Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 4, с. 241 – 247 © 2016 г. 25 августа

Зеемановское расщепление зоны проводимости квантовых ям HgTe с полуметаллическим спектром

Г. М. Миньков[+*1)], *О. Э. Рут*[+], *А. А. Шерстобитов*[+*], *С. А. Дворецкий*[×], *Н. Н. Михайлов*[×°]

[+]*Уральский федеральный университет им. Ельцина, 620000 Екатеринбург, Россия*

[*]*Институт физики металлов им. Михеева УрО РАН, 620137 Екатеринбург,Россия*

[×]*Институт физики полупроводников им. Ржанова СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия*

[°]*Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 30 июня 2016 г.

Исследованы осцилляции Шубникова–де Гааза в наклонных магнитных полях в структурах $Hg_{1-x}Cd_xTe/HgTe/Hg_{1-x}Cd_xTe$ с шириной ямы 16 и 20 нм. Определено отношение спинового расщепления к орбитальному в зоне проводимости в широком диапазоне концентрации электронов. Величина этого отношения и его зависимость от концентрации удовлетворительно согласуется с расчетами спектра в рамках 8-зонной kP модели. Показано, что эффективный g-фактор анизотропен, $g_\parallel < g_\perp$. Анизотропия очень велика при малых концентрациях, но быстро уменьшается с ростом концентрации, стремясь к единице при $n_e = (3{-}4) \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$.

DOI: 10.7868/S0370274X16160062

Интерес к изучению квантовых ям на основе бесщелевого полупроводника HgTe во многом связан с тем, что в зависимости от толщины квантовой ямы d в них реализуются различные типы спектра носителей. Спектр нормального узкощелевого полупроводника при $d < d_c \cong 6.3$ нм, линейный по квазиимпульсу k для малых k при $d = d_c$, инвертированный (состояние топологического изолятора) при $d_c < d < (14{-}16)$ нм и, наконец, полуметаллический при при $d > (14{-}16)$ нм. Теоретически, в рамках kP метода, спектр таких квантовых ям изучался во многих работах, начиная с 1990 г. [1–5], а интенсивные экспериментальные исследования начались существенно позже, начиная с 1998–2000 гг. в связи с впечатляющим развитием молекулярно-лучевой эпитаксии Hg-содержащих материалов. Поскольку знание энергетического спектра носителей принципиально важно для понимания транспортных, оптических и других свойств структур с квантовыми ямами, он исследован во многих экспериментальных работах [6–11]. Основное внимание уделялось изучению спектра зоны проводимости: зависимости энергии от квазиимпульса, эффективной массы электронов от концентрации. В целом эти результаты неплохо описываются в рамках kP модели как для ям с нормальным, так и с инвертированным спектром. Другими, очень важными параметрами спектра являются константы, описывающие зависимость энергии от спиновых степеней свободы: константа спин-орбитального взаимодействия, эффективный g-фактор. Они изучены значительно меньше. Нам известны лишь работы [6–10], в которых экспериментально определен g-фактор электронов. В работах [6, 7] были исследованы структуры с толщиной ямы, близкой к d_c, а в работах [8–10] в широких ямах с полуметаллическим спектром. Результаты в каждой из этих работ были получены только при одной концентрации электронов и только в работе [10] – при двух. Таким образом, систематическое экспериментальное изучение зеемановского расщепления электронов в квантовых ямах HgTe, сопоставление результатов с теоретическими расчетами отсутствует.

В настоящей работе приведены результаты исследований осцилляций Шубникова–де Гааза (ШдГ) в малых наклонных полях в структурах с шириной ямы 16 и 20 нм. Использование модифицированного метода совпадений позволило определить отношение зеемановского расщепления к орбитальному и анизотропию g-фактора, $g_\parallel/g_\perp$, в широком диапазоне концентраций электронов, n_e, где $g_\parallel$ описывает зеемановское расщепление в магнитном поле, параллельном плоскости структуры, а $g_\perp$ – в магнитном поле, перпендикулярном плоскости структуры. Показано, что полученная зависимость отношения зеемановского расщепления к орбитальному от концентрации электронов удовлетворитель-

[1)]e-mail: grigori.minkov@imp.uran.ru

Таблица 1. Параметры исследованных структур

Образец	Ширина ямы, нм	Тип проводимости	n, p, см$^{-2}$	ρ_0, Ом
H621	16	n	$4.6 \cdot 10^{11}$	39.4
H1114	20.2	p	$1.2 \cdot 10^{11}$	1320

но согласуется с расчетами в рамках 8-зонной kP модели.

