Письма в ЖЭТФ, том 104, вып. 8, с. 552 – 559

Усиление волн при вращательных колебаниях жидкости

Д. Ю. Жиленко, О. Э. Кривоносова[1)]

Институт механики МГУ им. Ломоносова, 119192 Москва, Россия

Поступила в редакцию 30 июня 2016 г.

После переработки 29 августа 2016 г.

Численно исследованы течения вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, вызванные вращательными колебаниями его внутренней границы с двумя частотами относительно состояния покоя. Установлено, что увеличение амплитуды колебаний границы на большей из частот может приводить к существенному усилению низкочастотной моды в течении вблизи внешней границы. При этом направление распространения низкочастотной волны изменяется с радиального на меридиональное, в то время как высокочастотная волна распространяется в радиальном направлении в ограниченной внутренней области сферического слоя. Показана роль меридиональной циркуляции в обмене энергией между пространственно разнесенными волнами.

DOI: 10.7868/S0370274X16200030

1. Введение. Для большинства течений в астрофизических природных объектах (звезды, планеты, атмосферы) характерны сферическая геометрия и вращение, и влияние этих факторов может учитываться в модельном сферическом течении Куэтта. Во многих случаях вращение не является равномерным, и к настоящему времени достаточно хорошо изучена неравномерность вращения Солнца и планет Солнечной системы (некоторые данные представлены, например, в [1, 2]). В первом приближении неравномерность вращения может выражаться в виде его периодической модуляции. Периодическая (одночастотная) модуляция скорости вращения одной из сферических границ в случае их достаточно быстрого однонаправленного вращения может приводить к формированию инерционных волн в течении между этими границами [3, 4]. В случае отсутствия среднего вращения и малых амплитуд вращательные колебания внутренней сферы с одной частотой формируют затухающие сферические волны [5]. Вместе с тем зависимость скорости вращения природных объектов от времени может оказаться более сложной. Так, например, данные по продолжительности земных суток [6] свидетельствуют о циклическом процессе, в котором можно выделить, по крайней мере, две частоты, или два характерных масштаба времени. Это определило наш интерес к двухчастотной модуляции скорости вращения. Известно, что результатом взаимодействия двух волн может быть усиление одной из них. Усиление волн рассматривалось, в основном, в рамках моделей идеальной жидкости, в случаях резонансного взаимодействия и модуляционной неустойчивости [7–9], отражений от тангенциального разрыва скорости и слоев сдвига [10]. В экспериментах наблюдалось увеличение амплитуды волн на поверхности жидкости в результате модуляционной неустойчивости [11], а также усиление низкочастотной разности двух близких по частоте ультразвуковых сигналов в жидкости и воздухе [12, 13]. В присутствии вращения известные к настоящему времени результаты ограничены либо приближенными моделями (например, для волн Россби [10]), либо изучением распространения инерционных волн, вызванных одночастотной модуляцией скорости вращения [4]. При моделировании волновых процессов в крупномасштабных течениях внутри Земли рассматривается, как правило, сферическое течение Куэтта с быстрым однонаправленным вращением границ [1]. В этом случае периодическая модуляция скорости вращения одной из границ может приводить к потере устойчивости, трехмерности течения и формированию турбулентности [1], что, безусловно, усложняет как собственно волновую структуру течения, так и ее определение. С целью устранения всех возможных усложнений структуры течения при исследовании взаимодействия двух волн выбран простейший случай отсутствия средней скорости вращения границ и небольших амплитуд их колебаний, чтобы исследовать именно процесс взаимодействия двух волн, незамаскированный другими явлениями. Возможности распространения полученных закономерностей взаимодействия двух волн на случаи ненулевых скоростей вращения сферических границ рассматриваются в разделе 4.

[1)]e-mail: olga@imec.msu.ru

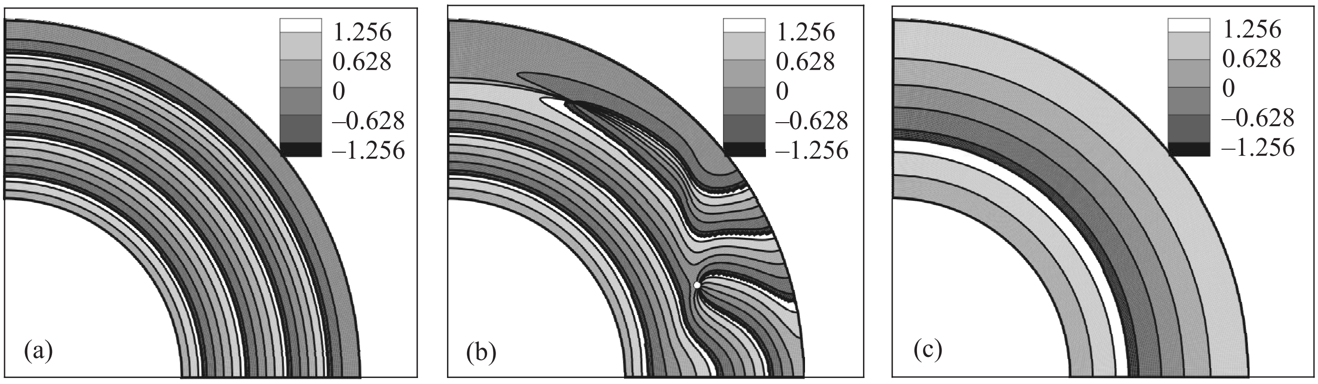

Рис. 1. Гармонические колебания внутренней сферы. Контуры $\psi_0(r,\theta)$: (a) – $A = 1\,\text{c}^{-1}$, $f = 0.5\,\text{c}^{-1}$; (b) – $A = 5\,\text{c}^{-1}$, $f = 0.5\,\text{c}^{-1}$ (белая точка соответствует узлу); (c) – $A = 0.2\,\text{c}^{-1}$, $f = 0.07\,\text{c}^{-1}$

В данной работе численно, на основе решения уравнений Навье–Стокса, исследован процесс взаимодействия высокочастотной и низкочастотной мод в устойчивом нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое, вызванном двухчастотными вращательными колебаниями внутренней сферы относительно состояния покоя. Показана возможность существенного возрастания амплитуды низкочастотной моды в ограниченной области течения под влиянием увеличения амплитуды высокочастотной моды в сигнале скорости вращения сферы.

