение для эволюции во времени оператора спина (21) в представлении Гейзенберга:

$$\frac{d\mathbf{O}}{dt} = i\left(\mathcal{H}\mathbf{O} - \mathbf{O}\mathcal{H}\right),$$

где гамильтониан $\mathcal{H}$ дается формулой (6). В системе покоя среды при наличии только однородного магнитного поля произвольного направления оператор взаимодействия ИММ и поля в (6) будет иметь вид $\mathrm{V} = -\mu_\nu^{\mathrm{ind}}(\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma})$, где (как и в разделе 2) под μ_ν^{ind} мы понимаем статическое значение ИММ. Тогда получим выражение

$$\frac{d\mathbf{O}}{dt} = 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}} \left\{ \gamma^0[\boldsymbol{\Sigma}\times\mathbf{H}] + \gamma^0\frac{(\boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{p}\times\mathbf{H}])\mathbf{p}}{\varepsilon_\nu(\varepsilon_\nu + m_\nu)} \right\}, \qquad (22)$$

непосредственная физическая интерпретация которого затруднительна, поскольку, как известно, (см., например, [66]), в теории Дирака связь операторов с классическими величинами усложняется по причине особого характера движения частицы – быстроосциллирующего дрожания, которое было названо Шредингером *"Zitterbewegung"*.

2. Перейдем в связи с этим к операторам с определенной четностью, полагая, что четная часть любого оператора F определяется выражением [67]

$$\mathrm{F}^{\,\mathrm{even}} = [\mathrm{F}] = \frac{1}{2\varepsilon_\nu}\left(\mathrm{F}\mathcal{H} + \mathcal{H}\mathrm{F}\right).$$

Введение четных операторов, не смешивающих состояния с различными знаками энергии, позволяет исключить явление *Zitterbewegung* в одночастичной квантовой теории, а также восстановить правильные соотношения между операторами и соответствующими классическими величинами – тем самым открывается возможность наглядной физической интерпретации результатов [67, 63, 64]. На этом пути из (22) можно получить уравнение для четной части оператора $[d\mathbf{O}/dt]$, которое мы здесь не выписываем.

3. Далее необходимо усреднить операторное уравнение для $[d\mathbf{O}/dt]$ по состоянию квазиклассического волнового пакета [50, 51, 63, 64]: $[d\mathbf{O}/dt] \to \langle[d\mathbf{O}/dt]\rangle$, полагая, что $\langle\mathbf{O}\rangle = \boldsymbol{\zeta}$, $\langle\mathbf{p}\rangle = \mathbf{v}\varepsilon_\nu$. В нашем случае (электрический заряд нейтрино равен нулю) данное усреднение можно проводить по решениям свободного уравнения Дирака (19). В итоге находим уравнение, описывающее эволюцию спина нейтрино, происходящую в результате взаимодействия ИММ с однородным магнитным полем в системе покоя среды:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}}\left\{\frac{1}{\gamma}[\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{H}] + \frac{\gamma}{1+\gamma}[\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{v}]\,(\mathbf{vH})\right\}. \qquad (23)$$

Анализируя уравнение (23) в сравнении с уравнением (20) для нейтрино с АММ (в (20) при этом нужно положить $\mathbf{E} = 0$), замечаем, что при движении нейтрино в перпендикулярном к полю направлении ($\mathbf{v}\perp\mathbf{H}$) частота прецессии спина нейтрино в (23) содержит, в отличие от (20), малый множитель γ^{-1}, что приводит к увеличению периода прецессии для нейтрино с ИММ. На это обстоятельство мы уже обращали внимание в разделе 2, см. (16).

При совпадающих направлениях $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$ вектор $\boldsymbol{\zeta}$ будет прецессировать вокруг общего направления $\mathbf{v}\uparrow\uparrow\mathbf{H}$ с угловой скоростью, равной $2\mu_\nu^{\mathrm{ind}}H$ для нейтрино с ИММ, и, соответственно, $2\mu_\nu H\gamma^{-1}$ – для нейтрино с АММ. Таким образом, в данном случае частота прецессии спина для нейтрино с ИММ *не содержит* фактора подавления γ^{-1} в отличие от частоты прецессии для нейтрино с АММ.