Исследуемые структуры $Hg_{1-x}Cd_xTe/HgTe/Hg_{1-x}Cd_xTe$ ($x = 0.6$–0.7) были выращены методом молекулярно-лучевой эпитаксии на полуизолирующей подложке GaAs (013) [12] и имели ширину ямы 16 и 20.2 нм. Измерения проводились на холловских мостиках шириной 0.5 мм с расстоянием между потенциальными контактами 0.5 мм. На поверхность образца наносился слой диэлектрика (парилен) и сверху напылялся алюминиевый электрод, для контролируемого изменения концентрации носителей в образце. Параметры исследованных структур при нулевом напряжении на полевом электроде указаны в табл. 1. Измерения продольного (ρ_{xx}) и поперечного (ρ_{xy}) магнитосопротивления проводились в сверхпроводящем соленоиде при развертке магнитного поля до 7.5 T и температуре 4.2 K.

В настоящей работе зеемановское расщепление определялось из анализа осцилляций ШдГ в наклонных магнитных полях, т.е. мы использовали так называемый метод совпадений. Он основан на том, что спиновое расщепление $g\mu_B B$ определяется величиной полного магнитного поля B, а орбитальное расщепление $\hbar\omega_c$ в двумерных системах определяется его нормальной (перпендикулярной плоскости структуры) составляющей $B_\perp$. Из этого следует, что отношение спинового расщепления к орбитальному в наклонном магнитном поле зависит от отношения величины нормальной компоненты к величине полного магнитного поля $B_\perp/B \equiv b$:

$$X(b) = g\mu_B B/\hbar\omega_c = g\mu_B B/(\hbar e B_\perp/m) = X(1)/b \quad (1)$$

(отношение спинового расщепления к орбитальному в нормальном магнитном поле мы будем обозначать $X \equiv X(1)$). В осцилляциях ШдГ $\rho_{xx}(B_\perp)$ это должно проявляться в том, что расстояние между максимумами, соответствующими спиново расщепленным подуровням, при повороте увеличивается. Таким образом, при отклонении магнитного поля от нормали будут последовательно реализовываться специальные ситуации. Сначала, когда отношение спинового расщепления к орбитальному ($X(b)$) равно 1/2, осцилляции станут эквидистантными по обратному магнитному полю с периодом $\Delta\frac{1}{B} = \frac{e}{2\pi\hbar n_e}$. При дальнейшем повороте осцилляции станут эквидистантными снова при $X(b) = 1$, но с вдвое большим периодом, $\Delta\frac{1}{B} = \frac{e}{\pi\hbar n_e}$.Определив значения таких углов, можно из (1) найти отношение спинового расщепления к орбитальному в нормальном магнитном поле. Недостатком этого метода является то, что для реализации таких случаев может понадобиться магнитное поле, имеющее большую продольную составляющую, в которой магнитная длина будет сравнима и даже меньше ширины квантовой ямы, что приведет к изменению спектра.

В этой работе мы использовали модифицированный метод совпадений [13–15]. Он заключается в измерении зависимости амплитуды осцилляций $\rho_{xx}(B_\perp)$ от угла в малых магнитных полях, когда: 1) еще не наблюдается квантовый эффект Холла (КЭХ); 2) амплитуда осцилляций ШдГ мала: $\Delta\rho_{xx} \ll \rho_0$; 3) осцилляции ШдГ не расщеплены по спину. В этом случае можно пренебречь осцилляциями уровня Ферми, локализацией состояний вдали от центра уровней Ландау и ограничиться лишь первой гармоникой в формуле Лифшица–Косевича для осцилляций $\rho_{xx}(B_\perp)$:

$$\Delta\rho_{xx}(B_\perp) = a\cos(\pi X(b))\cos\left(2\pi\left(\frac{E_F}{\hbar\omega_c} + \frac{1}{2}\right)\right), \quad (2)$$

где a – множитель, зависящий от магнитного поля, температуры и уширения уровней Ландау. Из уравнения (2) следует, что в этом диапазоне полей, при изменении угла наклона магнитного поля положение экстремумов $\rho_{xx}(B_\perp)$ не должно изменяться (оно определяется вторым косинусом в формуле (2), который зависит только от $B_\perp$), а амплитуда осцилляций $A(b) = a\cos(\pi X(b))$ должна осциллировать при изменении b. Таким образом, относительная амплитуда осцилляций в наклонном магнитном поле, равная отношению амплитуды осцилляций в наклонном поле $A(b)$ к амплитуде осцилляций в нормальном поле, должна зависеть от угла наклона магнитного поля (b) и отношения спинового расщепления к орбитальному в нормальном магнитном поле (X) как:

$$A(b)/A(1) = \cos(\pi X(b))/\cos(\pi X(1)) = \\ = \cos(\pi X/b)/\cos(\pi X). \quad (3)$$

В качестве примера рассмотрим результаты, полученные на структуре H621, при концентрации