2. Методика расчета и область исследования. Изотермическое течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности: $\frac{\partial U}{\partial t} = U \times \operatorname{rot} U - \operatorname{gtad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2}\right) - \nu \operatorname{rot}\operatorname{rot} U$, $\operatorname{div} U = 0$, где U, p, ν, ρ – скорость, давление, вязкость и плотность жидкости, соответственно. При численном решении используется сферическая система координат с радиальным (r), полярным (θ) и азимутальным (φ) направлениями, для которой условия непротекания и прилипания на границах имеют вид: $u_\varphi(r = r_{1,2}) = \Omega_{1,2}(t) r_{1,2} \sin\theta$, $u_r(r = r_{1,2}) = 0$, $u_\theta(r = r_{1,2}) = 0$, u_φ, u_r, u_θ – азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости, индекс 1 соответствует внутренней сфере, 2 – внешней. Используемый алгоритм численного решения [14] базируется на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полунеявной схеме Рунге–Кутты 3-го порядка точности интегрирования по времени. Все представленные ниже результаты получены при использовании осесимметричного приближения, правомерность этого приближения подтверждена трехмерными расчетами. Дискретизация по пространству на равномерных по r и θ сетках с общим количеством узлов $4.8{\cdot}10^4$ в части меридиональной плоскости, ограниченной осью вращения и экваториальной плоскостью. Чувствительность результатов к параметрам сетки рассматривалась, например, в [15]. Данный алгоритм использовался при расчетах и трехмерных, и осесимметричных течений [16]. В случае как стационарных [16], так и периодических [17] граничных условий, получено соответствие экспериментальных и расчетных результатов.

В данной работе анализ структуры течения, устанавливающегося под действием колебаний одной из границ слоя – внутренней, основан в том числе и на построении волновых поверхностей или поверхностей равных фаз. Для расчета фазы течения в каждой точке слоя в зависимости от времени используется подход, хорошо известный в радиофизике [18]. При таком подходе вещественный временной ряд $x(t)$ рассматривается как проекция комплексного вектора $Z(t)$ на ось абсцисс $x(t) = B(t)\cos\Phi(t))$, тогда $B(t)$ и $\Phi(t)$ – амплитуда и фаза исходного сигнала $x(t)$. Один из способов определения вектора $Z(t)$ состоит в следующем: $Z(t) = x(t) + iy(t)$, $y(t) = H[x(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)x(\tau)d\tau$, $H(t) = \frac{1}{\pi t}$ – преобразование Гильберта, тогда $B(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, $\Phi(t) = \operatorname{arctg}(y(t)/x(t))$. Следует отметить, что при $x(t) = C\sin\omega t$ $B(t) = C$ и $\Phi(t) = \omega t$. Такой подход позволяет рассчитывать амплитуду и фазу произвольного вещественного сигнала, в том числе и двухчастотного, в зависимости от времени. В данной работе таким способом вычислялись фазы азимутальной компоненты скорости u_φ в каждой точке слоя $\Psi(t,r,\theta)$ и фаза вращения колеблющейся сферы $\Psi_s(t)$. В работе [5] показано, что описанный метод анализа структуры течения позволяют адекватно воспроизводить полученные ра-

