

## О новом механизме поляритон-поляритонного рассеяния

С. С. Гаврилов<sup>1)</sup>

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.

Рассмотрены конденсатные состояния двумерной системы экситонных поляритонов в условиях прямого резонансного фотовозбуждения. Теоретически предсказано, что расщепление собственных мод с ортогональными поляризациями приводит к появлению нового канала параметрического рассеяния. Поляритонный конденсат спонтанно распадается на множество состояний в конечной двумерной области импульсного пространства, приводя к сильной неоднородности в распределениях интенсивности и поляризации даже в случае строго постоянной амплитуды и нулевого планарного импульса внешнего поля. Новый механизм рассеяния делает возможными автоколебательные и хаотические состояния поляритонных систем.

DOI: 10.7868/S0370274X17030110

**Введение.** Экситонные поляритоны – бозе-частицы со спином 1, возникающие вследствие сильной связи фотонов и экситонов, электрон-дырочных пар в полупроводниках. Поляритоны могут быть локализованы в тонкой плоской квантовой яме в активном слое микрорезонатора [1, 2]. Тогда под действием резонансной лазерной накачки коллективное состояние поляритонов оказывается макроскопически когерентным, хотя их собственное время жизни очень мало ( $\tau \sim 10$  пс в структурах на основе GaAs). Динамика поляритонного конденсата хорошо описывается уравнениями типа Гросса–Питаевского или Гинзбурга–Ландау, с тем, однако, отличием, что в случае резонансного возбуждения требуется явно учитывать и диссипацию, и когерентный внешний источник [3]. Аналогично атомным бозе-конденсатам и сверхпроводящим металлам, поляритон-поляритонное взаимодействие может рассматриваться в приближении разреженного газа,  $H_{\text{int}}(\mathbf{r}) = V|\psi(\mathbf{r})|^4$ . Это взаимодействие является отталкивательным ( $V > 0$ ) и настолько сильным, что способно вызывать фиолетовый сдвиг поляритонного уровня  $\Delta E \sim V|\psi|^2$ , в десятки раз превышающий его спектральную ширину  $\gamma = \hbar/\tau$ . При этом, как правило, сильно взаимодействуют между собой только поляритоны с параллельными спинами [4, 5].

Нелинейность, связанная с поляритон-поляритонным рассеянием, приводит к оптической мультистабильности и возможности управляемых переходов между различными состояниями конденсата [6–10]. Малая величина  $\tau$  делает такие переходы со-

поставимо быстрыми, а чувствительность к спину дает возможность “переключать” не только интенсивность, но и поляризацию света, проходящего через резонатор, путем плавного изменения параметров накачки. В последние годы вызывают интерес системы с пониженной симметрией, в которых снято вырождение собственных мод с ортогональными поляризациями, что достигается, например, за счет механического напряжения вдоль одной из главных осей в плоскости активного слоя. Если расщепление подуровней  $g$  сравнимо с их шириной  $\gamma$ , поляризация конденсата может переключаться между линейной и циркулярной [11–13] и даже между право- и левоциркулярной [14, 15] в зависимости лишь от интенсивности накачки или под действием быстрых акустических импульсов.

В данной работе показано, что увеличение расщепления  $g$  до  $4\gamma$  приводит к появлению нового канала спонтанного параметрического рассеяния в “мультистабильной” поляритонной системе, которая в результате приобретает качественно новые свойства. Раньше долгое время считалось, что в условиях непрерывной накачки со строго фиксированной амплитудой состояние поляритонного конденсата должно быть постоянным во времени, поскольку собственное время жизни  $\tau$  конечно. Также считалось, что если импульс падающей волны перпендикулярен поверхности, то установившееся состояние должно быть постоянным и в плоскости резонатора (структура однородна). Однако совсем недавно путем численных экспериментов было найдено, что пространственная и/или временная симметрии такой системы могут спонтанно нарушаться, приводя к неоднородным или хаотически изменяющимся рас-

<sup>1)</sup>e-mail: sergey.s.gavrilov@gmail.com

пределениям поля [16]. Обсуждаемый в данной работе процесс рассеяния и является главной причиной появления этого нового класса решений.