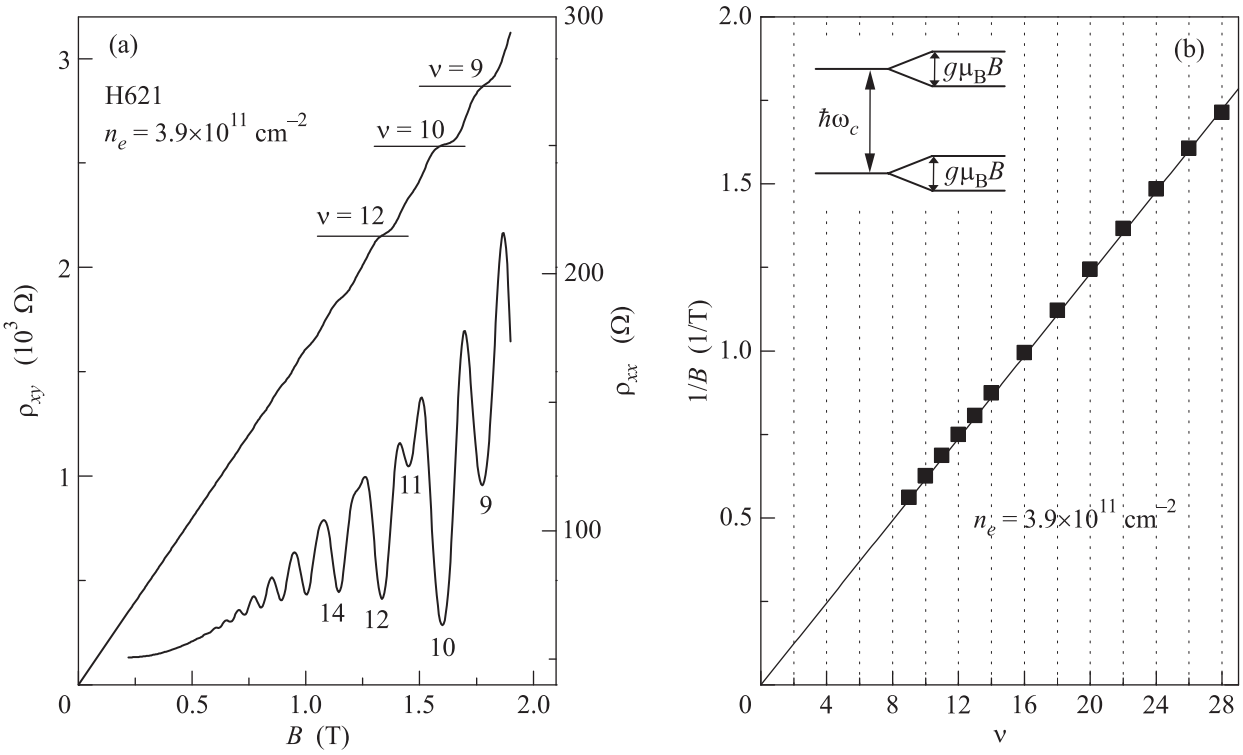

Рис. 1. (a) – Продольное и поперечное магнитосопротивление образца H621 при $n_e = 3.9 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$. Цифрами указаны факторы заполнения. (b) – Точки – положения минимумов осцилляций ρ_{xx}. Сплошная линия – зависимость $\frac{1}{B} = \frac{e}{h} \cdot \frac{\nu}{n}$ (пояснение в тексте). Вставка иллюстрирует соотношение спинового и орбитального расщепления для этого случая

электронов $3.9 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$. В первую очередь оценим область применимости уравнения (3). Для этого рассмотрим продольное и поперечное магнитосопротивление в нормальном магнитном поле, приведенные на рис. 1. Видно, что на зависимости $\rho_{xy}(B)$, при $B > 1$ T начинают различаться ступеньки квантового Холла, положение которых в магнитном поле совпадает с положением минимумов ρ_{xx}. Факторы заполнения (ν), определенные по величине ρ_{xy}, соответствующей ступеньке, указаны на рис. 1b. При $B > 1.5$ T наблюдаются ступеньки и с четными, и с нечетными номерами, а при $B < 1.5$ T ($\nu > 10$) ступеньки с нечетными номерами исчезают. Отметим, что минимумы $\rho_{xx}(B)$ только с четными ν наблюдаются в малых полях (когда ступеньки КЭХ уже не проявляются). Это ясно видно на рис. 1b, на котором отложены значения $1/B_{\min}$ ($B_{\min}$ – положение минимума ρ_{xx}) в зависимости от фактора заполнения. Как и должно быть, точки ложатся на прямую $\frac{e}{h}\frac{\nu}{n_e}$, где n_e – концентрация электронов, определенная из эффекта Холла в малых полях.

Таким образом, в магнитных полях $B < 1$ T квантовый Холл не наблюдается, амплитуда осцилляций меньше 10 % и осцилляции не расщеплены по спину, т.е. все три условия применимости формулы (2) выполнены.