Обобщение (23) на случай наличия наряду с магнитным также и однородного электрического поля $\mathbf{E}$ с учетом ненулевой скорости движения среды ($\mathbf{u}\neq 0$) приводит к уравнению

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}}\frac{\gamma_{\mathrm{m}}}{\gamma}\left\{[\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{H}] - [\boldsymbol{\zeta}\times[\mathbf{u}\times\mathbf{E}]] + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}[\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{v}]\times\right.$$
$$\left.\times\Big((\mathbf{vH}) - (\mathbf{v}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{E}])\Big)\right\} - 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}}\gamma_{\mathrm{m}}\,[\boldsymbol{\zeta}\times\mathbf{v}]\,(\mathbf{uH}), \quad (24)$$

где $\mathbf{u}$ – трехмерная скорость среды, γ_{m} – ее лоренц-фактор.

Во-первых, как следует из (24), движение среды может привести к увеличению частоты прецессии спина нейтрино. Действительно, полагая в (24) $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{u}\perp\mathbf{H}$ (среда движется перпендикулярно направлению магнитного поля), мы получим уравнение, совпадающее с (23), с единственным отличием: множитель $2\mu_\nu^{\mathrm{ind}}$ заменяется на $2\mu_\nu^{\mathrm{ind}}\gamma_{\mathrm{m}}$. Это означает, что угловая скорость прецессии вектора $\boldsymbol{\zeta}$ увеличивается на фактор γ_{m} как в случае перпендикулярного к полю движения нейтрино, так и при $\mathbf{v}\uparrow\uparrow\mathbf{H}$.

Во-вторых, если в уравнении (24) положить $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (нейтрино движется в ту же сторону, что и среда, со скоростью, равной скорости движения среды), то окажется, что $\gamma_{\mathrm{m}} = \gamma$, а уравнение (24) (при замене $\mu_\nu^{\mathrm{ind}} \to \mu_\nu$) совпадет с уравнением (20), описывающим прецессию спина для нейтрино с АММ. Таким образом, в данном случае воздействие ИММ на динамику спина нейтрино оказывается неотличимым от воздействия АММ.

Получим теперь ковариантное обобщение уравнения БМТ (17) для нейтрино, обладающего ИММ. Это можно сделать методом, аналогичным тому, каким были получены уравнения (23) и (24), если положить в основу вычислений не трехмерный вектор-оператор $\mathbf{O}$ (21), а 4-векторный оператор поляризации спина T^μ [51, 52] (см. также (7))

$$\mathrm{T}^\mu = \gamma^5\gamma^\mu - \gamma^5 p^\mu/m_\nu, \qquad (25)$$

учитывая, что усреднение по состоянию (19) дает $\langle\mathrm{T}^\mu\rangle = s^\mu$, где 4-вектор s^μ определен формулой (18).

В итоге находим ковариантное обобщение уравнения БМТ в виде

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}}\left\{F^{\mu\nu}s_\nu(u_\alpha v^\alpha) - F^{\mu\nu}v_\nu(u_\alpha s^\alpha) + \right.$$
$$\left. + u^\mu\left(s_\alpha F^{\alpha\beta}v_\beta\right)\right\}. \qquad (26)$$

Если в (26) положить $u^\mu = v^\mu$ (4-скорости среды и нейтрино совпадают), то получим, что $u_\alpha v^\alpha = v_\alpha v^\alpha = 1$, а также $u_\alpha s^\alpha = v_\alpha s^\alpha = 0$ (см. [50, 61]). В результате уравнение (26) в точности совпадет с (17), если провести переобозначение $\mu_\nu^{\mathrm{ind}} \to \mu_\nu$. Совпадение трехмерных уравнений (24) и (20) в аналогичном случае обсуждалось выше.

