Письма в ЖЭТФ, том 105, вып. 2, с. 57 – 61

NSVZ-подобная схема для массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N}=1$ СКЭД, регуляризованной высшими производными

И. В. Нарцев, К. В. Степаньянц[1)]

МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра теоретической физики, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 декабря 2016 г.

В случае использования регуляризации высшими производными мы строим схему вычитаний, которая дает NSVZ-подобное соотношение для аномальной размерности массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N}=1$ СКЭД с N_f ароматами во всех петлях. Соответствующее перенормировочное предписание определяется простыми граничными условиями, накладываемыми на константы перенормировки. Оно позволяет зафиксировать произвол в выборе конечных контрчленов в каждом порядке теории возмущений таким образом, чтобы ренормгрупповые функции, определенные в терминах перенормированной константы связи, удовлетворяли NSVZ-подобному соотношению.

DOI: 10.7868/S0370274X17020011

1. Введение. Важной формулой, связывающей β-функцию и аномальную размерность киральных суперполей материи в $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теориях, является β-функция Новикова, Шифмана, Вайнштейна и Захарова (NSVZ) [1–4]. Она дает точную β-функцию в виде геометрической прогрессии для чистой $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса (СЯМ) и может быть использована для доказательства конечности $\mathcal{N}=2$ СЯМ вне рамок однопетлевого приближения [5–7]. Поэтому NSVZ β-функция тесно связана с теоремами о неперенормировке в теориях с расширенной суперсимметрией. Для $\mathcal{N}=1$ суперсимметричной квантовой электродинамики (СКЭД) с N_f ароматами NSVZ соотношение имеет вид [8, 9]

$$\widetilde{\beta}(\alpha)=\frac{\alpha^2 N_f}{\pi}\Big(1-\widetilde{\gamma}(\alpha)\Big), \tag{1}$$

где α обозначает перенормированную константу связи, а $\widetilde{\gamma}(\alpha)$ – аномальную размерность киральных суперполей материи. При этом тильды указывают, что ренормгрупповые функции определяются в терминах перенормированной константы связи (см. формулу (13) ниже). NSVZ-подобная формула может быть также написана для теорий с мягко нарушенной суперсимметрией [10–12], где она связывает перенормировку массы калибрино с перенормировкой жесткой теории равенством [10]:

$$\frac{\alpha m}{\widetilde{\beta}(\alpha)}=\text{РГИ}, \tag{2}$$

где m – масса калибрино, а РГИ означает, что это выражение является ренормгрупповым (РГ) инвариантом (И).

В этой работе мы будем рассматривать мягко нарушенную $\mathcal{N}=1$ СКЭД с N_f ароматами. В этом случае с помощью (1) можно представить формулу (2) в виде соотношения между аномальной размерностью массы фотино и аномальной размерностью суперполей материи:

$$\widetilde{\gamma}_m(\alpha)=\frac{\alpha N_f}{\pi}\Big[1-\frac{d}{d\alpha}\Big(\alpha\widetilde{\gamma}(\alpha)\Big)\Big], \tag{3}$$

где $\widetilde{\gamma}_m(\alpha)$ — аномальная размерность массы фотино. Вновь используя (1), это соотношение можно эквивалентно переписать как

$$\frac{d}{d\ln\mu}\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)=-\frac{m\alpha N_f}{\pi}\frac{d\widetilde{\gamma}(\alpha)}{d\alpha}. \tag{4}$$

Этот результат можно соединить с (1) в NSVZ-подобную формулу:

$$\frac{d}{d\ln\mu}\Big(\frac{1}{(1+2m\theta^2)\alpha}\Big)=-\frac{N_f}{\pi}\Big[1-\widetilde{\gamma}\Big((1+2m\theta^2)\alpha\Big)\Big]. \tag{5}$$

Следовательно, формулы (1) и (4) имеют сходную природу, которую можно выявить с использованием шпурионной техники [13–17]. Например, формулу (5) можно получить, применив утверждение из работы [12], которое было выведено с помощью этого метода.