Рассмотрим теперь осцилляции ШдГ при различных углах наклона в этой области магнитных полей. Угол между направлением магнитного поля и его составляющей, перпендикулярной плоскости образца, определялся по отношению коэффициента Холла в наклонном поле и нормальном. Для того чтобы исключить монотонную составляющую магнитосопротивления, будем анализировать $\frac{d\rho_{xx}}{dB_\perp}$ от $B_\perp$. Эти зависимости при различных углах наклона приведены на рис. 2a. Чтобы было удобнее проследить за поведением осцилляций, на рис. 2a проведена вертикальная штриховая линия, соответствующая положению одного из максимумов в нормальном магнитном поле. Видно, что при увеличении угла наклона: положения экстремумов не меняются; амплитуда осцилляций уменьшается, а при $b \cong 0.58$ максимумы трансформируются в минимумы; при дальнейшем повороте, при $b \cong 0.24$, они превращаются в максимумы снова. Качественно такое поведение соответствует формуле (2).

Для количественного анализа рассмотрим угловую зависимость относительной амплитуды осцил-

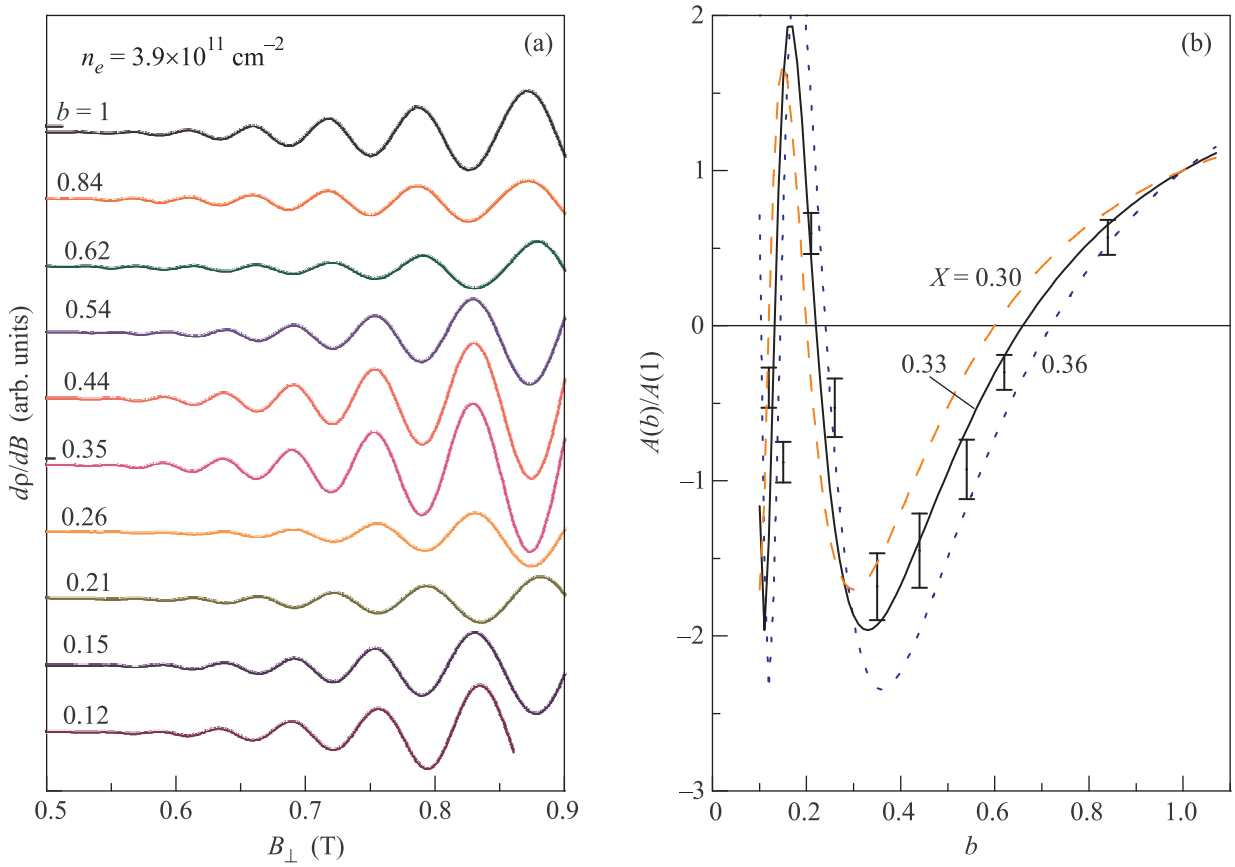

Рис. 2. (Цветной онлайн) (a) – Осцилляционные зависимости $\frac{d\rho_{xx}}{dB_\perp}$, измеренные при разных углах, для образца H621 при $n_e = 3.9 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$. Для наглядности кривые сдвинуты друг относительно друга по вертикальной оси. (b) – Угловая зависимость относительной амплитуды осцилляций $\frac{d\rho_{xx}}{dB_\perp}$ (вертикальные отрезки) и теоретические зависимости (3) с параметрами, указанными на рисунке

ляций $A(b)/A(1)$, которая приведена на рис. 2b. Амплитуда определялась в диапазоне магнитных полей (0.6–0.8) T, и на рис. 2b разброс полученных значений $A(b)/A(1)$ показан вертикальными отрезками. Смена знака относительной амплитуды означает смену фазы осцилляций на π. На том же рисунке приведены теоретические зависимости (3) для нескольких значений X. Видно, что экспериментальные данные хорошо описываются теоретической кривой с $X = 0.33 \pm 0.03$. Это значение согласуется с тем, что при уменьшении магнитного поля в $\rho_{xx}(B)$ остаются минимумы только с четными факторами заполнения, как должно быть при $X < 0.5$ (см. вставку на рис. 1b).