Оказывается, в частности, что увеличение  $g/\gamma$  делает возможным спонтанный распад чисто циркулярно поляризованного конденсата на множество мод с отличающимися поляризациями, импульсами и энергиями. При этом рассеяние возникает “жестко” (инкременты нарастания распадных мод превышают  $\gamma$ ) и в принципе не может привести к новому однородному состоянию системы, поскольку все такие состояния асимптотически неустойчивы. Определение параметров, при которых это явление возможно, составляет основную цель данной работы.

**Модель.** Исходным пунктом являются уравнения Гросса–Питаевского с когерентным источником,

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} = \left( E_0 - \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - i\gamma + V \psi_{\pm}^* \psi_{\pm} \right) \psi_{\pm} + \frac{g}{2} \psi_{\mp} + f_{\pm} e^{-iE_p t/\hbar}. \quad (1)$$

Здесь  $\psi_{\pm}$  – макроскопические волновые функции двух спиновых компонент конденсата, зависящие от времени и координат в плоскости активного слоя, а  $f_{\pm}$  – соответствующие амплитуды накачки. Закон дисперсии вблизи дна нижней поляритонной ветви для простоты считается параболическим,  $m$  – эффективная масса,  $E_0 = mc^2/2\varepsilon$  [2]. В пределе  $f \rightarrow 0$  собственные состояния линейно поляризованы в направлениях  $x$  и  $y$ , исходя из обычного определения  $\psi_{\pm} = (\psi_x \mp i\psi_y)/\sqrt{2}$ , и расщеплены на величину  $g$ . Таким образом, поляритоны с антипараллельными спинами связаны линейно ( $\propto g$ ), но парно не взаимодействуют. Величина  $V|\psi_{\pm}|^2$  имеет размерность энергии и соответствует сдвигу резонансных уровней, а  $f$  также учитывает в своем определении коэффициент пропускания зеркал резонатора. На выходе из резонатора “правая” ( $\sigma^+$ ) и “левая” ( $\sigma^-$ ) компоненты электрического поля световой волны пропорциональны  $\psi_{\pm}$ . Накачка имеет частоту  $E_p$  и нулевой планарный импульс ( $k = 0$ ).

**Нарушение спиновой симметрии.** Коль скоро амплитуда падающей волны постоянна в пространстве и времени, а время жизни поляритонов конечно, решения уравнений (1) естественно искать в виде  $\psi_{\pm}(t) = \bar{\psi}_{\pm} e^{-iE_p t/\hbar}$ , что дает

$$(D + i\gamma - V \bar{\psi}_{\pm}^* \bar{\psi}_{\pm}) \bar{\psi}_{\pm} - \frac{g}{2} \bar{\psi}_{\mp} - f_{\pm} = 0, \quad (2)$$

где  $D \equiv E_p - E_0$ . Пусть теперь  $f_+ = f_- = f$ , так что накачка линейно поляризована в направлении  $x$ .

Уравнения для  $\psi_+$  и  $\psi_-$  становятся одинаковыми и для всех  $f$  выполняется соотношение

$$\frac{\bar{\psi}_-}{\bar{\psi}_+} = \frac{D + g/2 - V|\bar{\psi}_+|^2 + i\gamma}{D + g/2 - V|\bar{\psi}_-|^2 + i\gamma}. \quad (3)$$

Симметричные по спину решения с  $\bar{\psi}_+ = \bar{\psi}_-$  есть всегда, но из (3) легко видеть, что нелинейность приводит и к асимметричным решениям. Например, соотношение (3) самосогласуется для  $\bar{\psi}_-/\bar{\psi}_+ \rightarrow 0$ , если