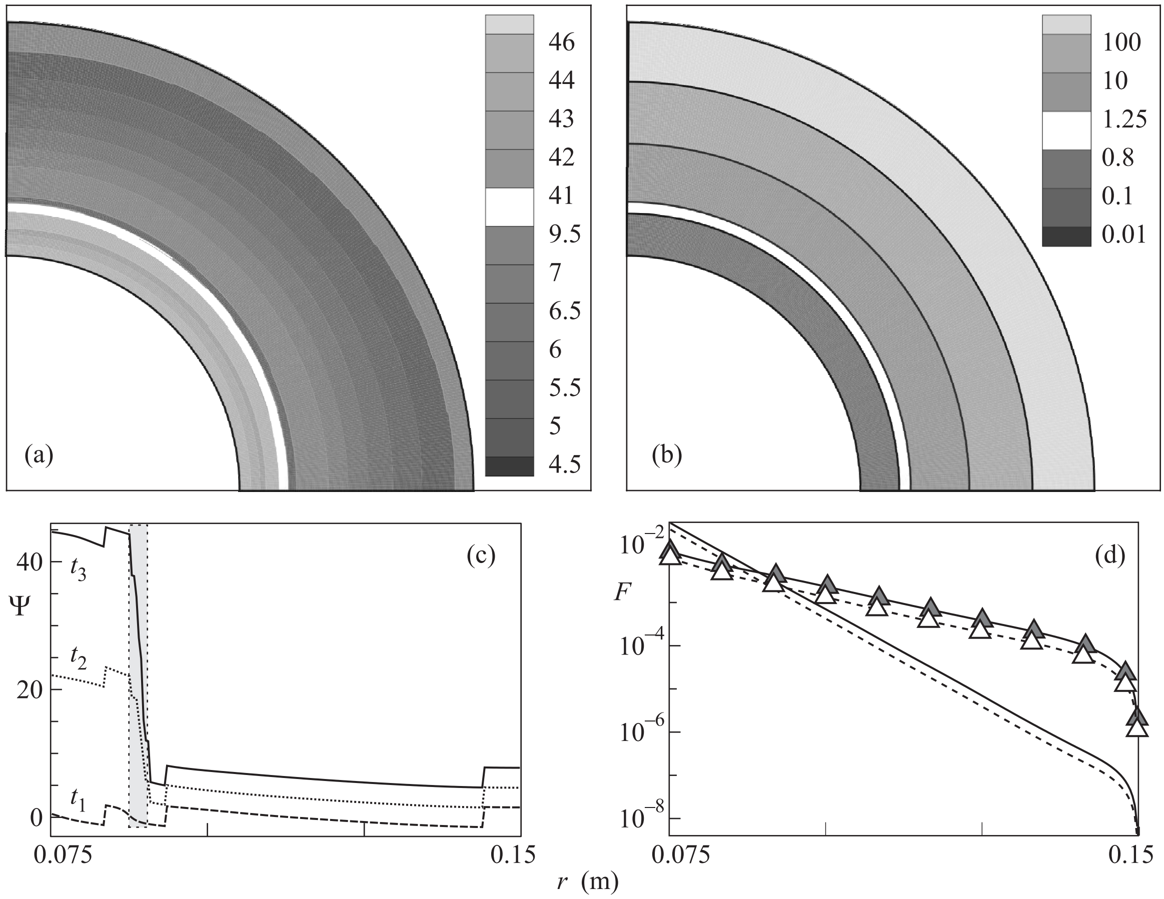

Рис. 2. Двухчастотные колебания внутренней сферы $A_1 = 1\,\text{с}^{-1}$, $f_1 = 0.5\,\text{с}^{-1}$, $A_2 = 0.2\,\text{с}^{-1}$, $f_2 = 0.07\,\text{с}^{-1}$. (a) – Волновые поверхности в $\Psi(t_3, r, \theta)$. (b) – Отношение амплитуд низкочастотной и высокочастотной мод $F_2(r,\theta)/F_1(r,\theta)$. (c) – Зависимость фазы колебаний Ψ от радиуса в плоскости экватора для трех моментов времени, переходный слой выделен серым цветом. (d) – Зависимости от радиуса амплитуд $F_{1,2}$ $(r, \theta = \pi/2)$ (сплошные линии) и $F_{1,2}$ $(r, \theta = \pi/4)$ (пунктирные линии), F_1 – без символов, F_2 – с символами

нее в экспериментах и численных расчетах инерционные волны. Там же показано, что при гармонических колебаниях внутренней сферы с небольшими амплитудами образуются сферические волны, затухающие в радиальном направлении (рис. 1a, взят из [5]).

Расстояние между скачками фазы вдоль радиусов совпадает с половиной длины волны λ, рассчитанной так же, как и длина волны в задаче Стокса, задаче о течении, вызванном гармоническими колебаниями бесконечной пластины с частотой f, $\lambda = 2\pi\delta = 2\pi\sqrt{\frac{\nu}{\pi f}}$ [19], здесь δ – толщина динамического пограничного слоя. При увеличении амплитуды колебаний сферы течение усложняется (рис. 1b, взят из [5]), появляются волновые поверхности, заканчивающиеся на внешней границе, и узлы, в которых азимутальная компонента течения всегда равна нулю.

Скорость вращения внутренней сферы $\Omega(t)$ (индекс 1 опущен, т.к. в данной работе $\Omega_2(t) = 0$) изменялась по закону $\Omega(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t)$, $i = 1$ относится к высокочастотной моде колебаний, $i = 2$ – к низкочастотной, $f_2 < f_1$, $A_2 < A_1$. Во всех случаях сигнал скорости вращения внутренней сферы представлял собой высокочастотный несущий сигнал ($f_1 = 0.5\,\text{с}^{-1}$, $A_1 = 1,\ 5\,\text{с}^{-1}$) с малоамплитудной низкочастотной огибающей ($A_2 = 0.2\,\text{с}^{-1}$), величина f_2 варьировалась от $0.0279\,\text{с}^{-1}$ до $0.1117\,\text{с}^{-1}$. Расчеты проводились в размерных величинах: $r_1 = 0.075\,\text{м}$, $r_2 = 0.15\,\text{м}$, $(\sigma = (r_2 - r_1)/r_1 = 1)$, $\nu = 5 \cdot 10^{-5}\,\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, соответствующих нашим более ранним экспериментам и расчетам при модуляции скорости вращения одной из сфер [15, 17]. При рассматриваемых параметрах течение является нестационарным и осесимметричным, в спектре азимутальной скорости отсутствуют какие-либо частоты, кроме f_1 и f_2. В качестве безразмерных параметров используются относительная толщина слоя σ, относительные толщины динамического пограничного слоя и максимальные углы отклонения сферы, рассчитанные по параметрам каждой из гармоник A_i и f_i: $\frac{\delta_i}{r_1} = \frac{1}{r_1}\sqrt{\frac{\nu}{\pi f_i}}$, $\gamma_i = \frac{A_i}{2\pi f_i}$ $(i = 1, 2)$.