Хотя NSVZ и NSVZ-подобные формулы хорошо известны, их получение с помощью явного суммирования суперграфов является сложной задачей. В настоящее время она была решена только в абелевом случае с помощью регуляризации высшими

[1)]e-mail: stepan@m9com.ru

производными [18, 19] в суперсимметричном варианте [20, 21][2]. При использовании этой регуляризации NSVZ соотношение в абелевом случае получается для РГ-функций, определенных в терминах голой константы связи, во всех порядках [24, 25]. Заметим, что этот результат справедлив для произвольной схемы вычитаний, поскольку РГ-функции, определенные в терминах голой константы связи, являются схемно-независимыми при фиксированной регуляризации [26]. NSVZ-подобные соотношения для таких РГ-функций также были доказаны во всех порядках для D-функции Адлера [27] в $\mathcal{N}=1$ СКХД [28, 29] и для аномальной размерности массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N}=1$ СКЭД [30]. Все эти NSVZ и NSVZ-подобные соотношения появляются благодаря факторизации петлевых интегралов в интегралы от (двойных) полных производных в пределе нулевого внешнего импульса [31, 32][3]. Для различных неабелевых теорий факторизация в двойные полные производные была проверена в низших петлях [6, 7, 36–39], но пока еще не выведена во всех порядках. Однако в данной работе мы рассматриваем абелев случай, для которого соотношения

$$\beta(\alpha_0)=\frac{\alpha_0^2N_f}{\pi}\Big(1-\gamma(\alpha_0)\Big);\qquad \frac{d}{d\ln\Lambda}\Big(\frac{m_0}{\alpha_0}\Big)=-\frac{m_0\alpha_0N_f}{\pi}\frac{d\gamma(\alpha_0)}{d\alpha_0} \tag{6}$$

были строго доказаны во всех порядках для мягко нарушенной $\mathcal{N}=1$ СКЭД с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными. В (6) α_0 – голая константа связи. Эти схемно-независимые формулы связывают РГ-функции, определенные в терминах голой константы связи. Заметим, что первая формула в (6) была проверена явными трехпетлевыми вычислениями в работе [40].

Однако РГ-функции стандартно определяются в терминах перенормированной константы связи. В этом случае они зависят от схемы вычитаний. В частности, можно проверить, что NSVZ соотношение также схемно зависимо[4]. Если (мягко нарушенные) суперсимметричные теории регуляризованы размерной редукцией, NSVZ (или NSVZ-подобная) схема может быть получена из $\overline{\text{DR}}$-схемы с помощью конечной перенормировки, которая должна подстраиваться в каждом порядке [44–51]. Для абелевых жестких теорий, регуляризованных высшими производными, NSVZ схема получается с помощью наложения простых граничных условий:

$$Z_3(\alpha,x_0)=1;\quad Z(\alpha,x_0)=1 \tag{7}$$

на константы перенормировки заряда и суперполей материи соответственно [26, 42, 43]. В (7) x_0 – это фиксированное значение $x\equiv\ln\Lambda/\mu$, где Λ — размерный параметр регуляризованной теории (который работает как ультрафиолетовое обрезание), а μ – точка нормировки. (Аналогичные условия для неабелевого случая обсуждаются в [52].) При наложении условий (7) β-функция и аномальная размерность суперполей материи удовлетворяют равенству (1) во всех порядках.

В этой работе мы строим граничные условия, аналогичные (7), при которых формула (3) (или, эквивалентно, (4) или (5)) справедлива во всех петлях для мягко нарушенной $\mathcal{N}=1$ СКЭД с N_f ароматами.

