

Нелинейная динамика поверхности раздела жидкостей в условиях подавления неустойчивости Кельвина–Гельмгольца тангенциальным электрическим полем

Н. М. Зубарев^{+*1)}, Е. А. Кочурин⁺¹⁾

⁺Институт электрофизики УрО РАН, 620016 Екатеринбург, Россия

^{*}Физический институт им. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 июня 2016 г.

После переработки 15 июля 2016 г.

Рассмотрена нелинейная динамика поверхности раздела идеальных диэлектрических жидкостей при наличии тангенциального разрыва скоростей на границе при стабилизирующем воздействии горизонтального электрического поля. Показано, что в состоянии нейтрального равновесия, когда электростатические силы подавляют неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, может реализовываться режим движения поверхности раздела, в котором жидкости перемещаются вдоль силовых линий поля. Соответствующие этому режиму уравнения движения границы допускают редукцию к произвольному числу обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих распространение и взаимодействие структурно устойчивых уединенных волн – рациональных солитонов. Показано, что при слабом взаимодействии уединенные волны после столкновения восстанавливают свою форму и скорость, а при сильном взаимодействии могут образовать волновой пакет (бризер).

DOI: 10.7868/S0370274X16160128

1. Введение. Одним из наиболее распространенных типов гидродинамических неустойчивостей является неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, развивающаяся при наличии тангенциального разрыва скоростей на поверхности раздела жидкостей [1–3]. Известно также, что внешнее электрическое (магнитное) поле, направленное по касательной к невозмущенной границе, оказывает на нее стабилизирующее воздействие [4]. В настоящей работе исследуется влияние горизонтального электрического поля на поверхность раздела жидких диэлектриков при наличии на ней тангенциального разрыва скоростей. С прикладной точки зрения интерес к этой ситуации связан с возможностью управления движением границы с помощью приложенного поля и, в частности, возможностью подавления гидродинамических неустойчивостей [5].

Описание движения поверхности раздела жидкостей является сложной задачей; любой способ упростить уравнения движения, в частности, уменьшить их число будет иметь значительную ценность. Безвихревое движение невязких несжимаемых жидкостей в электрическом поле удобно рассматривать в

рамках гамильтоновского формализма. Гамильтониан системы вводится как [6]

$$H = \int (w_v - w_e) d^3r, \quad w_v = \frac{\rho}{2} |\mathbf{V}|^2, \quad w_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} |\mathbf{E}|^2$$

(капиллярные и гравитационные силы здесь не учитываются). В этом выражении \mathbf{E} – напряженность электрического поля, w_e – плотность его энергии, \mathbf{V} – поле скоростей, w_v – плотность кинетической энергии, ρ – плотность среды, ε – ее диэлектрическая проницаемость (все эти величины испытывают скачок на границе раздела), а ε_0 – электрическая постоянная. Распределения электрического поля и поля скоростей жидкостей задаются соответствующими скалярными потенциалами, $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и $\mathbf{V} = \nabla\Phi$. Значение H однозначно определяется парой функций η и ψ . Обобщенная координата η задает форму поверхности раздела, а обобщенный импульс определяется выражением $\psi \equiv [\rho\Phi]$, где квадратная скобка обозначает скачок величины на границе раздела. Эволюция поверхности раздела описывается гамильтоновскими уравнениями [7, 8]:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta}, \quad (1)$$

которые дополняются уравнениями на потенциалы электрического поля (φ) и поля скоростей (Φ).

¹⁾e-mail: nick@iep.uran.ru; kochurin@iep.uran.ru

В частных случаях, когда отсутствует либо электрическое поле, либо тангенциальный разрыв скоростей, эволюция границы может быть эффективно исследована аналитически в приближении малости углов ее наклона (см. [9, 10]). На первый взгляд, учет обоих указанных факторов (величины w_e и w_v в гамильтониане – сравнимы) должен значительно усложнить рассмотрение задачи. Как оказывается, это утверждение не всегда справедливо. При одновременном учете электростатического и динамического давлений в уравнениях движения могут возникать симметрии, упрощающие их анализ. Так, оказывается возможной реализация особого режима движения жидкостей, для которого в каждой точке пространства будет $w_v = w_e$ и подынтегральное выражение в H тождественно равно нулю. Это соответствует тому, что $\mathbf{V} \sim \mathbf{E}$ и $\Phi \sim \varphi$, т.е. жидкости перемещаются вдоль силовых линий поля. Ниже мы покажем, что для этого режима выполняется условие $\psi = 0$. При этом второе уравнение из пары канонических уравнений (1) превращается в тождество, и движение границы определяется единственным уравнением