3. Результаты. Рассмотрим структуру течения при малоамплитудных двухчастотных колебаниях внутренней границы. Амплитуды полагаем малыми в тех случаях, когда при гармонических колебаниях внутренней сферы на каждой из частот образуются сферические волны, распространяющиеся в радиальном направлении (рис. 1a, c). При гармонических колебаниях внутренней сферы $\Omega(t) = A\sin(2\pi f t)$ сдвиг фазы $\psi_0(r,\theta)$ в точке с координатами (r,θ) по отношению к фазе колебаний границы $\psi_0(r,\theta) = \Psi(t,r,\theta) - \Psi_s(t)$, $(\Psi_s(t) = 2\pi f t)$ не зависит от времени [5]. Контуры $\psi_0(r,\theta)$ для высокочастотной при $\frac{\delta_1}{r_1} = 7.47e-2$, $\gamma_1 = 0.318$ ($A_1 = 1\,\text{c}^{-1}$, $f_1 = 0.5\,\text{c}^{-1}$) и низкочастотной $\frac{\delta_2}{r_1} = 0.2$, $\gamma_2 = 0.45$ ($A_2 = 0.2\,\text{c}^{-1}$, $f_2 = 0.07\,\text{c}^{-1}$) мод приведены на рис. 1a, c. На рис. 2a показаны волновые поверхности $\Psi(t_3,r,\theta)$ в некоторый момент времени t_3 (показан на рис. 3c) при двухчастотных колебаниях внутренней границы с приведенными выше параметрами. Это также сферическая волна, но сферический слой в этом случае можно разделить на три подслоя: прилегающий к внутренней сфере, в котором $\Psi(t_3,r,\theta) > 41$; прилегающий к внешней сфере подслой, в котором $\Psi(t_3,r,\theta) < 9.5$; и узкий переходный слой (показан на рис. 2a белым цветом) с большим градиентом фазы $9.5 < \Psi(t_3,r,\theta) < 41$, причем этот градиент растет с ростом времени (на рис. 2c представлена зависимость фазы колебаний от радиуса в плоскости экватора для трех моментов времени, переходный слой выделен серым цветом). Можно ввести эффективную частоту $\tilde{f}(r,\theta)$, определяемую как $2\pi\tilde{f}(t_2 - t_1) = \Psi(t_2,r,\theta) - \Psi(t_1,r,\theta)$, тогда при рассматриваемых параметрах колебаний во внутреннем подслое $\tilde{f} \cong f_1$; во внешнем – $\tilde{f} \cong \tilde{f}_2$; в переходном – $f_2 < \tilde{f} < f_1$. На рис. 3a–c представлены в зависимости от времени нормированная азимутальная компонента скорости $u_\varphi/|u_{\varphi\,\max}|$, фаза $\Psi(t,r,\theta)$ и ее линейная аппроксимация в трех точках, лежащих в каждом подслое. Видно, что в зависимости от характера изменения $u_\varphi(t)$ меняется и скорость роста фазы, т.е, эффективная частота $\tilde{f}(r,\theta)$. Причем чем ближе зависимость скорости от времени к гармоническим колебаниям, тем ближе зависимость $\Psi(t,r,\theta)$ к линейной функции времени, а $\tilde{f}(r,\theta)$ к частоте гармонических колебаний.

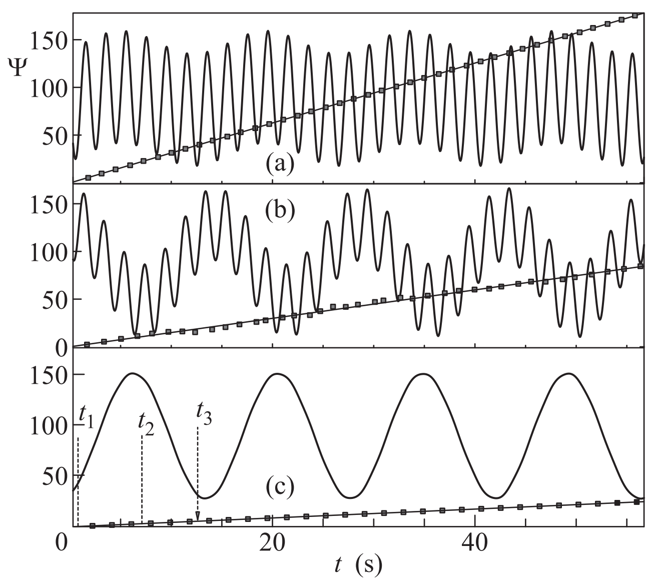

Рис. 3. Двухчастотные колебания внутренней сферы $A_1 = 1\,\text{c}^{-1}$, $f_1 = 0.5\,\text{c}^{-1}$, $A_2 = 0.2\,\text{c}^{-1}$, $f_2 = 0.07\,\text{c}^{-1}$. Зависимости от времени $u_\varphi/|u_{\varphi\,\max}|$ (синусоиды), Ψ (квадратные символы), и линейные аппроксимации Ψ (прямые линии) при $\theta = \pi/2$: (a) – точка во внутреннем подслое $r = 0.0752$ м; (b) – в переходном подслое $r = 0.090$ м; (c) – во внешнем подслое $r = 0.132$ м