Раскрывая нулевую компоненту в (26), получим уравнение для спиральности нейтрино (проекции вектора поляризации спина $\boldsymbol{\zeta}$ на направление движения, задаваемое единичным вектором $\mathbf{n} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$):

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\zeta}\mathbf{n}) = 2\mu_\nu^{\mathrm{ind}}\frac{\gamma_{\mathrm{m}}}{\gamma}\left\{(\boldsymbol{\zeta}_\perp[\mathbf{H}\times\mathbf{n}]) + (\mathbf{E}\,[\mathbf{u}\times[\mathbf{n}\times\boldsymbol{\zeta}_\perp]])\right\}, \qquad (27)$$

где $\boldsymbol{\zeta}_\perp$ – перпендикулярная по отношению к направлению скорости компонента вектора $\boldsymbol{\zeta}$. Заметим, что следующая из (27) общая картина эволюции спиральности нейтрино в магнитном поле ($\mathbf{E} = 0$) и в системе покоя среды ($\mathbf{u} = 0$) соответствует результату, полученному выше в разделе 2.

4. Заключение. Рассмотрено влияние индуцированного средой магнитного момента (ИММ) на динамику спина нейтрино во внешних полях.

Показано, что взаимодействие ИММ с внешним полем может вызывать переворот спиральности массивного нейтрино. Данный механизм переворота спиральности может оказаться важным при исследовании различных схем конверсии нейтрино в плотных астрофизических средах таких, как вырожденный релятивистский электронный газ в ядре Сверхновой или во внутренних областях нейтронной звезды, в присутствии сильных электромагнитных полей.

Численные оценки, приведенные в разделе 2, показывают, что в указанных средах конвертация нейтрино из левых в правые может происходить *без участия* аномального магнитного момента (АММ) нейтрино, поскольку предсказываемое Стандартной моделью значение АММ оказывается на много порядков ниже, чем ИММ нейтрино.