$$V|\bar{\psi}_+|^2 = D + \frac{g}{2} \quad (4)$$

и  $\gamma \rightarrow 0$ . Более того, при  $g > 0$  и  $D > g$  симметричные решения могут быть вообще недостижимы в широком интервале  $f$  из-за неустойчивости. Дело в том, что линейная связь спиновых компонент предполагает “переходы” между ними, зависящие от разности их фаз. Аналогичный эффект приводит к осцилляциям Джозефсона в сверхпроводниках, в нашем же случае фазы обычно жестко заданы внешним полем. Однако если исходное состояние спин-симметрично ( $\psi_+ = \psi_-$ ), то может оказаться, что сколь угодно малое приращение  $|\psi_+|$  или  $|\psi_-|$  и связанный с этим из-за нелинейности сдвиг фазы приведут к тому, что компонента с большей амплитудой продолжит усиливаться уже за счет подавления отстающей до тех пор, пока поле не приобретет высокую циркулярную поляризацию [11]. Такие конечные состояния устойчивы, когда отстройка накачки от резонанса полностью скомпенсирована фиолетовым сдвигом (как в (4) с  $g > 0$ ), так что положительная обратная связь между амплитудой и эффективной резонансной частотой для одной из спиновых компонент прекращается, а для другой подавлена. После этого  $|\bar{\psi}_{\pm}|$  зависят от  $f$  сублинейно. Для восстановления решений с  $\psi_+ = \psi_-$  необходимо, чтобы и отставшая компонента вошла в “бистабильную” область, что сильно затруднено и для  $g \gtrsim 2\gamma$  случается лишь при многократно больших амплитудах накачки, чем те, что приводят к нарушению спиновой симметрии. В итоге в широком диапазоне  $f$  конденсат оказывается почти полностью циркулярно поляризованным. Этот эффект подтвержден экспериментально [11–13]; прямое наблюдение света, прошедшего через резонатор с сильной экситон-фотонной связью, обнаруживает хорошее количественное согласие с моделью (1). Далее мы покажем, что и спин-асимметричные решения с почти полной круговой поляризацией могут в свою очередь потерять устойчивость при  $g \gtrsim 4\gamma$ , в результате чего устойчивых одномодовых решений в конечном интервале  $f$  не остается вовсе.

**Околоконденсатные возбуждения.** Чтобы определить устойчивость конденсата, найдем спектр малых возмущений с произвольными волновыми числами  $k$ . Аналогичный подход был предпринят Боголюбовым в его статье о сверхтекучести [17] и постоянно применяется при изучении поляритонных систем [18–22]. Пусть для обеих спиновых компонент

$$\psi(r, t) = \sum_k \psi_k(t) e^{ikr}, \quad (5)$$

тогда, согласно (1), нелинейный вклад в  $i\hbar(d\psi_k/dt)$  будет иметь вид

$$V \sum_{q_1, q_2} \psi_{q_1+q_2-k}^*(t) \psi_{q_1}(t) \psi_{q_2}(t). \quad (6)$$

Единичная нормировка в (5) удобна для дальнейших расчетов. Положим

$$\psi_k(t) = \delta_{k,0} \bar{\psi} e^{-iE_p t/\hbar} + \tilde{\psi}_k e^{-iEt/\hbar}, \quad (7)$$

где  $|\tilde{\psi}_k/\bar{\psi}| \ll 1$ . Чтобы получить замкнутую линейную задачу, следует взять уравнения для  $\psi_k$  и  $\psi_{-k}^*$ , оставив в (6) только члены, квадратичные по  $\tilde{\psi}$  и линейные по  $\tilde{\psi}_k$ . Это приводит к однородной системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \delta + 2V|\bar{\psi}_+^2| - \lambda & V\bar{\psi}_+^2 & g/2 & 0 \\ -V\bar{\psi}_+^{*2} & -\delta - 2V|\bar{\psi}_+^2| - \lambda & 0 & -g/2 \\ g/2 & 0 & \delta + 2V|\bar{\psi}_-^2| - \lambda & V\bar{\psi}_-^2 \\ 0 & -g/2 & -V\bar{\psi}_-^{*2} & -\delta - 2V|\bar{\psi}_-^2| - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_{+,+k} \\ \tilde{\psi}_{+,-k}^* \\ \tilde{\psi}_{-,+k} \\ \tilde{\psi}_{-,-k}^* \end{pmatrix} = 0, \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\delta = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - D, \quad \lambda = E - E_p + i\gamma. \quad (9)$$

Строго говоря,  $\tilde{\psi}_k$  следовало бы считать операторами, а не  $c$ -числами, поскольку возбуждения малы, но для линейной задачи типа (8) это несущественно.