Рассмотрим теперь результаты для меньшей концентрации электронов, $n = 2.45 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$, которые приведены на рис. 3, 4. Прежде всего отметим, что в отличие от предыдущего случая в области малых полей наблюдаются минимумы только с нечетными номерами (рис. 3a, b). Условия применимости уравнения (2), перечисленные выше, выполняются в магнитных полях $B < 0.8$ T. На рис. 4a, b приведены осцилляции $\frac{d\rho_{xx}}{dB_\perp}(B_\perp)$ при различных углах и зависимость относительной амплитуды от угла. Видно, что положения экстремумов, также как в предыдущем случае, не меняются при повороте (см. рис. 4a), но в отличие от него относительная амплитуда осцилляций возрастает при малых углах (рис. 4b).

Сравним экспериментальную зависимость $A(b)/A(1)$ с теоретической. На рис. 4b приведены зависимости (3) при $X = 0.58$ и 0.54, которые дают лучшее согласие при малых углах. Однако при $b < 0.5$ согласие исчезает полностью. Таким образом, в простой модели описать полученный результат не удается ни при каких X. Это может быть связано с анизотропией g-фактора, которая становится существенной при уменьшении концентрации электронов, т.е.при приближении уровня Ферми к дну зоны проводимости. Действительно, если предположить, что g-фактор анизотропен и учесть его зависимость от угла в простейшей форме: $g(b) = \sqrt{(g_\perp b)^2 + g_\parallel^2(1-b^2)}$, то можно с неплохой

