Письма в ЖЭТФ, том 105, вып. 3, с. 131 – 135

Пространственная структура модифицированного кулоновского потенциала в сверхсильном магнитном поле

С. И. Глазырин[+*×○1)], *С. И. Годунов*[*○1)]

[+]*Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова, 127055 Москва, Россия*

[*]*Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова, Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 117218 Москва, Россия*

[×]*Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 115409 Москва, Россия*

[○]*Новосибирский Государственный Университет, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 30 ноября 2016 г.
После переработки 28 декабря 2016 г.

В численном виде рассмотрена модификация кулоновского потенциала за счет усиления петлевых поправок в сверхсильном магнитном поле. Модифицированный потенциал вычислен с высокой точностью и изучена картина эквипотенциальных линий. Полученные результаты подтверждают общие особенности, известные из предыдущих исследований, однако, получены и некоторые различия в структуре потенциала, которые могут быть важны для задач с пространственно распределенным зарядом.

DOI: 10.7868/S0370274X17030018

1. Введение. Кулоновский потенциал приводит к возникновению связанных состояний между противоположно заряженными частицами. Поведение $U \propto$ $\propto 1/r$ возникает в результате однофотонного обмена. Радиационные поправки модифицируют этот потенциал, но они обычно незначительны. Наличие внешнего поля может значительно усилить эти поправки.

Хорошо известно, что внешнее магнитное поле усиливает поляризацию вакуума в одной петле (пропорционально магнитному полю B). Шабад и Усов обнаружили [1, 2] (см. также [3]), что это усиление приводит к значительному изменению (экранированию) кулоновского потенциала для $B \gtrsim m^2/e^3$, где m, e – масса электрона и его заряд, соответственно[2)]. Был численно рассчитан потенциал в цилиндрической геометрии (ρ, ϕ, z) для $z = 0$ при произвольном ρ, а также для $\rho = 0$ с произвольными z (точечный заряд находится в $(\rho,\ z) = (0,\ 0)$, а магнитное поле направлено вдоль оси z) и аналитически найдены асимптотики.

Интерполяционная (но все же достаточно точная) формула для поляризационного оператора в сверхсильном магнитном поле была предложена Высоцким [4]. С помощью этой формулы потенциал для $z = 0$ (при произвольном ρ) и для $\rho = 0$ (при произвольном z) был вычислен аналитически [5, 6]. Было обнаружено [1, 2, 6], что для $z \gg 1/m$ эквипотенциальные линии являются эллипсами, но потенциал на средних расстояниях, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \lesssim 1/m$, был все еще не известен. На рис. 1 в [6] эквипотенциальные линии везде предполагались эллиптическими.

Целью настоящей работы является изучение потенциала на средних расстояниях с помощью явного численного расчета. Эквипотенциальные линии на расстояниях $r \sim 1/m$ оказались в форме глаза (см. рис. 2, 3), а не эллиптическими, что означает, что на средних расстояниях потенциал убывает по ρ быстрее, чем это ожидалось ранее. Этот результат может быть важен для задач с распределенным зарядом, например, для расчета энергетических уровней в поле ядра конечного радиуса.

В разделе 2 мы приводим основные формулы из [1, 2, 4–6]. В разделе 3 – результаты численных расчетов.

2. Модифицированный потенциал. Ниже коротко описаны известные аналитические результаты по модифицированному потенциалу. В присутствии сверхсильного магнитного поля ($B \gg B_0 \equiv m^2/e \approx$ $\approx 4.4 \cdot 10^{13}$ Гаусс) вклад от вакуумной поляризации в одной петле в поляризационный оператор становится значительно усиленным [7, 8] (см. также [9, 10]):

$$\Pi^{(2)}\left(k_\perp, k_\parallel\right) = -\frac{2e^3B}{\pi}\exp\left(-\frac{k_\perp^2}{2eB}\right)T\left(t\right), \qquad (1)$$

1)e-mail: glazyrin@itep.ru; sgodunov@itep.ru

2)Используется гауссова система единиц, $e^2 = \alpha =$ $= 1/137.035\ldots$, поэтому $m^2/e^3 = B_0/\alpha$, где $B_0 \equiv m^2/e \approx$ $\approx 4.4 \cdot 10^{13}$ Гаусс.