Пусть  $\bar{\psi}_- = 0$ , тогда  $\bar{\psi}_+$  можно без ограничения общности считать вещественным числом; для простоты обозначим его  $\psi$  и положим  $V = 1$ . Уравнение  $\det(\cdot) = 0$  является биквадратным для  $\lambda$  и имеет решения вида

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{P \pm \sqrt{Q}}{2}}, \quad (10)$$

где

$$P = 2\delta^2 + 4\delta\psi^2 + 3\psi^4 + \frac{g^2}{2}, \quad (11)$$

$$Q = (4\delta\psi^2 + 3\psi^4)^2 + g^2 (4\delta^2 + 8\delta\psi^2 + 3\psi^4). \quad (12)$$

Отметим, что похожая задача ранее была решена для квазиравновесного поляритонного конденсата, стационарное состояние которого поддерживается связью с экситонным резервуаром, а не резонансной накачкой [20]. В этом случае свободная энергия имеет минимум при  $V|\psi|^2 = \mu + g/2$ , где  $\mu$  – химический потенциал. Для  $g = 0$  задача целиком сводится к рассматривавшейся Боголюбовым, в частности, надконденсатные моды имеют “звуковой” спектр

$E \propto k$  вблизи  $k = 0$ . В нашем случае аналогом химического потенциала можно до некоторой степени считать величину  $D$ . Однако равновесный конденсат имеет линейную поляризацию, отвечающую нижнему из двух расщепленных подуровней, и поэтому устойчив; в нашем же случае возможны неустойчивые решения.

Решение с амплитудой  $\psi$  неустойчиво, если  $\text{Im } \lambda > \gamma$  и, стало быть,  $\text{Im } E > 0$  для какого-либо  $k$ . Из (10) следует, что существуют два вида неустойчивости:

$$(i) \quad Q > 0, \quad \text{но } P \pm \sqrt{Q} < 0; \quad (13)$$

$$(ii) \quad Q < 0. \quad (14)$$

Неустойчивость первого вида (13) связана с прямым распадом конденсата. Она хорошо известна и “ответственна” за все процессы поляритон-поляритонного рассеяния, обсуждавшиеся до этого (например, [18, 19, 23–25]). Неустойчивость второго вида (14) является ключевой для данной работы и связана с пониженной симметрией системы. Действительно, в (12) есть лишь один член  $8g^2\delta V\psi^2$ , который при  $\delta < 0$  может принимать отрицательные значения, и он пропорционален как квадрату расщепления подуровней, так и константе парного взаимодействия, которую для наглядности мы здесь выписали явно.

Неустойчивое состояние с  $Q < 0$  проиллюстрировано на рис. 1. Для примера выбраны параметры, характерные для структур на основе GaAs [11]:

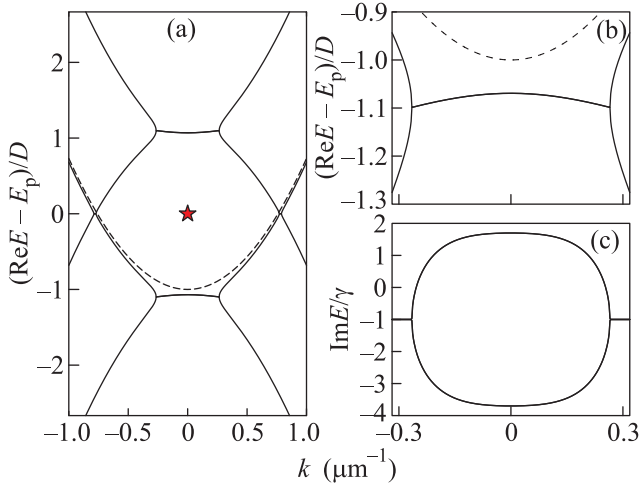


Рис. 1. (Цветной онлайн) Характерная зависимость вещественной (а), (b) и мнимой (с) частей энергии околоконденсатных мод  $E$  от волнового числа  $k$  (см. (9), (10)) в неустойчивом состоянии с  $Q < 0$ . Панель (b) изображает увеличенный фрагмент (а). Звездочка на панели (а) указывает положение возбуждаемой извне конденсатной моды. Плотность конденсата  $\psi^2$  составляет  $D + g/2$ . Закон дисперсии  $E = E_0 + \hbar^2 k^2/2m$  изображен пунктиром