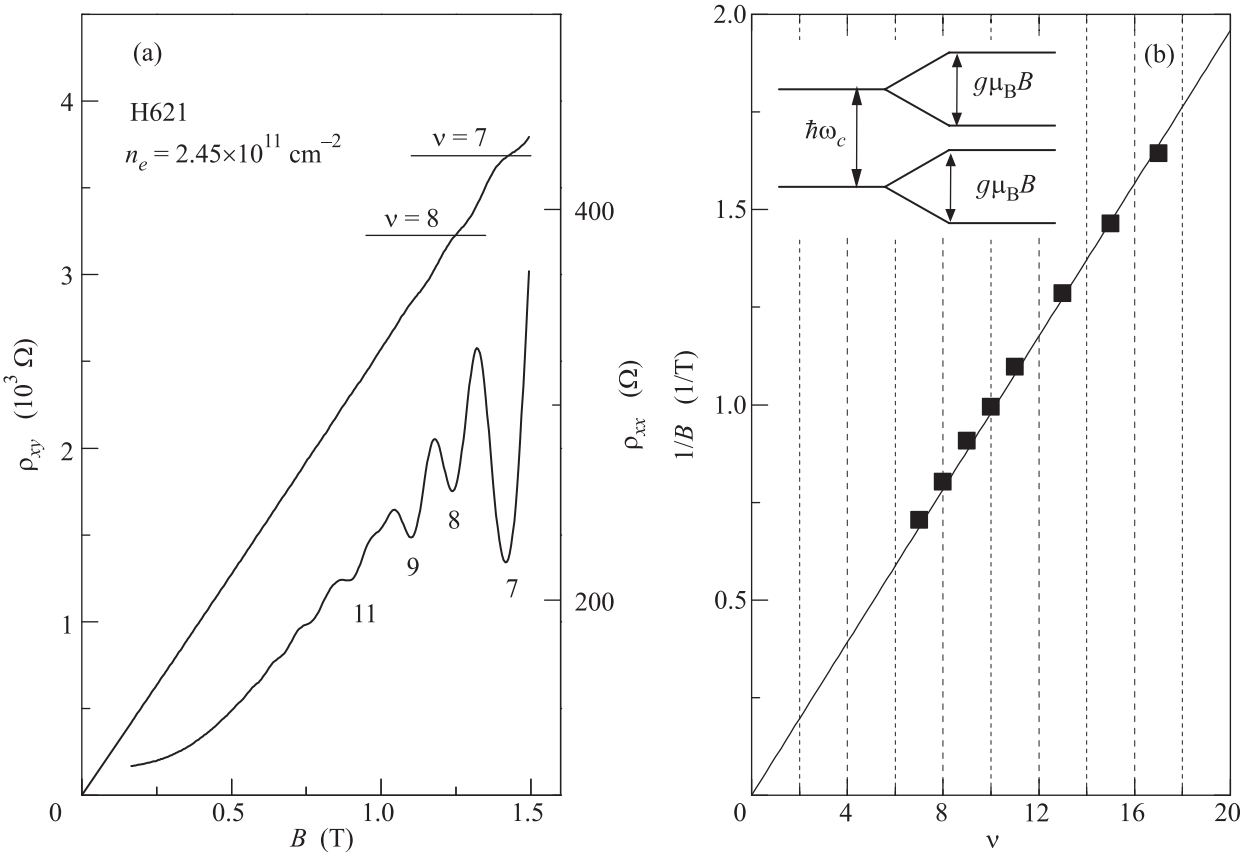

Рис. 3. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 1 для образца H621 при $n_e = 2.45 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$

точностью описать экспериментальные результаты. Это видно из рис. 4b, на котором приведены рассчитанные зависимости для двух пар параметров X и $g_\parallel/g_\perp$. Экспериментальные точки лежат между этими кривыми, так что оба параметра определяются с неплохой точностью: $X = 0.55 \pm 0.04$, $g_\parallel/g_\perp = 0.52 \pm 0.04$. Отметим, что полученное значение $X > 0.5$ согласуется (как и в предыдущем случае) с тем, что в осцилляциях ШдГ в малых магнитных полях остаются минимумы с нечетными номерами (см. рис. 3b).

Такие измерения и анализ были проведены в диапазоне концентраций $(1{-}6) \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$. Полученные значения X и анизотропии приведены на рис. 5. Там же приведены результаты, полученные на структуре H1114 с большей шириной ямы[2)]. Видно, что, во-первых, значения X и $g_\parallel/g_\perp$ в этих структурах при одинаковой концентрации близки, при этом значения X для структуры H621 с меньшей шириной ямы систематически больше, чем в структуре H1114, а значения $g_\parallel/g_\perp$ систематически меньше; во-вторых, с ростом концентрации величина X монотонно падает, а $g_\parallel/g_\perp$ растет.

Сравним наши результаты с имеющимися в литературе. Нам известны три работы, в которых было определено зеемановское расщепление в структурах HgTe/CdHgTe с ямами больше 15 нм [8–10]. В работах [8, 9] была исследована структура с ямой 20.3 нм с концентрацией носителей $1.5{\cdot}10^{15}$ см$^{-2}$. Значения отношения зеемановского отношения к орбитальному, полученные разными способами, и анизотропии g-фактора приведены на рис. 5 косыми крестами. В работе [10] значения g-фактора были определены из активационной зависимости ρ_{xx} в режиме квантового Холла в поперечном магнитном поле при нечетных факторах заполнения в двух кван-

[2)] Меньший диапазон концентраций электронов, в котором приведены результаты, связан с тем, что при $n > 2.5{\cdot}10^{11}$ см$^{-2}$ в осцилляциях появляются биения. Они обусловлены спин-орбитальным расщеплением спектра зоны проводимости за счет эффекта Бычкова–Рашбы [16]. Меньшее значение концентрации, при котором это расщепление становится существенным, связано с тем, что образец H1114 исходно имел концентрацию дырок $p = 1.2 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$, так что концентрация электронов $2.5 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$ достигается при существенно большем электрическом поле, чем в структуре H621.