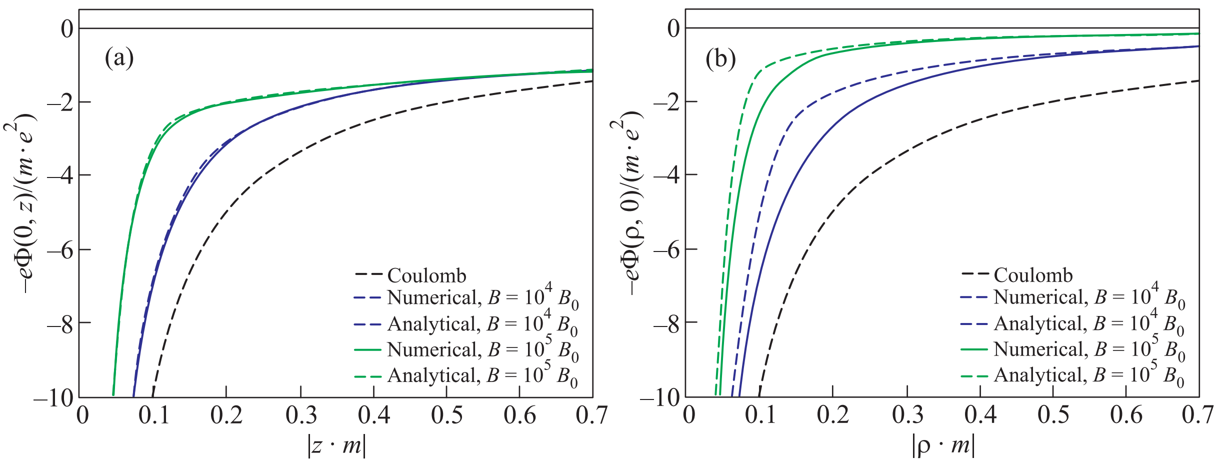

Рис. 1. (Цветной онлайн) Численные и аналитические результаты для $B = 10^4 B_0$ и $B = 10^5 B_0$. Наинизшая пунктирная кривая соответствует кулоновскому потенциалу; две голубые линии (сплошная и пунктирная), расположенные чуть выше, соответствуют численному и аналитическому результатам для $B = 10^4 B_0$; две верхние линии (зеленые сплошная и пунктирная) соответствуют численному и аналитическому результатам для $B = 10^5 B_0$

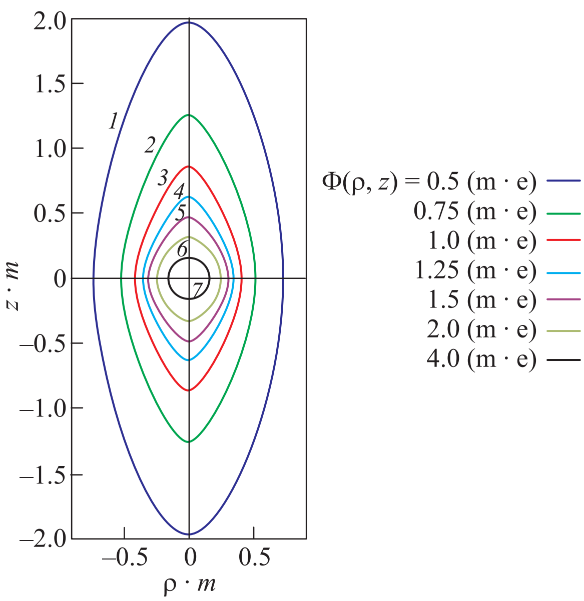

Рис. 2. (Цветной онлайн) Эквипотенциальные линии для $B = 10^4 B_0$. Порядок значений на легенде соответствует эквипотенциальным линиям от внешних к внутренним: *1–7* соответствует $\Phi(\rho, z) = (0.50–4.00)(m \cdot e)$