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left. \frac{\delta H}{\delta \psi} \right|_{\psi=0}. \quad (2)$$

Подобная редукция уравнений движения оказывается возможной при выполнении условия $[\varepsilon \rho] = 0$ на параметры жидкостей и условия

$$\varepsilon_0 [\varepsilon]^2 E^2 = \varepsilon \rho (\Delta V)^2 \quad (3)$$

на величину E приложенного горизонтального электрического поля (ΔV – разность скоростей жидкостей).

Кроме того, в настоящей работе будет продемонстрировано, что уравнение (2) допускает построение значительного числа несингулярных точных решений, описывающих распространение и взаимодействие уединенных волн на поверхности раздела. Динамика их взаимодействия оказывается весьма сложной и интересной. Уже для пары волн она включает в себя такие режимы, как взаимное уничтожение волн, их объединение в волновой пакет (бризер), а также ситуацию, когда быстрая волна обгоняет медленную с восстановлением формы каждой.

2. Исходные уравнения; редукция. Рассмотрим динамику границы раздела двух несмешивающихся непроводящих жидкостей с плотностями $\rho_{1,2}$ и проницаемостями $\varepsilon_{1,2}$ во внешнем горизонтальном электрическом поле (здесь и ниже индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к нижней и верхней жидкостям). В невозмущенном состоянии поверхность

раздела представляет собой плоскость $z = 0$ (ось x совпадает с направлением внешнего поля величиной E , а ось z направлена по нормали к ней). Жидкости двигаются вдоль направления оси x со скоростями $V_{1,2}$, т.е. имеется ненулевой скачок скоростей $\Delta V \equiv V_1 - V_2$. В возмущенном состоянии форма поверхности раздела задается уравнением $z = \eta(x, y, t)$.

Потенциалы скорости $\Phi_{1,2}$ и электрического поля $\varphi_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi_{1,2} = 0, \quad \nabla^2 \varphi_{1,2} = 0.$$

На границе раздела должно выполняться условие равенства нормальных компонент скоростей верхней и нижней жидкостей $[\partial_n \Phi] \equiv \partial_n \Phi_1 - \partial_n \Phi_2 = 0$, где ∂_n – производная в направлении нормали к поверхности $z = \eta$. Для потенциалов электрического поля справедливы граничные условия $[\varphi] = 0$ и $[\varepsilon \partial_n \varphi] = 0$. Они соответствуют требованиям непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля и нормальной компоненты вектора электрической индукции на поверхности раздела (считаем, что свободные поверхностные заряды на границе отсутствуют). На бесконечном удалении от границы ($z \rightarrow \mp \infty$) течение жидкостей становится стационарным, а электрическое поле – однородным: $\Phi_{1,2} \rightarrow V_{1,2}x$ и $\varphi_{1,2} \rightarrow -Ex$. Не теряя общности, можно положить $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$ (подобное условие впоследствии упростит некоторые выкладки). Действительно, выполнения этого соотношения можно всегда добиться преобразованием Галилея.

Гамильтониан H исследуемой системы записывается как

$$H = \int_{z \leq \eta} \left[\frac{\rho_1}{2} (\nabla \Phi_1)^2 - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 \right] d^3 r + \\ + \int_{z \geq \eta} \left[\frac{\rho_2}{2} (\nabla \Phi_2)^2 - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{2} (\nabla \varphi_2)^2 \right] d^3 r,$$

а движение границы определяется парой уравнений (1). Несложно заметить, что подынтегральные выражения в гамильтониане тождественно обращаются в нуль при наличии следующих связей между потенциалами поля и скорости:

$$\Phi_{1,2} = -(\varepsilon_0 \varepsilon_{1,2} / \rho_{1,2})^{1/2} \varphi_{1,2}. \quad (4)$$

С физической точки зрения, это означает, что жидкости двигаются вдоль силовых линий электрического поля. В работах [11, 12] демонстрировалось, что подобная ситуация может реализоваться для границы раздела жидких диэлектриков в вертикальном электрическом поле.