2. NSVZ-подобная схема для мягко нарушенной $\mathcal{N}=1$ СКЭД. Для жесткой $\mathcal{N}=1$ СКЭД в терминах голой константы связи РГ-функции определяются в соответствии с предписанием

$$\beta(\alpha_0)\equiv\frac{d\alpha_0}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha=\text{const}};\qquad \gamma(\alpha_0)\equiv-\frac{d\ln Z}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha=\text{const}}, \tag{8}$$

где Z – константа перенормировки для суперполей материи, $\phi=\sqrt{Z}\phi_R$. β-функция также может быть выражена через константу перенормировки $Z_3\equiv\alpha/\alpha_0$,

$$\beta(\alpha_0)=-\alpha_0\frac{d\ln Z_3}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha=\text{const}}. \tag{9}$$

В мягко нарушенной теории мы также определяем аномальную размерность массы фотино:

$$\gamma_m(\alpha_0)\equiv\frac{d\ln m_0}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha,m=\text{const}}=-\frac{d\ln Z_m}{d\ln\Lambda}\Big|_{\alpha=\text{const}}=\frac{\alpha_0}{m_0}\frac{d}{d\ln\Lambda}\Big(\frac{m_0}{\alpha_0}\Big)+\frac{\beta(\alpha)}{\alpha_0}, \tag{10}$$

где $Z_m\equiv m/m_0$ – константа перенормировки массы фотино. Чтобы доказать схемную независимость аномальной размерности массы фотино (10), мы рассматриваем часть двухточечной функции Грина калибровочного суперполя $\mathbf{V}$, соответствующую массе

[2] Указанная регуляризация также включает добавление детерминантов Паули–Вилларса для регуляризации однопетлевых расходимостей [22, 23].

[3] В случае использования размерной редукции [33] этот предел является плохо определенным. Поэтому факторизация в двойные полные производные в данном случае не имеет место [34], а РГ-функции, определенные в терминах голой константы связи, не удовлетворяют NSVZ соотношению [35].

[4] Общие формулы, описывающие, как NSVZ соотношение меняется при конечных перенормировках, представлены в работах [41–43].

фотино. В пределе, когда внешний импульс p много больше всех масс, рассматриваемая часть двухточечной функции Грина калибровочного суперполя может быть записана как

$$\frac{m_0}{128\pi}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}d^4\theta\,\Big(\theta^2 D^a\mathbf{V}(-p,\theta)\,\bar{D}^2 D_a\mathbf{V}(p,\theta)+ \bar\theta^2\bar{D}^{\dot a}\mathbf{V}(-p,\theta)\,D^2\bar{D}_{\dot a}\mathbf{V}(p,\theta)\Big)d_m^{-1}(\alpha_0,\Lambda/p), \tag{11}$$

где d_m – безразмерная функция. Тогда, в соответствии с определением константы перенормировки Z_m, произведение $Z_m d_m(\alpha_0(\alpha,\Lambda/\mu),\Lambda/p)$ должно быть конечным в пределе $\Lambda\to\infty$. Дифференцируя логарифм рассматриваемого произведения по $\ln\Lambda$, мы выражаем $\gamma_m(\alpha_0)$ через функцию $d_m(\alpha_0,\Lambda/p)$,

$$\gamma_m(\alpha_0)=\lim_{p\to 0}\Big(\frac{\partial\ln d_m(\alpha_0,\Lambda/p)}{\partial\alpha_0}\beta(\alpha_0)- -\frac{\partial\ln d_m(\alpha_0,\Lambda/p)}{\partial\ln p}\Big). \tag{12}$$

Заметим, что предел $p\to 0$ необходим для того, чтобы избавиться от членов, пропорциональных $(p/\Lambda)^n$, где n – положительное целое число. Функция $d_m(\alpha_0,\Lambda/p)$, очевидно, является схемно-независимой, поскольку она получается с помощью вычисления эффективного действия до перенормировки. Схемная независимость функции $\beta(\alpha_0)$ была доказана в работе [26]. Поэтому правая часть формулы (12) также является схемно-независимой, а это означает, что аномальная размерность $\gamma_m(\alpha_0)$ (определенная в терминах голой константы связи) не зависит от перенормировочного предписания, но зависит от регуляризации.