где $k = (0, \mathbf{k}) = \left(0, \mathbf{k}_\perp, k_\parallel\right)$ – импульс внешнего фотона, $t \equiv k_\parallel^2/4m^2$ и

$$T(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{t(1+t)}} \log\left(\sqrt{1+t} + \sqrt{t}\right). \qquad (2)$$

В (2) учитывается только вклад низшего уровня Ландау в поляризационный оператор, который должен доминировать. Вкладами высших петель также пренебрегаем. Делая эти приближения, мы следуем работам [1, 2, 4–6, 8, 11], где приведены аргументы в их пользу.

Поскольку поляризационный оператор входит в пропагатор фотона, потенциал точечного заряда модифицируется (рассматривается единичный заряд e):

$$\Phi(\rho, z) = 4\pi e \int \frac{d^2 k_\perp dk_\parallel}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}_\perp \boldsymbol{\rho}} e^{-ik_\parallel z}}{k_\parallel^2 + k_\perp^2 - \Pi^{(2)}\left(k_\perp, k_\parallel\right)}. \qquad (3)$$

После интегрирования по углу в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, был получен следующий результат [1, 2] (с точностью до единиц измерения и обозначений):

$$\Phi(\rho, z) = \frac{e}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dk_\parallel e^{-ik_\parallel z} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty dk_\perp \frac{k_\perp J_0(k_\perp \rho)}{k_\perp^2 + k_\parallel^2 + \frac{2e^3 B}{\pi} e^{-k_\perp^2/2eB} T(k_\parallel^2/4m)}. \qquad (4)$$

В работе [4] была представлена интерполяционная формула для $T(t)$:

$$T(t) \approx \frac{2t}{2t+3}, \qquad (5)$$

она довольно простая и позволяет аналитически вычислять интегралы, сохраняя при этом хорошую точность (подробности можно найти в [5]).

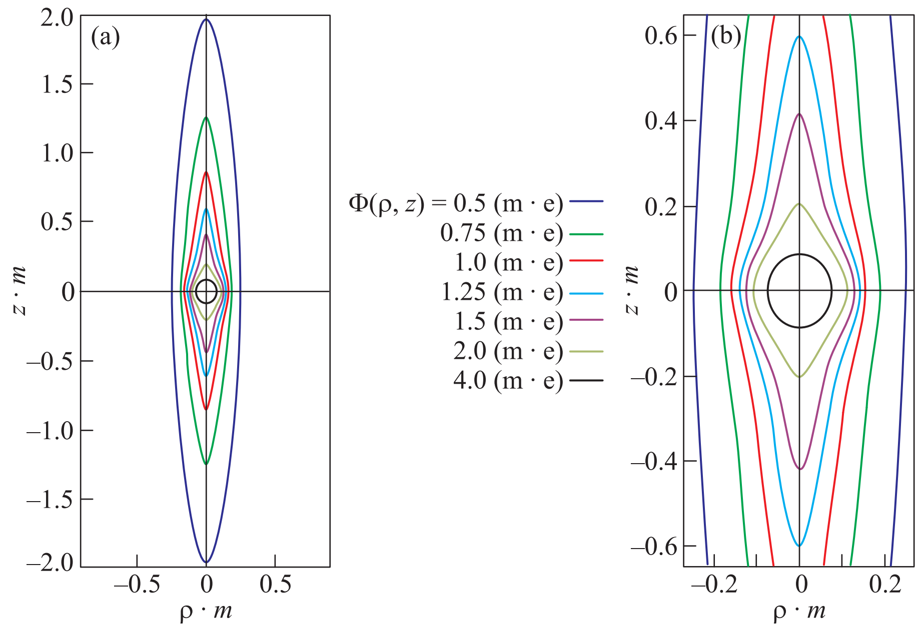

Рис. 3. (Цветной онлайн) Эквипотенциальные линии для $B = 10^5 B_0$. (a) – Общий вид. (b) – Центральная часть. Легенда для линий такая же, как и на рис. 2