Выражения (4) согласуются с условиями на поверхности раздела в частном случае, когда выполняется равенство

$$\varepsilon_1 \rho_1 = \varepsilon_2 \rho_2. \quad (5)$$

Примеры пар таких жидкостей приведены в работе [11]. При

$$E = E_c, \quad E_c = V_1(\rho_1/\varepsilon_0\varepsilon_1)^{1/2} \quad (6)$$

(это условие эквивалентно (3)) выражение (4) также согласуются с условиями на бесконечности. Отметим, что знак электрического поля может быть и противоположным; это связано с тем, что электростатическое давление определяется квадратом напряженности поля. Мы обсудим физический смысл условия (6) в следующем разделе.

Важно, что при справедливости (5) и (6) равенство (4) взаимно однозначно обеспечивает выполнение следующего условия на каноническую функцию: $\psi \equiv [\rho\Phi] = 0$. Отсюда сразу следует, что для рассматриваемого режима эволюция границы описывается единственным уравнением (2). Можно найти, что это уравнение принимает вид:

$$\eta_t = (\varepsilon_0\varepsilon_1/\rho_1)^{1/2}(1 + (\nabla\eta)^2)^{1/2} \partial_n \varphi_1|_{z=\eta}. \quad (7)$$

Отметим, что это уравнение – незамкнутое. Его необходимо решать совместно с уравнениями Лапласа для потенциалов электрического поля $\varphi_{1,2}$ и соответствующими граничными условиями.

Примечательно, что при выводе уравнения (7) не вводились какие-либо ограничения на геометрию задачи – она рассматривалась в исходной трехмерной постановке, причем не использовалось часто применяемое предположение о малости возмущений границы.

3. Закон дисперсии; малоугловое приближение. Рассмотрим, какое место в общей картине динамики системы занимает режим движения, описываемый редукцией (2) или (7).

Дисперсионное соотношение для линейных волн на поверхности раздела имеет вид [13]:

$$(\omega + V_c k_x)^2 = (c_e^2 - c^2) k_x^2, \quad (8)$$

где ω – частота, k_x – x -компонента волнового вектора, $V_c = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ – скорость центра масс системы жидкостей, c и c_e – постоянные, определяемые как

$$c^2 = \frac{\rho_1 \rho_2 (\Delta V)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}, \quad c_e^2 = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 E^2}{(\rho_1 + \rho_2) (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Устойчивость границы жидкостей зависит от знака правой части дисперсионного соотношения (8); при

$c_e^2 < c^2$ будет развиваться неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, а при $c_e^2 > c^2$ поверхность устойчива и по ней будут распространяться волны вдоль направления приложенного электрического поля. Случай, при котором правая часть уравнения (8) обращается в нуль ($c_e^2 = c^2$), соответствует состоянию нейтрального равновесия: дестабилизирующее влияние тангенциального разрыва скоростей и стабилизирующее воздействие горизонтального электрического поля взаимно компенсируются.

Подставляя (5) и (6) в выражения для c^2 и c_e^2 , несложно убедиться, что для исследуемого особого режима движения жидкостей выполняется условие $c_e^2 = c^2$, т.е. значение напряженности поля E_c является пороговым. Таким образом, описываемый редукцией (2) режим соответствует нейтральному равновесию системы в терминах закона дисперсии (8).

В состоянии нейтрального равновесия поведение системы будет полностью определяться нелинейными эффектами. Построим нелинейные уравнения движения, описывающие эволюцию границы в приближении малости углов ее наклона, $|\nabla_\perp \eta| \ll 1$. Ограничимся анализом плоских волн, распространяющихся вдоль оси x (нет зависимости от переменной y). Положим для определенности $\Delta V > 0$ и $c > 0$ (этими неравенствами мы задаем направление разрыва скоростей).