$\epsilon = 12.5$ ,  $E_0 = 1.5$  эВ,  $\gamma = 20$  мкэВ; в качестве свободных параметров взяты  $g = 10\gamma$ ,  $D = 15\gamma$  и самосоглаванное в смысле (4) значение  $\psi$ . Видно, что вблизи  $k = 0$  и  $\text{Re } E \approx E_p \pm D$  возникают плоские участки спектра, которые имеют положительный инкремент нарастания  $\text{Im } E$ . Таким образом, неустойчивой может оказаться конечная двумерная область  $k$ -пространства (модель имеет круговую симметрию).

Выясним, в какой области параметров такие решения возможны. Решив уравнение  $Q = 0$  относительно  $\delta$  и затем используя первое из определенных (9), находим:

$$\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = D - \frac{\pm g \psi^2 \sqrt{g^2 + 3\psi^4} + 2g^2 \psi^2 + 6\psi^6}{2g^2 + 8\psi^4}. \quad (15)$$

Система неравенств  $g > 0$  и  $k_0^2 \geq 0$  составляет критерий появления мод с  $Q = 0$  где-либо в  $k$ -пространстве. Выполнение этих условий не зависит от закона дисперсии, который влияет только на протяженность неустойчивой области. Видно, что выражение (15) может иметь одно или два положительных значения (или не иметь их вовсе). В первом случае неустойчивой оказывается круговая область

с  $|k| < k_0$ , а во втором – кольцо  $k_0^{(1)} < |k| < k_0^{(2)}$ , что бывает при сравнительно меньших  $\psi$ .

Найдем теперь, как должны быть связаны между собой  $g$  и  $D$ , чтобы состояние конденсата могло стать неустойчивым для каких-либо  $\psi^2 > D$ . Если взять плотность конденсата в виде  $\psi^2 = D + \alpha g$  с произвольным  $\alpha$ , можно убедиться, что условие  $k_0^2 \geq 0$  сводится к неравенству типа  $\sum_{n=0}^N c_n(\alpha) g^n D^{N-n} \geq 0$ . Поскольку в его левой части стоит симметричный многочлен, решения, если они существуют, имеют вид  $a_1(\alpha)g < D < a_2(\alpha)g$ , где  $a_{1,2}(\alpha)$  – какие-то числа. На рис. 2 показан результат для  $\alpha = 1/2$ : область

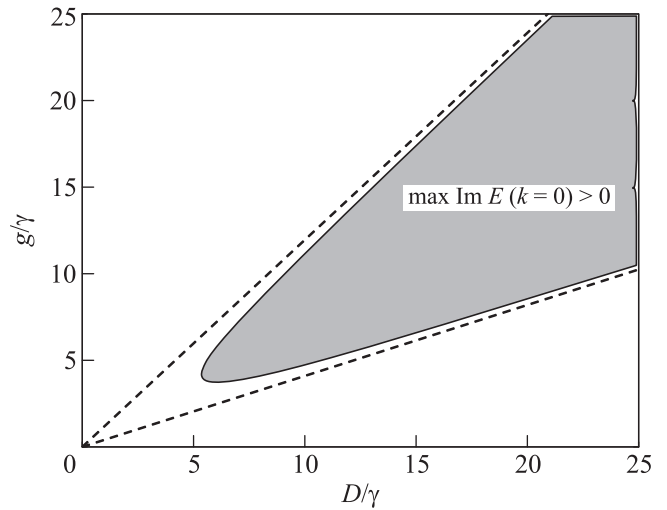


Рис. 2. Параметры  $D$  и  $g$ , при которых возможно поляритон-поляритонное рассеяние второго вида. Плотность конденсата  $\psi^2 = D + g/2$ . Пунктирные прямые ограничивают область, в которой  $Q < 0$  для каких-либо  $k$ . Заштрихована неустойчивая область для  $k = 0$