С помощью формулы (5) были получены аналитические выражения для $\Phi(0, z)$ и $\Phi(\rho, 0)$ [5, 6] (см. также асимптотики в [1, 2]):

$$\Phi(0, z) = \frac{e}{|z|}\left(1 - e^{-|z|\sqrt{6m^2}} + e^{-|z|\sqrt{(2/\pi)e^3 B + 6m^2}}\right), \tag{6}$$

и для $B \gg 3\pi m^2/e^3$:

$$\Phi(\rho, 0) = \begin{cases} \frac{e}{\rho}\exp\left(-\rho\sqrt{(2/\pi)e^3 B}\right), & \text{если } \rho < l_0, \\ \frac{e}{\rho}\sqrt{\frac{3\pi m^2}{e^3 B}}, & \text{если } \rho > l_0, \end{cases} \tag{7}$$

где $l_0 \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2e^3 B}} \ln \sqrt{\frac{e^3 B}{3\pi m^2}}$.

Для потенциала на больших расстояниях, $z \gg 1/m$, в [1, 2, 6] было найдено асимптотическое выражение[3)]

$$\Phi(\rho, z)|_{z \gg 1/m} = \frac{e}{\sqrt{z^2 + \rho^2\left(1 + \frac{e^3 B}{3\pi m^2}\right)}}, \tag{8}$$

которое означает, что эквипотенциальные линии на большом расстоянии являются эллипсами.

Эквипотенциальные линии были изображены на рис. 1 в [6], где они были найдены с помощью (6)–(8). Предполагалось, что эквипотенциальные линии являются эллипсами везде. Целью данной статьи является проверка этого предположения с помощью численного исследования изначального интеграла (4) во всем пространстве, что и сделано в разделе 3.

[3)]Поправки к выражению (8) были найдены в [12, 13] в рамках эффективной теории (Гейзенберг–Эйлер).

3. Численные результаты. Мы стремимся численно получить потенциал с максимально достижимой точностью[4)]. Для этого необходимо вычислить потенциал (4). Однако этот интеграл имеет сингулярность в $k_\perp = 0$, $k_\parallel = 0$ и поэтому не очень подходит для численного расчета.

Рассматриваемая сингулярность имеет простой физический смысл: она возникает из-за расходимости в обыкновенном кулоновском потенциале. Поэтому в целях регуляризации мы вычитаем e/r из интеграла (4). Кулоновский потенциал может быть представлен в форме, аналогичной (4), но без $\Pi^{(2)}\left(k_\perp, k_\parallel\right)$ в знаменателе. Таким образом, искомая разность[5)]

$$\Delta\Phi(\rho, z) \equiv \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \Phi(\rho, z) =$$
$$= \frac{e}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_\parallel e^{-ik_\parallel z} \int_0^{\infty} dk_\perp k_\perp J_0(k_\perp \rho) \times$$
$$\times \frac{\frac{2e^3 B}{\pi} e^{-k_\perp^2/2eB} T(k_\parallel^2/4m)}{\left(k_\perp^2 + k_\parallel^2\right)\left(k_\perp^2 + k_\parallel^2 + \frac{2e^3 B}{\pi} e^{-k_\perp^2/2eB} T(k_\parallel^2/4m)\right)}. \tag{9}$$

[4)]Отметим, что существуют другие вклады в потенциал кроме поляризации вакуума в одной петле с электронами на основном уровне Ландау. Поэтому, вообще говоря, бессмысленно бесконечно улучшать точность вычисления одного конкретного вклада. Но нам важно проверить, что мы можем достигнуть высокой точности вычислений, чтобы в будущем мы смогли учесть также и другие эффекты.