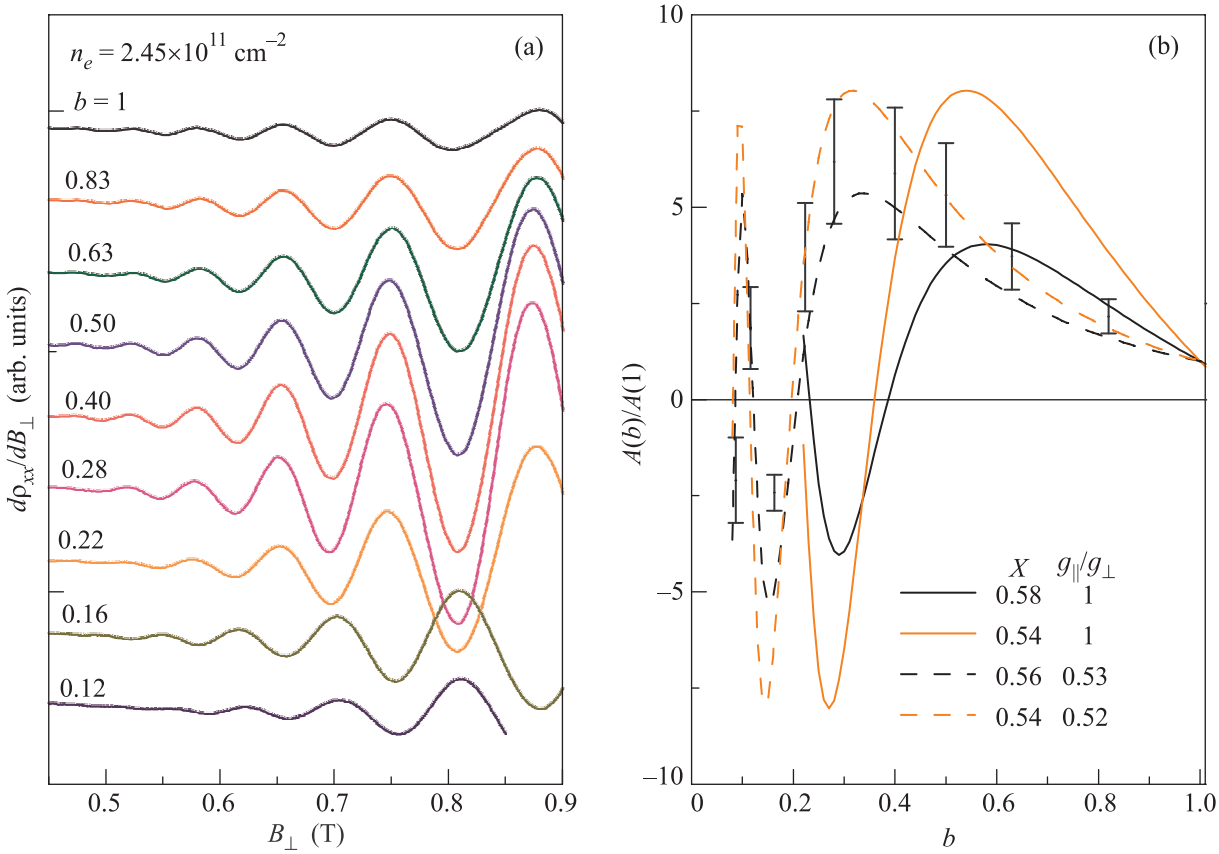

Рис. 4. (Цветной онлайн) (a) — Осцилляции ШдГ, измеренные при разных углах, для образца H621 при $n_e = 2.45 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$. (b) – Угловая зависимость относительной амплитуды (вертикальные отрезки) и теоретические зависимости с параметрами, указанными на рисунке

товых ямах шириной 20 нм с концентрациями электронов $4.8 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$ и $7.3 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$. Авторы получили, что при больших факторах заполнения величина g-фактора вдвое больше, чем при малых и на рис. 5а мы поставили точки для X, соответствующие крайним значениям g. Видно, что значения X, полученные по результатам [8–10], определены только при 3-х концентрациях и имеют большую ошибку. Для двух концентраций в пределах этой ошибки они согласуются с нашими значениями X, но при $n_e = 4.8 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$ расхождение радикально. Отметим, что значение $X = 0.54$, использованное в работе [11] для интерпретации осцилляций фототока в яме толщиной 21.2 нм, при концентрации $n_e = 1.7 \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$ близко к нашим данным.

Теперь сравним наши результаты с теоретическими расчетами. Мы воспользовались расчетом уровней Ландау зоны проводимости квантовой ямы HgTe/CdHgTe, проведенным в рамках 8-зонного kP гамильтониана [5]. Поскольку в разных работах используются различные обозначения уровней Ландау зоны проводимости, мы пронумеровали их по порядку, начиная с нижнего уровня, присвоив ему номер один. Величина спинового расщепления $g\mu_B B$ определялась как расстояние между уровнями с номерами n и $n+1$, где n – нечетное, а орбитальное расщепление $\hbar\omega_c$, как расстояние между уровнями n и $n+2$. Результаты этих расчетов для ям толщиной 16 и 20 нм приведены на рис. 5а. Видно, что теоретические значения неплохо согласуются с экспериментальными как по величине, так и по зависимости от концентрации. Также как и в эксперименте, значение величины X для более узкой ямы несколько больше, чем для ямы с большей шириной. Некоторое отличие между теорией и экспериментом может быть связано с факторами, не учтенными в теории, например, с отсутствием инверсионной симметрии, связанной с различием интерфейсов (*interface inversion asymmetry*) в квантовых ямах HgCdTe/HgTe/HgCdTe.

К сожалению, мы не можем сравнить величину и зависимость от концентрации анизотропии g-фактора с теоретическим расчетом. Расчет энергетического спектра в продольном магнитном поле был

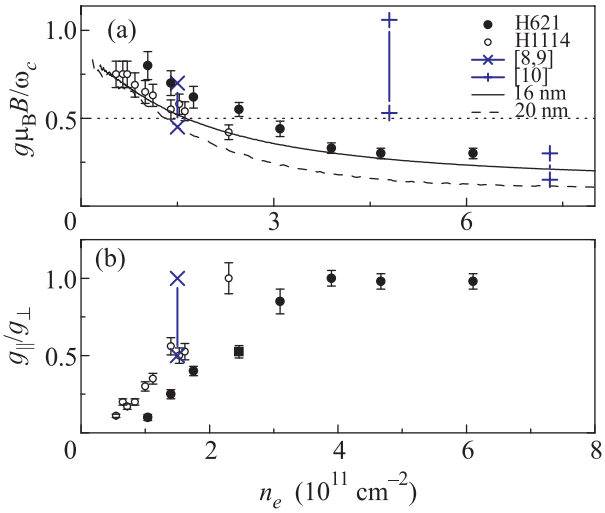

Рис. 5. (Цветной онлайн) Зависимость значений X (a) и анизотропии (b) от концентрации носителей для структуры H621 и структуры H1114, а также значения из работ [8–10]. Линии на (a) – результат теоретического расчета для ямы 16 нм (сплошная линия) и 20 нм (штриховая линия)

сделан только в одной работе для структур с шириной ямы, близкой к критической [17].