РГ функции (8), (10) следует отличать от соответствующих РГ-функций, (стандартно) определяемых в терминах перенормированной константы связи [53]:

$$\begin{aligned}\widetilde\beta(\alpha)&\equiv\frac{d\alpha}{d\ln\mu}\Big|_{\alpha_0=\mathrm{const}};\\ \widetilde\gamma(\alpha)&\equiv\frac{d\ln Z}{d\ln\mu}\Big|_{\alpha_0=\mathrm{const}};\\ \widetilde\gamma_m(\alpha)&\equiv\frac{d\ln m}{d\ln\mu}\Big|_{\alpha_0,m_0=\mathrm{const}}.\end{aligned} \tag{13}$$

Основное наблюдение, которое позволило построить NSVZ схему для жесткой $\mathcal{N}=1$ СКЭД, регуляризованной высшими производными, является то, что β-функция и аномальная размерность, определенные в терминах голой константы связи и определенные в терминах перенормированной константы связи, совпадают [26], если на константы перенормировки накладываются граничные условия (7). Действительно, в соответствии с работами [24, 25], первые РГ-функции удовлетворяют NSVZ соотношению вне зависимости от схемы вычитаний во всех порядках в случае использования регуляризации высшими производными. Поэтому вторые РГ-функции также удовлетворяют ему при наложении условий (7).

Теперь рассмотрим мягко нарушенную теорию. В этом случае мы также накладываем граничные условия (7), поскольку аномальная размерность суперполей материи входит в формулу (3). Тогда NSVZ соотношение (1) справедливо для РГ-функций, определенных в терминах перенормированной константы связи, и

$$\widetilde\beta(\alpha)=\beta(\alpha_0)\Big|_{\alpha_0=\alpha};\quad \widetilde\gamma(\alpha)=\gamma(\alpha_0)\Big|_{\alpha_0=\alpha}. \tag{14}$$

В соответствии с работой [30], NSVZ-подобное соотношение

$$\gamma_m(\alpha_0)=\frac{\alpha_0 N_f}{\pi}\Big[1-\frac{d}{d\alpha_0}\Big(\alpha_0\gamma(\alpha_0)\Big)\Big] \tag{15}$$

справедливо во всех петлях для теории, регуляризованной высшими производными. Поэтому нам необходимо найти граничные условия, при которых

$$\widetilde\gamma_m(\alpha)=\gamma_m(\alpha_0)\Big|_{\alpha_0=\alpha}. \tag{16}$$

Это можно сделать, повторяя рассуждения работы [26]. Давайте, в дополнение к (7), наложим условие

$$m(\alpha,x_0)=m_0. \tag{17}$$

Эквивалентно, мы фиксируем величину $x_0=\ln\Lambda/\mu$ и требуем, чтобы константы перенормировки удовлетворяли равенствам

$$Z_3(\alpha,x_0)=1;\quad Z(\alpha,x_0)=1;\quad Z_m(\alpha,x_0)=1. \tag{18}$$

Тогда аномальная размерность массы фотино, определенная в терминах перенормированной константы связи, может быть представлена в виде

$$\widetilde\gamma_m\left(\alpha(\alpha_0,x)\right)=-\frac{d}{dx}\ln Z_m\left(\alpha(\alpha_0,x),x\right)= =-\frac{\partial\ln Z_m(\alpha,x)}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha(\alpha_0,x)}{\partial x}-\frac{\partial\ln Z_m(\alpha,x)}{\partial x}. \tag{19}$$

В (19) d/dx обозначает полную производную по $x= =\ln\Lambda/\mu$, которая действует как на явно выписанный x, так и на x внутри α, в отличие от частной производной $\partial/\partial x$, не действующей на x внутри α. Рассмотрим формулу (19) в точке x_0. Тогда, благодаря граничным условим (18), мы получаем

$$\frac{\partial\ln Z_m(\alpha,x)}{\partial\alpha}\Big|_{x=x_0}=\frac{\partial\ln(1)}{\partial\alpha}=0, \tag{20}$$

так что первое слагаемое в формуле (19) оказывается равным 0. Во втором слагаемом $\ln Z_m$ дифференцируется по $\ln \Lambda/\mu$ при фиксированном значении переномированной константы связи α, в точности как в формуле (10), которая определяет аномальную размерность $\gamma_m(\alpha_0)$. Более того, благодаря первому граничному условию в формуле (18), $\alpha(\alpha_0, x_0) = \alpha_0$. Значит оба определения аномальной размерности массы фотино совпадают (см. (16)).