[5)]Этот же прием был использован в [1].

Выражение (9) конечно для любых ρ и z, хотя для численного интегрирования требуются дополнительные регуляризации. Выражение (2) для $T(t)$ необходимо разложить в ряд для маленьких значений t, а числитель и знаменатель под интегралом нужно разделить на $k_{\|}^2$ для маленьких значений $k_{\|}$. Численно интегрирование проводится в два этапа: первое – по $k_{\perp}$ с помощью GNU Scientific Library [14], второе – по $k_{\|}$, преобразование Фурье, предоставлено пакетом FFTW [15]. Была произведена тщательная оценка погрешности интегрирования: абсолютная погрешность конечного результата для $B = 10^4 B_0$ меньше $10^{-7}(m \cdot e)$ для всей исследованной области. Для $B = 10^5 B_0$ погрешность меньше $10^{-6}(m \cdot e)$. Наши численные результаты находятся в хорошем согласии с численными результатами для $\Phi(0,z)$ и $\Phi(\rho,0)$, полученными в [1, 2].

Вычисляя этот интеграл, можно проверить точность аналитических оценок. Из (6) получаем оценку для $\Delta\Phi(0,0)$:

$$\begin{aligned}&\Delta\Phi_{\text{analyt}}(0,0) = \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{e^{-z\sqrt{6m^2}} - e^{-z\sqrt{(2/\pi)e^3B+6m^2}}}{z} = \\ &= \sqrt{(2/\pi)e^3B + 6m^2} - \sqrt{6m^2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Для $B = 10^4 B_0$ получаем $\Delta\Phi_{\text{analyt}}(0,0)/m \approx \approx 4.793$. Численное значение точного интегрирования 4.41692858. Видно, что в этой точке аналитическое решение близко к численному. Такое согласие также подтверждается на рис. 1a, где одновременно показаны численные и аналитические результаты для $\Phi(0,z)$. Можно отметить отличное согласие между численным и аналитическим подходами для любого значения z. На рис. 1b изображены как численные, так и аналитические результаты для $\Phi(\rho,0)$. Согласие не столь хорошее, как для $\Delta\Phi(0,z)$.

С помощью численных результатов получена корректная пространственная структура потенциала. Эквипотенциальные линии для $B = 10^4 B_0$ и $B = = 10^5 B_0$ показаны соответственно на рис. 2 и 3. Центральная часть картины из рис. 3a представлена на рис. 3b. Видно, что внешние эквипотенциальные линии имеют эллиптическую форму, что согласуется с аналитическими результатами. Внутренняя линия – с хорошей точностью круг, как и должно быть (закон Юкавы во всех направлениях). Можно было бы ожидать, что на средних расстояниях линии должны быть также эллипсами, но из численных результатов следует, что они имеют форму "глаза", а не эллипса. Значит, модифицированный потенциал точечного заряда для $1/\sqrt{e^3B} \lesssim z \lesssim 1/m$ убывает с ρ быстрее, чем можно было бы ожидать из предыдущих исследований. Если вместо точечного заряда рассматривать ядро конечного радиуса, то потенциал вдоль линии $\rho = 0$ окажется меньше для средних расстояний, $z \lesssim 1/m$, чем в случае эллиптических линий (из-за того, что вклад в потенциал от зарядов, расположенных вне $\rho = 0$, будет слабее). Сказанное легко понять из следующего рассуждения: допустим, что заряд распределен по кольцу $\rho = \rho_0 = \text{const}$ в плоскости $z = 0$. В этом случае потенциал вдоль оси z ($\rho = 0$) будет тем же, как и от точечного заряда вдоль линии $\rho = \rho_0$. Из-за того, что потенциал точечного заряда убывает с ρ быстрее, чем в случае эллиптических линий, это доказывает утверждение, приведенное выше.