Таким образом, в настоящей работе определено отношение величины спинового расщепления электронов к орбитальному для структур с шириной ямы 16 и 20 нм в широком диапазоне концентраций. Величина этого отношения и его зависимость от концентрации удовлетворительно согласуется с расчетами спектра в рамках 8-зонной kP модели. Показано, что эффективный g-фактор анизотропен, $g_\parallel < g_\perp$. Эта анизотропия очень велика при малых концентрациях, быстро уменьшается с ростом концентрации, стремясь к единице при $n_e = (3{-}4) \cdot 10^{11}$ см$^{-2}$. Для того чтобы понять такое поведение g-фактора, требуются дополнительные теоретические исследования.

Авторы выражают благодарность М.С. Жолудеву, выполнившему теоретические расчеты спектра структур в магнитном поле.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для Уральского федерального университета (# 2457), поддержана программой 211 Правительства Российской Федерации (соглашение # 02.A03.21.0006) и Российским фондом фундаментальных исследований (гранты # 16-02-00516 и 15-02-02072).

1. L. G. Gerchikov and A. Subashiev, Phys. Stat. Sol. (b) **160**, 443 (1990).
2. X. C. Zhang, A. Pfeuffer-Jeschke, K. Ortner, V. Hock, H. Buhmann, C. R. Becker, and G. Landwehr, Phys. Rev. B **63**, 245305 (2001).
3. E. G. Novik, A. Pfeuffer-Jeschke, T. Jungwirth, V. Latussek, C. R. Becker, G. Landwehr, H. Buhmann, and L. W. Molenkamp, Phys. Rev. B **72**, 035321 (2005).
4. B. A. Bernevig, T. L. Hughes, and S.-C. Zhang, Science **314**, 1757 (2006).
5. M. Zholudev, Ph. D. thesis, University Montpellier 2, France (2013).
6. M. Pakmehr, C. Bruene, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, A. V. Stier, and B. D. McCombe, Phys. Rev. B **90**, 235414 (2014).
7. X. C. Zhang, K. Ortner, A. Pfeuffer-Jeschke, C. R. Becker, and G. Landwehr, Phys. Rev. B **69**, 115340 (2004).
8. M. V. Yakunin, S. M. Podgornykh, N. N. Mikhailov, and S. A. Dvoretsky, Physika E **42**, 948 (2010).
9. M. V. Yakunin, A. V. Suslov, S. M. Podgornykh, S. A. Dvoretsky, and N. N. Mikhailov, Phys. Rev. B **85**, 245321 (2012).
10. Л. С. Бовкун, С. С. Криштопенко, М. С. Жолудев, А. В. Иконников, К. Е. Спирин, С. А. Дворецкий, Н. Н. Михайлов, F. Teppe, W. Knap, В. И. Гавриленко, ФТП **49**, 1676 (2015).
11. C. Zoth, P. Olbrich, P. Vierling, K.-M. Dantscher, V. V. Bel'kov, M. A. Semina, M. M. Glazov, L. E. Golub, D. A. Kozlov, Z. D. Kvon, N. N. Mikhailov, S. A. Dvoretsky, and S. D. Ganichev, Phys. Rev. B **90**, 205415 (2014).
12. N. N. Mikhailov, R. N. Smirnov, S. A. Dvoretsky, Y. G. Sidorov, V. A. Shvets, E. V. Spesivtsev, and S. V. Rykhlitski, Int. J. Nanotechnology **3**, 120 (2006).
13. F. F. Fang and P. J. Stiles, Phys. Rev. **174**, 823 (1968).
14. S. A. Studenikin, P. T. Coleridge, G. Yu, and P. Poole, Semicond. Sci. Technol. **20**, 1103 (2005).
15. E. V. Kurganova, H. J. van Elferen, A. McCollam, L. A. Ponomarenko, K. S. Novoselov, A. Veligura, B. J. van Wees, J. C. Maan, and U. Zeitler, Phys. Rev. B **84**, 121407(R) (2011).
16. Ю. А. Бычков, Э. И. Рашба, Письма в ЖЭТФ **39**, 66 (1984) [JETP Lett. **39**, 78 (1984)].
17. O. E. Raichev, Phys. Rev. B **85**, 045310 (2012).