Если рассчитать амплитуды высокочастотной F_1 и низкочастотной F_2 мод колебаний в каждой точке слоя с помощью преобразования Фурье, то окажется, что переходный слой совпадает с областью, в которой они близки по величине $0.8 < F_2/F_1 < 1.25$ (рис. 2b). На рис. 2d показаны зависимости F_1 и F_2 от радиуса при двух значениях меридионального угла на экваторе и под углом 45° к оси вращения. На большей части толщины слоя амплитуды F_1 и F_2 убывают экспоненциально: $\exp(-kr)$, причем декремент затухания k не зависит от меридионального угла. Чем больше частота колебаний, тем больше декремент k ($k_1 = 184.5\,\text{м}^{-1}$, $k_2 = 75.24\,\text{м}^{-1}$) и тем быстрее затухает соответствующая мода. В результате вблизи внутренней сферы больший вклад в течение дает высокочастотная мода, но она быстрее затухает, и после переходного слоя, где амплитуды мод выравниваются, больший вклад дает низкочастотная мода. Отношения амплитуд и зависимости амплитуд от радиуса (рис. 2b, d) совпадают для рассматриваемых двухчастотных колебаний и для двух гармонических колебаний внутренней сферы (рис. 1a, c), таким образом, при двухчастотных малоамплитудных колебаниях моды не взаимодействуют.

Рассмотрим, каким образом изменяется структура течения в том случае, когда при неизменных ча-

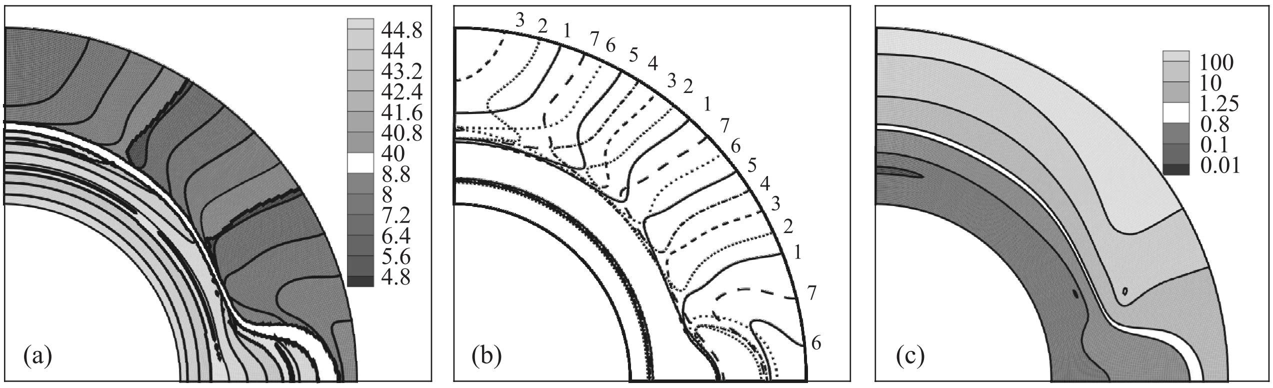

Рис. 4. Двухчастотные колебания внутренней сферы $A_1 = 5\,\mathrm{c}^{-1}$, $f_1 = 0.5\,\mathrm{c}^{-1}$, $A_2 = 0.2\,\mathrm{c}^{-1}$, $f_2 = 0.07\,\mathrm{c}^{-1}$. (a) – Волновые поверхности в $\Psi(t_{\max}, r, \theta)$. (b) – Контурные линии $u_\varphi = 0$ в разные моменты времени. (c) – Отношение амплитуд низкочастотной и высокочастотной мод $F_2(r,\theta)/F_1(r,\theta)$

стотах обеих мод в сигнале скорости вращения сферы увеличивается амплитуда только высокочастотной моды, а амплитуда низкочастотной не меняется. Структура течения при $\frac{\delta_1}{r_1} = 7.47e-2$, $\gamma_1 = 1.59$, $\frac{\delta_2}{r_1} = 0.2$, $\gamma_2 = 0.45$, т.е при увеличении амплитуды высокочастотной моды в пять раз по сравнению с течением, представленным на рис. 2a, показано на рис. 4a. Деление сферического слоя на три области сохраняется. Первая прилегает к внутренней сфере, но теперь ее граница имеет выступ вблизи плоскости экватора. Волновые поверхности вблизи внутренней сферы представляют собой окружности, но, начиная с некоторого меридионального угла, эта область расширяется. В этой области колебания во времени происходят с эффективной частотой, близкой к f_1. Область, примыкающая к внешней сфере, характеризуется не только колебаниями с частотой, близкой к f_2, но и изменением направления распространения волн – от радиального направления к меридиональному. Волновые поверхности в этой области ориентированы почти перпендикулярно к внешней сфере. На рис. 5a представлена зависимость $\Psi(t, r, \theta)$ от угла θ вдоль внешней сферы в разные моменты времени. Отметим, что вдоль меридионального угла скачки $\Psi(t, r, \theta)$ не меняют своего положения, и расположены неравномерно. На рис. 4b представлены контуры нулевых значений u_φ в разные моменты времени (моменты времени показаны на рис. 5b). Видно, что в первой, внутренней, области эти контуры близки к окружностям, в то время как во внешней – контуры выстраиваются в радиальном направлении. Сравнение изображений на рис. 4a, b свидетельствует о том, что вид волновых структур полностью соответствует полю скорости. И третья, узкая переходная область между первыми двумя, в которой $f_2 < \tilde{f} < f_1$ (рис. 4a).