Рассмотрим электрон в поле ядра конечного размера при наличии сверхсильного магнитного поля. Электрон будет локализован в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, на расстояниях $\sim a_H \equiv 1/\sqrt{eB}$. Когда магнитное поле становится столь сильным, что a_H становится меньше размера ядра, пространственное распределение заряда начинает играть существенную роль. Как было показано ранее, потенциал оказывается слабее в некоторых областях, чем ожидалось, поэтому энергетические уровни в поле такого ядра будут выше. Эта задача требует отдельного тщательного изучения.

4. Заключение. В статье рассмотрен кулоновский потенциал в сверхсильном внешнем магнитном поле. Из-за усиления петлевых поправок потенциал модифицируется (экранируется). Результат с учетом этих поправок был известен из предыдущих исследований, но не во всем пространстве. В данной работе численно рассчитан модифицированный потенциал во всем пространстве. С помощью численных результатов мы оценили точность аналитических результатов и получили некоторые новые особенности поведения потенциала. Оказалось, что эквипотенциальные линии не являются эллипсами на средних расстояниях, $z \lesssim 1/m$ (см. рис. 2, 3). Это означает, что модифицированный потенциал точечного заряда при $1/\sqrt{e^3B} \lesssim z \lesssim 1/m$ уменьшается с ρ быстрее, чем можно было бы ожидать, исходя из предыдущих исследований. Такая особенность может быть важна для некоторых задач, например, с пространственно распределенным зарядом (для расчетов энергетических уровней атомов и ионов с большим зарядом ядра).

Авторы выражают благодарность М. Высоцкому за ценные комментарии и обсуждения.

Работа поддержана грантом РФФИ # 16-32-00241, Грантом Президента Российской Федерации по поддержке научных школ Российской Федерации

НШ-9022-2016 и "Фондом Династия". Работа Сергея Годунова также поддержана грантами РФФИ # 16-32-60115 и # 16-02-00342. Работа Семена Глазырина также поддержана Швейцарским научным фондом (SNF), грант SCOPES # IZ73Z0_152485.

---

1. A. E. Shabad and V. V. Usov, Phys. Rev. Lett. **98**, 180403 (2007).
2. A. E. Shabad and V. V. Usov, Phys. Rev. D **77**, 025001 (2008).
3. N. Sadooghi and A. Sodeiri Jalili, Phys. Rev. D **76**, 065013 (2007).
4. M. I. Vysotsky, Письма в ЖЭТФ **92**, 22 (2010) [JETP Lett. **92**, 15 (2010)].
5. B. Machet and M. I. Vysotsky, Phys. Rev. D **83**, 025022 (2011).
6. S. I. Godunov, B. Machet, and M. I. Vysotsky, Phys. Rev. D **85**, 044058 (2012).
7. V. V. Skobelev, Изв. Высш. Учебн. Завед., Физ. **10**, 142 (1975) [Sov. Phys. J. **18**, 1481 (1975)].
8. Yu. M. Loskutov and V. V. Skobelev, Phys. Lett. A **56**, 151 (1976).
9. А. Е. Шабад, Краткие сообщения по физике ФИАН **3**, 11 (1976).
10. D. B. Melrose and R. J. Stoneham, Nuovo Cimento A **32**, 435 (1977).
11. S. I. Godunov, Phys. Atom. Nucl. **76**, 901 (2013).
12. D. M. Gitman and A. E. Shabad, Phys. Rev. D **86**, 125028 (2012).
13. T. C. Adorno, D. M. Gitman, and A. E. Shabad, Phys. Rev. D **93**, 125031 (2016).
14. M. Galassi, J. Davies, J. Theiler, B. Gough, R. Priedhorsky, G. Jungman, and M. Booth, GNU Scientific Library Reference Manual, ISBN 0954612078.
15. M. Frigo and S. G. Johnson, The Fastest Fourier Transform in the West, http://www.fftw.org/