Для получения уравнений движения поверхности раздела необходимо выразить гамильтониан системы H через канонические переменные η и ψ . Он сводится к поверхностному интегралу при помощи теоремы Остроградского–Гаусса. Далее подынтегральное выражение в гамильтониане раскладывается в ряд по степеням η и ψ (подробно методика изложена в работах [9–11]). Удобно перейти к безразмерным обозначениям

$$\psi \rightarrow \psi c \lambda (\rho_1 + \rho_2), \quad \eta \rightarrow \eta \lambda, \quad t \rightarrow t \lambda / c,$$

$$x \rightarrow x \lambda, \quad E \rightarrow e E_c, \quad V_c \rightarrow v_c c,$$

где λ – характерная длина волны. В итоге получим для гамильтониана с точностью до кубических слагаемых в подынтегральном выражении:

$$H = \frac{1}{2} \int \psi \hat{k} \psi dx + \frac{1}{2} \int \eta \left[(e^2 - 1) \hat{k} \eta - 2v_c \psi_x + \right. \\ \left. + A \left(\psi_x^2 - (\hat{k} \psi)^2 \right) + (A_e e^2 + A) \left(\eta_x^2 - (\hat{k} \eta)^2 \right) - \right. \\ \left. - 2\sqrt{1 - A^2} \left(\eta_x \hat{k} \psi + \psi_x \hat{k} \eta \right) \right] dx,$$

где $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ – число Атвуда, $A_e = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ – его аналог для диэлектрических

проницаемостей, $\hat{k} = -\hat{H}\partial_x$, где \hat{H} — преобразование Гильберта. Соответствующие этому гамильтониану уравнения (1) записываются как

$$\eta_t - \hat{k}\psi - v_c\eta_x = -\sqrt{1 - A^2} \left(\hat{k}(\eta\eta_x) - (\eta\hat{k}\eta)_x \right) - A \left((\eta\psi_x)_x + \hat{k}(\eta\hat{\psi}) \right), \quad (9)$$

$$\psi_t + (e^2 - 1)\hat{k}\eta - v_c\psi_x = \frac{A}{2} \left((\hat{k}\psi)^2 - \psi_x^2 \right) + \frac{A_e e^2 + A}{2} \left((\hat{k}\eta)^2 - \eta_x^2 + 2(\eta\eta_x)_x + 2\hat{k}(\eta\hat{k}\eta)_x \right) - \sqrt{1 - A^2} \left(\eta\hat{k}\psi_x - \psi_x\hat{k}\eta - \hat{k}(\eta\psi_x) \right). \quad (10)$$

Таким образом, эволюция поверхности раздела описывается весьма сложной системой нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Построить ее решение в общем случае не удастся. Отметим, что в частном случае, когда электрическое поле отсутствует ($e = 0$), уравнения (9) и (10) были проинтегрированы в [9].

В присутствии поля ($e \neq 0$) систему уравнений (9) и (10) удастся эффективно исследовать аналитически для частного случая, когда $e = \pm 1$ и $A = -A_e$. В уравнении (10) исчезает ряд слагаемых, и оно становится совместным с условием $\psi = 0$. При этом система (9) и (10) сводится к единственному уравнению

$$\eta_t - v_c\eta_x = \sqrt{1 - A^2} \left[\hat{H}(\eta\eta_x)_x - (\eta\hat{H}\eta_x)_x \right]. \quad (11)$$

Понятно, что условия $e = \pm 1$ и $A = -A_e$ тождественны условиям (5) и (6), а уравнение (11) является редукцией (2) уравнений движения, соответствующей слабонелинейным волнам. Отметим, что в малоугловом приближении уравнение (11) можно получить непосредственно из точного уравнения (7).

4. Взаимодействие уединенных волн. Будем искать решение уравнения (11) в виде разложения $\eta = \eta^+ + \eta^-$, где $\eta^\pm = \hat{P}^\pm \eta$ — аналитические продолжения функции η в верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной переменной x , а $\hat{P}^\pm = (1 \mp i\hat{H})/2$ — соответствующие проекторы. Перейдем также посредством замены $x \rightarrow x + v_c t$ в систему центра масс (с.ц.м.), что устраняет второе слагаемое в левой части уравнения. Получим в итоге компактное комплексное уравнение

$$\tau\eta_t^+ = 2i\hat{P}^+(\eta^+\eta_x^-)_x, \quad (12)$$

где мы обозначили $\tau = (1 - A^2)^{-1/2}$.