Следовательно, если граничные условия (18) накладываются на константы перенормировки мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами, регуляризованной высшими производными, то NSVZ-подобная формула (3) (и формулы (4), (5)) выполняется во всех порядках. Таким образом, мы построили предписание, которое дает NSVZ схему во всех порядках теории возмущений.

3. Заключение. В представленной работе мы построили схему, в которой аномальная размерность массы фотино в мягко нарушенной $\mathcal{N} = 1$ СКЭД с N_f ароматами удовлетворяет NSVZ-подобному соотношению (3) во всех петлях. В этом соотношении все РГ-функции определены стандартным образом, в терминах перенормируемой константы связи, и являются, следовательно, схемно-зависимыми. Поэтому рассматриваемое NSVZ-подобное соотношение справедливо только в определенной схеме вычитаний. Важным ингредиентом, необходимым для ее построения, является регуляризация высшими производными. Дело в том, что при такой регуляризации РГ-функции, определенные в терминах голой константы связи, удовлетворяют NSVZ соотношению и NSVZ-подобному соотношению для массы фотино во всех порядках независимо от схемы вычитаний. В этой работе мы доказали, что, если граничные условия (18) накладываются на константы перенормировки, то РГ-функции, определенные в терминах голой константы связи, совпадают с РГ-функциями, определенными в терминах перенормированной константы связи, (см. (14), (16)). Следовательно, последние РГ-функции удовлетворяют NSVZ-подобным соотношениям во всех порядках при использовании регуляризации высшими производными, дополненной перенормировочным предписанием (18). Такое построение очень похоже на приведенное в работах [26, 42, 43] для жесткой теории. Однако в мягко нарушенной теории также необходимо накладывать еще одно граничное условие на константу перенормировки массы фотино. В заключение, мы вновь подчеркиваем, что рассмотренное построение справедливо только в случае использования регуляризации высшими производными.

К.С. выражает глубокую благодарность А.Л. Катаеву за полезные обсуждения. Работа К.С. была поддержана грантом РФФИ (# 14-01-00695).

1. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **229**, 381 (1983).
2. D. R. T. Jones, Phys. Lett. B **123**, 45 (1983).
3. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Phys. Lett. B **166**, 329 (1986); А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, Ядерная Физика **43**, 459 (1986).
4. M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, Nucl. Phys. B **277**, 456 (1986); А. И. Вайнштейн, М. А. Шифман, ЖЭТФ **91**, 723 (1986).
5. M. A. Shifman and A. I. Vainshtein, In *ITEP lectures on particle physics and field theory*, World Scientific (2010).
6. I. L. Buchbinder and K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **883**, 20 (2014).
7. I. L. Buchbinder, N. G. Pletnev, and K. V. Stepanyantz, Phys. Lett. B **751**, 434 (2015).
8. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, М. А. Шифман, Письма ЖЭТФ **42**, 182 (1985).
9. M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Phys. Lett. B **166**, 334 (1986).
10. J. Hisano and M. A. Shifman, Phys. Rev. D **56**, 5475 (1997).
11. I. Jack and D. R. T. Jones, Phys. Lett. B **415**, 383 (1997).
12. L. V. Avdeev, D. I. Kazakov, and I. N. Kondrashuk, Nucl. Phys. B **510**, 289 (1998).
13. L. Girardello and M. T. Grisaru, Nucl. Phys. B **194**, 65 (1982).
14. J. A. Helayel-Neto, Phys. Lett. B **135**, 78 (1984).
15. F. Feruglio, J. A. Helayel-Neto, and F. Legovini, Nucl. Phys. B **249**, 533 (1985).
16. M. Scholl, Z. Phys. C **28**, 545 (1985).
17. Y. Yamada, Phys. Rev. D **50**, 3537 (1994).
18. A. A. Slavnov, Nucl. Phys. B **31**, 301 (1971).
19. А. А. Славнов, ТМФ **13**, 174 (1972).
20. В. К. Кривощеков, ТМФ **36**, 291 (1978).
21. P. C. West, Nucl. Phys. B **268**, 113 (1986).
22. А. А. Славнов, ТМФ **33**, 210 (1977).
23. Л. Д. Фаддеев, А. А. Славнов, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М. (1978).
24. K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **852**, 71 (2011).
25. K. V. Stepanyantz, JHEP **1408**, 096 (2014).
26. A. L. Kataev and K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **875**, 459 (2013).
27. S. L. Adler, Phys. Rev. D **10**, 3714 (1974).
28. M. Shifman and K. Stepanyantz, Phys. Rev. Lett. **114**, 051601 (2015).
29. M. Shifman and K. V. Stepanyantz, Phys. Rev. D **91**, 105008 (2015).