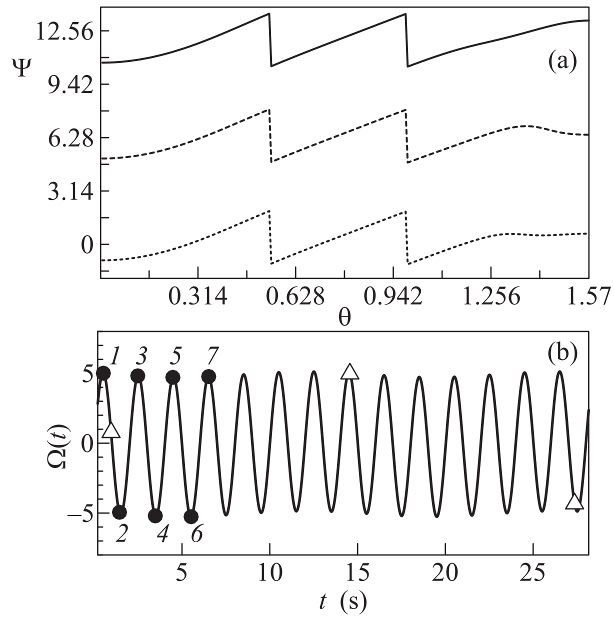

Рис. 5. Двухчастотные колебания внутренней сферы $A_1 = 5\,\mathrm{c}^{-1}$, $f_1 = 0.5\,\mathrm{c}^{-1}$, $A_2 = 0.2\,\mathrm{c}^{-1}$, $f_2 = 0.07\,\mathrm{c}^{-1}$. (a) – Зависимость $\Psi(t, r, \theta)$ от угла θ вдоль внешней сферы в моменты времени, показанные на рис. b треугольными прозрачными символами. (b) – Зависимость $\Omega_1(t)$, черные символы показывают моменты времени, использованные при построении контуров u_φ на рис. 4b

И опять переходная область совпадает с областью, в которой амплитуды высокочастотной F_1 и низкочастотной F_2 мод, рассчитанные с помощью преобразования Фурье, близки по величине (рис. 4c). Зависимости F_1 и F_2 от радиуса в этом случае показаны на рис. 6a. На рис. 6b представлены F_1 и F_2, рассчитанные при гармонических колебаниях сферы с параметрами высокочастотной ($A = 5\,\mathrm{c}^{-1}$, $f =$

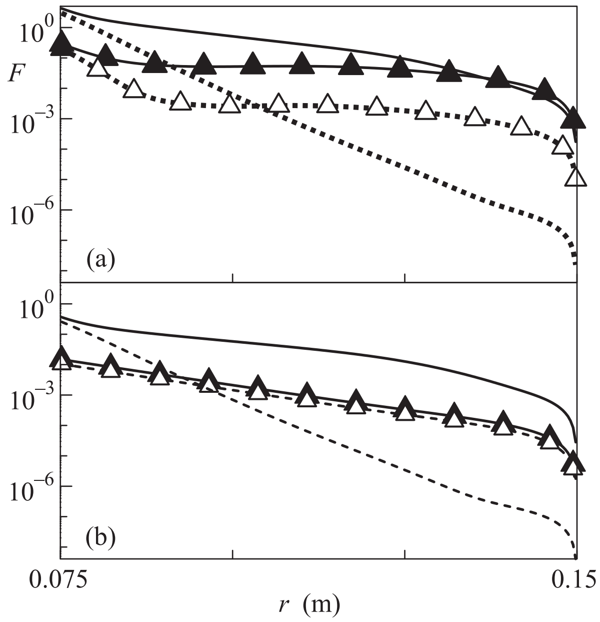

Рис. 6. Зависимости от радиуса амплитуд высокочастотной F_1 (черные линии) и низкочастотной F_2 (серые) мод в плоскости экватора $\theta = \pi/2$ – сплошные линии и при $\theta = \pi/4$ – пунктирные линии. (a) – Двухчастотные колебания внутренней сферы. (b) – Гармонические колебания внутренней сферы с параметрами высокочастотной и низкочастотной мод

$= 0.5\,\text{с}^{-1}$) и низкочастотной ($A = 0.2\,\text{с}^{-1}$, $f = 0.07\,\text{с}^{-1}$) мод. При $A_1 = 5\,\text{с}^{-1}$ высокочастотные колебания уже нельзя рассматривать как малоамплитудные, меняется структура волновых поверхностей (сравнить рис. 1a, b).

Величина декремента, определяемая по зависимости $F_1(r)$ (рис. 6b) зависит от меридионального угла. В плоскости экватора $k_1(\pi/2) = 63.6\,\text{м}^{-1}$ почти в три раза меньше, чем при малоамплитудных колебаниях $k_1 = 184.5\,\text{м}^{-1}$ (рис. 2d), а при угле 45° декремент существенно превышает последний $k_1(\pi/4) = 233.9\,\text{м}^{-1}$. И если зависимости $F_1(r)$ практически совпадают на рис. 6a, b, то зависимости $F_2(r)$ разные. На рис. 6a вблизи внутренней сферы декремент зависит от величины меридионального угла, а в средней по радиусу части слоя величина декремента близка к нулю. Таким образом, при рассмотренных двухчастотных колебаниях внутренней сферы наблюдается не только усиление низкочастотной моды, но и изменение направления ее распространения от экватора к полюсу вдоль внешней сферы. Сохраняется разделение мод в пространстве: низкочастотная волна распространяется в области прилегающей к внешней сфере, высокочастотная в прилегающей к внутренней сфере области.

Аналогичную картину можно наблюдать в широком диапазоне изменения частоты f_2. На рис. 7 представлены распределения $\Psi(t, r, \theta)$ в меридиональной плоскости и F_2/F_1 в зависимости от радиуса для двух других значений f_2: $f_2 = 0.028\,\text{с}^{-1}$ ($\lambda_2 = 2(r_2 - r_1)$) и $f_2 = 0.1117\,\text{с}^{-1}$ ($\lambda_2 = r_2 - r_1$). Значения частот выбирались так, чтобы в сферическом зазоре укладывалось целое число полудлин волн. Но никаких резонансных эффектов, связанных с таким выбором частот, обнаружить не удалось.