Особенностью уравнения (12) является то, что оно допускает редукцию к системе обыкновенных

дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие произвольного числа структурно устойчивых уединенных волн. Так, будем искать решение (12) в виде

$$\eta^+(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{iS_n/2}{x - p_n(t)}, \quad (13)$$

где комплексные функции $p_n(t)$ определяют положения особых точек (полюсов) в нижней полуплоскости комплексной переменной x ($\text{Im}p_n < 0$), а S_n — вещественные постоянные. Каждый полюс соответствует отдельному локализованному возмущению поверхности раздела:

$$\eta = \sum_{n=1}^N \eta_n, \quad \eta_n = \frac{S_n |\text{Im}p_n(t)|}{(x - \text{Re}p_n(t))^2 + (\text{Im}p_n(t))^2}.$$

Отсюда видно, что величины S_n задают площади уединенных возмущений ($\pi S_n = \int \eta_n dx$), величины $\text{Re}p_n$ определяют положения волн по оси x , $|\text{Im}p_n|$ — характерные ширины возмущений, а $S_n/|\text{Im}p_n|$ — их амплитуды. При подстановке (13) в уравнение (12) получим следующую систему уравнений на движущие полюсы:

$$\tau \frac{dp_n}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{S_j}{(p_n - \bar{p}_j)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Рассмотрим в первую очередь простейший случай единственной волны, $N = 1$. Находим

$$p_1(t) = v(t - t_0) - iS_1/a, \quad v = -a^2/(4\tau S_1),$$

где a — амплитуда волны, t_0 — некоторая постоянная. Таким образом, уединенная волна распространяется без искажений с постоянной скоростью v , пропорциональной квадрату ее амплитуды. Направление движения волны зависит от знака S_1 . Положительные возмущения перемещаются против направления оси x , а отрицательные — по оси x (направление движения изменится на противоположное при изменении знака скачка скоростей ΔV , который мы ранее выбрали положительным).

Для $N > 1$ введем положение центра системы полюсов как

$$p_0 = \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N S_n p_n, \quad S = \sum_{n=1}^N S_n.$$

Несложно заметить, что величина $I = \text{Im}p_0$ является интегралом движения системы (14), так что центр p_0 двигается параллельно вещественной оси. Пусть

выполняются условия $|p_n - p_0| \ll |I|$ для любых n , т.е. полюса расположены на комплексной плоскости близко друг к другу (это соответствует сильному взаимодействию уединенных волн). В этой ситуации центр системы полюсов будет двигаться с постоянной скоростью:

$$p_0 = v(t - t_0) + iI, \quad v = -S/(4\tau I^2),$$

что аналогично поведению единственного полюса с $S_1 = S$ для рассмотренного выше случая $N = 1$. Сами полюса при этом будут вращаться вокруг общего центра с частотой $\Omega = v/I$. Действительно, движение полюсов относительно центра p_0 описывается N независимыми уравнениями

$$\frac{d(p_n - p_0)}{dt} = i\Omega(p_n - p_0), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

получаемыми из (14) разложением по малым $p_n - p_0$. Таким образом, при сильном взаимодействии уединенные волны объединяются в волновой пакет (бризер).

Обсудим теперь случай слабого взаимодействия волн. Если расстояния между полюсами значительно превышают расстояния от полюсов до вещественной оси, то их взаимодействием можно пренебречь. Соответствующие полюсам уединенные волны будут распространяться с постоянными скоростями, как это происходит для случая $N = 1$. Необходимость учета взаимодействия волн возникает при их столкновении, причем наиболее важную роль играет случай парного взаимодействия, для которого возможно построение аналитических решений.