30. I. V. Nartsev and K. V. Stepanyantz, arXiv:1610.01280 [hep-th].
31. А. А. Солошенко, К. В. Степаньянц, ТМФ **140**, 430 (2004).
32. A. V. Smilga and A. Vainshtein, Nucl. Phys. B **704**, 445 (2005).
33. W. Siegel, Phys. Lett. B **84**, 193 (1979).
34. С. С. Алешин, А. Л. Катаев, К. В. Степаньянц, Письма ЖЭТФ **130**, 83 (2016).
35. S. S. Aleshin, I. O. Goriachuk, A. L. Kataev, and K. V. Stepanyantz, Phys. Lett. B **764**, 222 (2017).
36. A. B. Pimenov, E. S. Shevtsova, and K. V. Stepanyantz, Phys. Lett. B **686**, 293 (2010).
37. K. V. Stepanyantz, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **272**, 256 (2011).
38. K. V. Stepanyantz, arXiv:1108.1491 [hep-th].
39. S. S. Aleshin, A. E. Kazantsev, M. B. Skoptsov, and K. V. Stepanyantz, JHEP **1605**, 014 (2016).
40. А. Е. Казанцев, К. В. Степаньянц, ЖЭТФ **147**, 714 (2015).
41. D. Kutasov and A. Schwimmer, Nucl. Phys. B **702**, 369 (2004).
42. A. L. Kataev and K. V. Stepanyantz, Phys. Lett. B **730**, 184 (2014).
43. A. L. Kataev and K. V. Stepanyantz, Theor. Math. Phys. **181**, 1531 (2014).
44. I. Jack, D. R. T. Jones, and C. G. North, Phys. Lett. B **386**, 138 (1996).
45. I. Jack, D. R. T. Jones, and C. G. North, Nucl. Phys. B **486**, 479 (1997).
46. I. Jack, D. R. T. Jones, and A. Pickering, Phys. Lett. B **435**, 61 (1998).
47. I. Jack, D. R. T. Jones, and A. Pickering, Phys. Lett. B **426**, 73 (1998).
48. I. Jack, D. R. T. Jones, and A. Pickering, Phys. Lett. B **432**, 114 (1998).
49. I. Jack and D. R. T. Jones, Phys. Lett. B **465**, 148 (1999).
50. R. V. Harlander, D. R. T. Jones, P. Kant, L. Mihaila, and M. Steinhauser, JHEP **0612**, 024 (2006).
51. L. Mihaila, Adv. High Energy Phys. **2013**, 607807 (2013).
52. K. V. Stepanyantz, Nucl. Phys. B **909**, 316 (2016).
53. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М. (1984).