1. C. Giunti and A. Studenikin, Rev. Mod. Phys. **87**, 531 (2015).
2. G. G. Raffelt, *Stars as Laboratories for Fundamental Physics*, University of Chicago Press, Chicago (1996), 664 p.
3. C. Giunti and C. W. Kim, *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford Univ. Press, Oxford (2007), 710 p.
4. A. D. Dolgov, Phys. Rep. **370**, 333 (2002).
5. A. Cisneros, Astrophys. Space Sci. **10**, 87 (1971).
6. K. Fujikawa and R. E. Shrock, Phys. Rev. Lett. **45**, 963 (1980).
7. М. Б. Волошин, М. И. Высоцкий, Л. Б. Окунь, ЖЭТФ **91**, 754 (1986).
8. J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev. D **24**, 1883 (1981); Erratum: ibid. **25**, 283 (1982).
9. E. Kh. Akhmedov, Phys. Lett. B **213**, 64 (1988).
10. C.-S. Lim and W. J. Marciano, Phys. Rev. D **37**, 1368 (1988).
11. E. Kh. Akhmedov and M. Yu. Khlopov, Mod. Phys. Lett. A **3**, 451 (1988).
12. J. C. D'Olivo and O. G. Miranda, AIP Conf. Proc. **857**, 37 (2006).
13. B. W. Lee and R. E. Shrock, Phys. Rev. D **16**, 1444 (1977).
14. R. E. Shrock, Nucl. Phys. B **206**, 359 (1982).
15. А. В. Дербин, УФН **184**, 555 (2014).
16. L. Wolfenstein, Phys. Rev. D **17**, 2369 (1978).
17. С. П. Михеев, А. Ю. Смирнов, ЯФ **42**, 1441 (1985).
18. A. E. Lobanov and A. I. Studenikin, Phys. Lett. B **564**, 27 (2003).
19. A. I. Studenikin and A. I. Ternov, Phys. Lett. B **608**, 107 (2005).
20. A. V. Grigoriev, A. I. Studenikin, and A. I. Ternov, Phys. Lett. B **622**, 199 (2005).
21. A. E. Lobanov, Phys. Lett. B **619**, 136 (2005).
22. V. Cirigliano, G. M. Fuller, and A. Vlasenko, Phys. Lett. B **747**, 27 (2015).
23. A. Kartavtsev, G. Raffelt, and H. Vogel, Phys. Rev. D **91**, 125020 (2015).
24. В. Н. Ораевский, А. Ю. Плахов, В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский, ЖЭТФ **93**, 1557 (1987).
25. В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский, ЖЭТФ **95**, 35 (1989).
26. J. F. Nieves and P. B. Pal, Phys. Rev. D **40**, 1693 (1989).
27. J. C. D'Olivo, J. F. Nieves, and P. B. Pal, Phys. Rev. D **40**, 3679 (1989).
28. T. Altherr and K. Kainulainen, Phys. Lett. B **262**, 79 (1991).
29. В. Н. Ораевский, В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский, ЭЧАЯ **25**, 312 (1994).
30. В. Н. Ораевский, В. Б. Семикоз, Я. А. Смородинский, Письма в ЖЭТФ **43**, 549 (1986).
31. V. N. Oraevsky and V. B. Semikoz, Physica A **142**, 135 (1987).
32. J. F. Nieves and P. B. Pal, Phys. Rev. D **49**, 1398 (1994).
33. T. Altherr and P. Salati, Nucl. Phys. B **421**, 662 (1994).
34. В. Б. Семикоз, ЯФ **46**, 1592 (1987).
35. Л. Б. Леинсон, В. Н. Ораевский, Письма в ЖЭТФ **48**, 58 (1988).
36. S. Pastor, V. B. Semikoz, and J. W. F. Valle, Astropart. Phys. **3**, 87 (1995).
37. S. Pastor, V. B. Semikoz, and J. W. F. Valle, Phys. Lett. B **369**, 301 (1996).
38. H. Kikuchi, Prog. Theor. Phys. **95**, 543 (1996).
39. V. B. Semikoz and J. W. F. Valle, Nucl. Phys. B **425**, 651 (1994); Erratum: ibid. **485**, 545 (1997).
40. P. Elmfors, D. Grasso, and G. Raffelt, Nucl. Phys. B **479**, 3 (1996).
41. A. Erdas, C. W. Kim, and T. H. Lee, Phys. Rev. D **58**, 085016 (1998).
42. J. C. D'Olivo and J. F. Nieves, Phys. Lett. B **383**, 87 (1996).
43. S. Esposito and G. Capone, Z. Phys. C **70**, 55 (1996).
44. P. K. Shukla and L. Stenflo, Phys. Lett. B **425**, 126 (1998).
45. S. Sahu and V. M. Bannur, Phys. Rev. D **61**, 023003 (1999).
46. A. Bravo García, K. Bhattacharya, and S. Sahu, Mod. Phys. Lett. A **23**, 2771 (2008).
47. A. Kusenko and G. Segrè, Phys. Rev. Lett. **77**, 4872 (1996).
48. A. Dobrynina, A. Kartavtsev, and G. Raffelt, arXiv: hep-ph/1605.04512v1 (2016).
49. D. Nötzold and G. Raffelt, Nucl. Phys. B **307**, 924 (1988).
50. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Физматлит, М. (2002), 720 с.
51. D. M. Fradkin and R. H. Good, Jr., Rev. Mod. Phys. **33**, 343 (1961).
52. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, 2-е перераб. изд., Наука, М. (1983), 304 с.
53. А. В. Борисов, В. Ч. Жуковский, А. И. Тернов, Препринт физич. ф-та МГУ **6** (1985).
54. А. В. Борисов, В. Ч. Жуковский, А. И. Тернов, Изв. вузов. Физика **3**, 64 (1988).
55. E. V. Arbuzova, A. E. Lobanov, and E. M. Murchikova, Phys. Rev. D **81**, 045001 (2010).
56. И. М. Тернов, В. Г. Багров, А. М. Хапаев, ЖЭТФ **43**, 921 (1965).

57. K. A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014).
58. А. Ю. Потехин, УФН **180**, 1279 (2010).
59. *Synchrotron Radiation Theory And Its Development. In memory of I. M. Ternov*, ed. by V. A. Bordovitsyn, World Scientific, Singapore (1999), 447 с.
60. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).
61. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3-d ed., John Wiley & Sons, N.Y., London (1999), 883 с.
62. A. E. Lobanov, J. Phys. A **39**, 7517 (2006).
63. И. М. Тернов, В. Р. Халилов, О. С. Павлова, Изв. вузов. Физика **12**, 89 (1978).
64. И. М. Тернов, ЖЭТФ **98**, 1169 (1990).
65. M. Dvornikov and A. Studenikin, JHEP **09**, 016 (2002).
66. E. Schrödinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse **24**, 418 (1930).
67. В. Паули, *Общие принципы волновой механики: пер. с нем*, ОГИЗ Гостехиздат, М.-Л. (1947), 332 с.