Итак, рассмотрим подробно случай $N = 2$, т.е. взаимодействие пары уединенных волн. В первую очередь исследуем ситуацию, когда $S_1 = S_2$. Введем вспомогательные переменные – расстояния между полюсами $\xi = \text{Re}(p_2 - p_1)$ и $\zeta = \text{Im}(p_2 - p_1)$. Уравнения, описывающие их эволюцию, имеют вид

$$\tau \frac{d\xi}{dt} = \frac{8IS_1\zeta}{(4I^2 - \zeta^2)^2}, \quad \tau \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{8IS_1\xi}{(4I^2 + \xi^2)^2}. \quad (15)$$

Траектории этой системы, определяющие ее фазовый портрет, задаются кривой четвертого порядка

$$(1 + 4CI^2)\zeta^2 + (1 - 4CI^2)\xi^2 + C\xi^2\zeta^2 = 16CI^4,$$

где C – постоянная интегрирования. На рис. 1 представлены характерные траектории в плоскости $\{\xi, \zeta\}$ для различных начальных условий (т.е. различных C). Финитные траектории соответствуют режиму, в котором локализованные волны объединяются в согласованно движущуюся пару, образуя

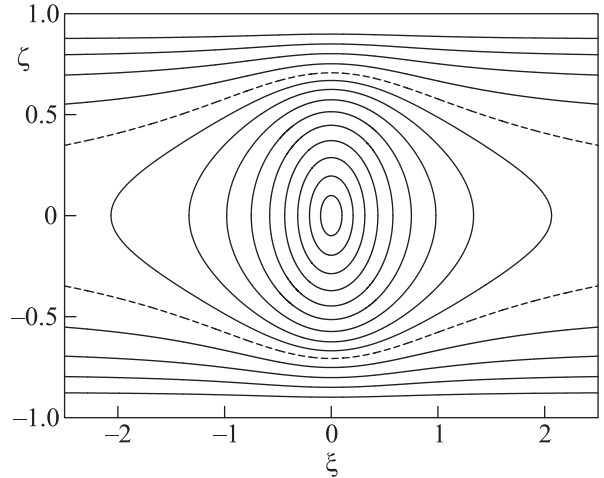


Рис. 1. Фазовый портрет системы (15), описывающей взаимодействие двух уединенных волн с $S_1 = S_2$ при $I = -1/2$

устойчивый волновой пакет. Этот режим реализуется в случае исходно близкого расположения полюсов на комплексной плоскости. Полюса начинают вращаться вокруг общего центра, а соответствующие им уединенные волны периодически обгоняют друг друга. Подобное поведение волн проиллюстрировано на рис. 2. Инфинитные траектории соответствуют

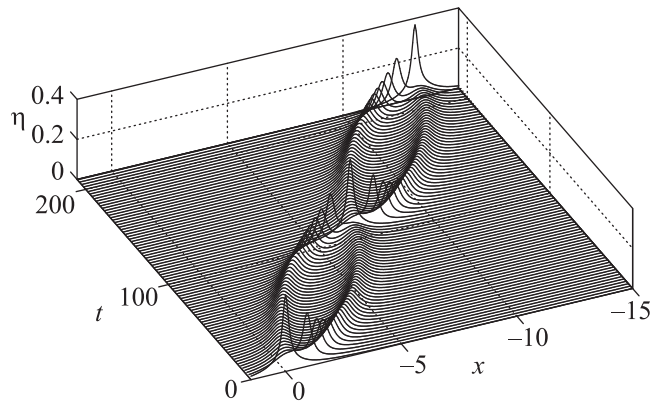


Рис. 2. Взаимодействие пары волн в с.д.м. при $S_1 = S_2 = 0.05$ для начальных условий $p_1 = -0.845i$ и $p_2 = -0.155i$ ($C \approx 0.91$)

режиму, когда одна волна обгоняет другую. Из симметрии траекторий ясно, что после столкновения волны восстанавливают свою исходную форму. Пунктирной линией показана сепаратриса (для нее $4CI^2 = 1$) для этих режимов. Отметим, что аналогичные режимы движения возникают и в ситуации, когда $S_1 \neq S_2$.

Рассмотрим еще один интересный режим взаимодействия пары волн, который реализуется при $S_1 =$

$= -S_2$ и $I = 0$, т.е. для встречных волн равной амплитуды. В этом случае удобно ввести переменные $\xi' = \text{Re}(p_2 - p_1)$ и $\zeta' = -\text{Im}(p_1 + p_2)$. При больших значениях $|\xi'|$ волны движутся практически без искажений навстречу друг другу. Они начинают взаимодействовать при сближении. Исследуем их поведение при столкновении, т.е. при $|\xi'| \ll \zeta'$. Уравнения на временную динамику величин ξ' и ζ' , записанные в основном порядке разложения по ξ' , имеют вид

$$\tau \frac{d\xi'}{dt} = \frac{6S_1\xi'^2}{\zeta'^4}, \quad \tau \frac{d\zeta'}{dt} = -\frac{4S_1\xi'}{\zeta'^3}.$$