4. Обсуждение результатов. Усиление низкочастотной моды в течении при увеличении амплитуды высокочастотной моды в сигнале скорости вращения можно рассматривать как передачу энергии от меньших масштабов к большим в процессе нелинейного взаимодействия мод. Передача энергии от меньших масштабов к большим напоминает процессы в квазидвумерной турбулентности. Характерный для квазидвумерной турбулентности обратный каскад передачи энергии наблюдался ранее в сферическом слое при периодической модуляции скорости вращения внутренней сферы [17] в диапазоне частот, ограниченном снизу частотой модуляции, а сверху – частотой вращения сферы. Существенное отличие течения, формирующегося при двухчастотных колебаниях внутренней границы относительно состояния покоя от рассмотренного в [17] состоит в отсутствии как среднего течения в азимутальном направлении, так и каких-либо неустойчивостей. Общим свойством указанных течений является присутствие осредненной крупномасштабной меридиональной циркуляции. В нашем случае это одновихревая циркуляция, направленная от полюсов к экватору вдоль внутренней сферы.

При малоамплитудных колебаниях меридиональная циркуляция малоинтенсивна. Обе моды ведут себя так же, как при соответствующих гармонических колебаниях (рис. 2d), т.е. взаимодействие между модами отсутствует. В силу различия в величине декрементов затухания наблюдается разделение на зоны влияния: высокочастотная мода преобладает вблизи источника колебаний – вблизи внутренней сферы, низкочастотная – на удалении от источника колебаний, вблизи внешней сферы, линия раздела совпадает с линией равных амплитуд мод (рис. 2b). С увеличением амплитуды высокочастотной моды в сигнале скорости сферы интенсивность циркуляции увеличивается на порядок, радиальная скорость в области экватора на два порядка, а экваториальная струя разворачивается вблизи экватора внешней сферы, об этом свидетельствуют волновые поверхности, например, на рис. 1b, 4a. Такое интенсивное течение в мери-

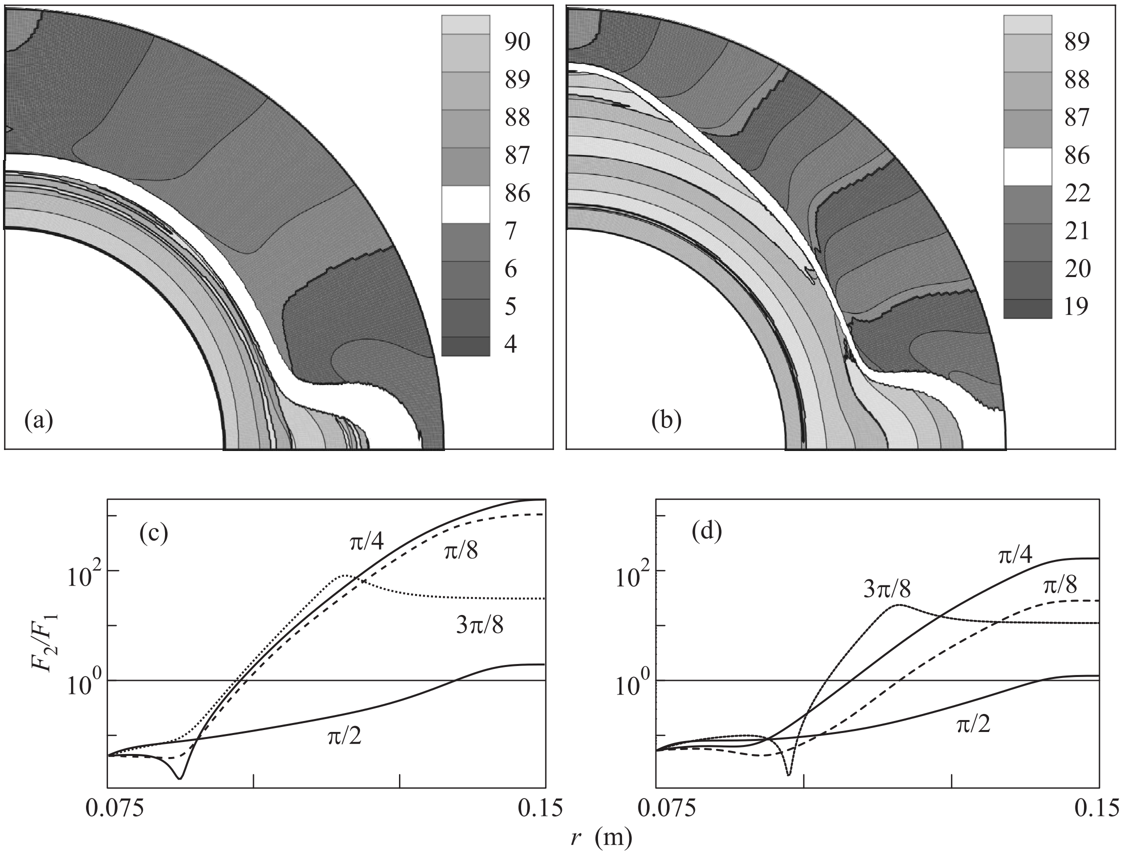

Рис. 7. Волновые поверхности в $\Psi(t_{\max}, r, \theta)$ (a, b) и отношения амплитуд F_2/F_1 (c, d) при двухчастотных колебания внутренней сферы. (a, c) – $A_1 = 5\,\text{c}^{-1}$, $f_1 = 0.5\,\text{c}^{-1}$, $A_2 = 0.2\,\text{c}^{-1}$, $f_2 = 0.028\,\text{c}^{-1}$. (b, d) – $A_1 = 5\,\text{c}^{-1}$, $f_1 = 0.5\,\text{c}^{-1}$, $A_2 = 0.2\,\text{c}^{-1}$, $f_2 = 0.1117\,\text{c}^{-1}$

диональной плоскости существенным образом изменяет декременты затухания азимутальной компоненты скорости. Вблизи плоскости экватора декременты существенно уменьшаются (рис. 6а): в область, прилегающую к внешней сфере, быстро переносится жидкость, получившая большую кинетическую энергию вблизи внутренней сферы. Но вблизи внешней сферы преобладает низкочастотная мода, и именно она усиливается.