Траектории системы определяются выражением $\zeta' = C'\xi'^{-2/3}$, где C' – постоянная. Величина ξ' будет асимптотически стремиться к нулю как $t^{-3/11}$, а величина ζ' , задающая удвоенное расстояние полюсов от вещественной оси, увеличивается как $t^{2/11}$. В таком случае имеем $\eta \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. происходит взаимное уничтожение (аннигиляция) волн. Подобная ситуация показана на рис. 3.

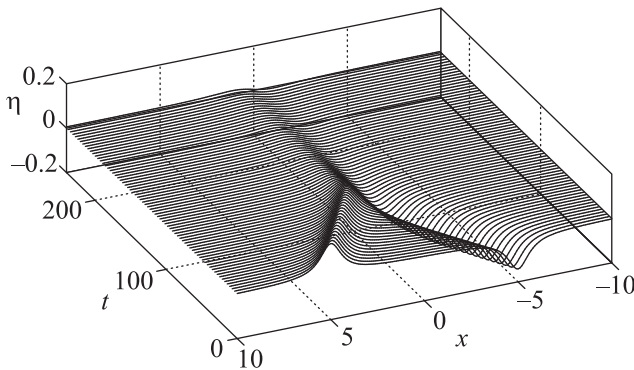


Рис. 3. Взаимное уничтожение пары волн в с.ц.м. при $S_1 = -S_2 = 0.1$ для начальных условий $p_{1,2} = \pm 5 - 0.7i$

В заключение раздела отметим, что все решения для эволюции поверхности раздела, соответствующее подстановке (13), являются несингулярными. Однако, если в (13) взять комплексные параметры S_n , то полюса могут достигать вещественной оси и, как следствие, в решениях уравнения (11) будут возникать особенности за конечное время. Подобное по-

ведение системы нарушает использованное нами малоугловое приближение.

6. Заключительные замечания. Полученные в настоящей работе результаты можно использовать для описания динамики поверхности раздела жидкостей с постоянными магнитными проницаемостями в горизонтальном магнитном поле (см., например, [4, 14]). Для этого следует заменить электрическое поле E на магнитное H , а диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{1,2}$ на магнитные $\mu_{1,2}$. Аналогичная (2) редукция уравнений движения возможна при выполнении условий $[\mu\rho] = 0$ и $\mu_0[\mu]^2 H^2 = \mu\rho(\Delta V)^2$.

Работа выполнена в рамках темы гос. задания 0389-2014-0006 при поддержке РФФИ (проекты 16-08-00228 и 16-38-60002), Президиума УрО РАН (проект 15-8-2-8) и Совета по грантам Президента РФ (СП-132.2016.1).

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, М. (1988).
2. Ю. А. Степанянц, А. Л. Фабрикант, *УФН* **159**, 83 (1989).
3. Е. А. Кузнецов, П. М. Лушников, *ЖЭТФ* **108**, 614 (1995).
4. J. R. Melcher, W. J. Schwarz, *Phys. Fluids* **11**, 2604 (1968).
5. L. L. Barannyk, D. T. Papageorgiou, and P. G. Petropoulos, *Math. Comp. Sim.* **82**, 1008 (2012).
6. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, *ЖЭТФ* **71**, 262 (1976).
7. В. Е. Захаров, *ПМТФ* **2**, 86 (1968).
8. Е. А. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **182**, 387 (1993).
9. Н. М. Зубарев, Е. А. Кузнецов, *ЖЭТФ* **145** (6), 1 (2014).
10. Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин, *ПМТФ* **54** (2), 52 (2013).
11. Е. А. Kochurin, N. M. Zubarev, and O. V. Zubaeva, *Phys. Rev. E* **88**, 023014 (2013).
12. N. M. Zubarev, *Phys. Fluids* **18**, 028103 (2006).
13. M. F. El-Sayed, *Phys. Rev. E* **60**, 7588 (1999).
14. М. И. Шлиомис, *УФН* **112**, 427 (1974).