Это позволяет сделать вывод об определяющей роли циркуляции в меридиональной плоскости в процессе передачи энергии от меньших масштабов к большим. В том числе и усиление низкочастотной моды происходит благодаря интенсивной меридиональной циркуляции, которая, в свою очередь, возрастает при увеличении амплитуды любой из мод в сигнале скорости. Отличительной особенностью меридиональной циркуляции является ее наличие в любом течении, ограниченном вращающимися сферическими границами: в широких и очень тонких слоях, при вращении только внутренней границы и однонаправленном вращении обеих сферических границ. Присутствует крупномасштабная меридиональная циркуляция и в атмосфере Земли [20]. А поскольку эффект усиления низкочастотной моды происходит, как отмечено выше, благодаря интенсивной циркуляции, то он должен присутствовать и при очень быстром вращении сферических границ, а его количественные параметры будут определяться в том числе интенсивностью циркуляции. Это дает основания предполагать, что рассматриваемое в данной работе усиление низкочастотной моды может в том или ином виде проявляться в крупномасштабных течениях внутри Земли, в океанах и атмосфере Земли и других планет.

5. Выводы. Результаты проведенных численных исследований показали, что при двухчастотных вращательных колебаниях внутренней сферы относительно состояния покоя течение в сферическом слое делится на две области. Вблизи внутренней сферы преобладает высокочастотная мода, вблизи внешней – низкочастотная мода. Положение границы между областями постоянно во времени и совпадает с линией равных амплитуд колебаний на каждой из мод. При малых амплитудах волны сферические, как и в случае периодических колебаний, с перпендикулярными радиусу волновыми поверхностями.

С увеличением амплитуды высокочастотной моды в сигнале скорости сферы деление течения на две области сохраняется, но меняется как волновая структура течения, так и соотношение амплитуд низкочастотной и высокочастотной мод. В области, граничащей с внешней сферой, направление распространения волны меняется с радиального на меридиональное, и увеличивается отношения амплитуды низкочастотной моды к высокочастотной. Рассматриваемое явление представляет собой передачу энергии от высокочастотных колебаний скорости с большей амплитудой к низкочастотной моде с меньшей амплитудой. Обмен энергией между модами происходит с участием меридиональной циркуляции, нестационарное течение при этом остается устойчивым. Превышение амплитуды низкочастотной моды над амплитудой высокочастотной моды возрастает с уменьшением низкой частоты и существенно зависит от меридионального угла, увеличиваясь на два порядка по мере удаления от экватора к полюсу.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты # 14-08-00204 и 16-05-00004.

---

1. J. Noir, E. Hemmerlin, J. Wicht, S.M. Baca, and J.M. Aurnou, Phys. Earth and Plan. Interiors **173**, 141 (2009).
2. P.A. Sturrock, J.B. Buncher, E. Fischbach, J.T. Gruenwald, D. Javorsek, J.H. Jenkins, R.H. Lee, J.J. Mattes, and J.R. Newport, Solar Phys. **267**, 251 (2010).
3. G. Bryan, Phil. Trans. Lond. **180**, 187 (1889).
4. C. Staquet and J. Sommeria, Annu. Rev. Fluid Mech. **34**, 559 (2002).
5. Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Докл. РАН **464**(4), 417 (2015).
6. Н.С. Сидоренков, Вестник РАН **74**(8), 701 (2004).
7. O.M. Phillips, J. Fluid Mech. **106**, 215 (1981).
8. В.Е. Захаров, Р.В. Шамин, Письма в ЖЭТФ **91**(2), 68 (2010).
9. Т.Г. Талипова, Е.Н. Пелиновский, К. Хариф, Письма в ЖЭТФ **94**(3), 199 (2011).
10. Ю.А. Степанянц, А.Л. Фабрикант, УФН **159**(1), 83 (1989).
11. B. Kibler, A. Chabchoub, A. Gelash, N. Akhmediev, and V.E. Zakharov, Phys. Rev. X **5**, 041026 (2015).
12. В.А. Зверев, Акуст. журн. **45**(5), 685 (1999).
13. C.M. Hedberg, K.C.E. Haller, and T. Kamakura, Acoustical Physics **56**(5), 637 (2010).
14. N. Nikitin, J. Comp. Phys. **217**(2), 759 (2006).
15. Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖТФ **41**(1), 12 (2015).
16. Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Н.В. Никитин, Изв. РАН, МЖГ **6**, 38 (2007).
17. Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖЭТФ **101**(8), 583 (2015).
18. А.Л. Зиновьев, Л.И. Филиппов, *Введение в теорию сигналов и цепей*, Высшая школа, М. (1975).
19. Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, *Теоретическая физика, Гидродинамика*, Наука, М. (1986), т. 6.
20. A.E. Gill, *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Academic Press, Cambridge (1982).