с  $Q < 0$  ограничена двумя прямыми. При этом условие  $Q < 0$  необходимо, но не достаточно для появления неустойчивости. В общем случае нужно, чтобы мнимая часть  $\lambda$  не просто стала положительной, а превзошла  $\gamma$ , тогда получается  $\text{Im } E > 0$ , согласно второму из определений (9). “Настоящая” область неустойчивости для  $\psi^2 = D + g/2$  и  $k = 0$  на рисунке заштрихована. Попутно мы находим, что возможность спонтанного рассеяния в состоянии с  $k = 0$  и  $|\text{Re } E_{1,2} - E_p| \gtrsim D$  открывается начиная с  $g/\gamma \approx 4$ .

Отметим, что в процессах рассеяния первого вида все пары распадных мод с  $\lambda^2 < 0$  спектрально вырождены ( $\text{Re } E = E_p$ ), если, как в нашем случае, планарный импульс конденсата равен нулю. Сама конденсатная мода тоже может иметь  $\lambda^2 < 0$ ; именно поэтому неустойчивы все решения с  $\gamma < \psi^2 < D$  [25, 26] и спонтанно разрушаются спин-симметричные состояния. В процессе второго вида вырождение снято:

распадные моды могут быть расщеплены больше чем на  $2D$ , имея при этом тот же импульс, как и у самого конденсата, что было в принципе невозможно ранее. Кроме того, хотя поляритоны с антипараллельными спинами не взаимодействуют парно, даже чисто циркулярно поляризованный конденсат может теперь распадаться на состояния с другой поляризацией. Например, степень циркулярной поляризации для нижней распадной моды на рис. 1 приблизительно равна  $-0.6$ .

**Перспективы.** Если конденсат устойчив, надконденсатные моды существуют в том смысле, что они могут заполняться за счет флуктуаций. Они также могут возбуждаться извне или проявлять себя как сравнительно долговременный остаточный эффект после быстрых переходов между ветвями устойчивости в бистабильной системе [21, 22]. Неустойчивость же может интерпретироваться по-разному. Боголюбов нашел, что для сверхтекучей жидкости асимптотическая неустойчивость равносильна выходу из термодинамического равновесия [17]. В случае изначально неравновесных поляритонных систем возникшая неустойчивость определяет точки перехода между разными стационарными состояниями конденсата, хотя предсказать, к какому новому состоянию конденсат придет в результате, иногда бывает очень трудно, так как допущение о малости распадных мод перестает действовать [25]. Но поскольку время жизни конечно, а накачка постоянна, само существование нового устойчивого состояния никогда не подвергалось сомнению для внутренне однородной поляритонной системы, возбуждаемой плоской электромагнитной волной. Считалось, что такая система должна быть “подчинена” накачке, адиабатически следовать за ее изменениями, и лишь в особых точках с  $\text{Im} E(\psi(f)) > 0$  допускались скачки между ветвями устойчивости. Так, если “спин-симметричное” состояние конденсата оказывалось неустойчивым, то подразумевался переход в эллиптически поляризованное состояние [11–13].

В этой работе мы нашли, что и состояние с нарушенной спиновой симметрией становится неустойчивым из-за нового процесса рассеяния, который проанализирован подробно. Полное отсутствие устойчивых одномодовых состояний конденсата доказывается путем численного решения стационарных уравнений (2) и подстановкой получившихся  $\bar{\psi}_{\pm}$  в систему (8), после чего околосостояния возбуждения анализируются так же, как здесь это было проделано для приближенного решения с  $\bar{\psi}_{-} = 0$ . В результате получается, что если  $D$  и  $g$  связаны, как показано на

рис. 2, то в конечном интервале амплитуд накачки устойчивых одномодовых решений нет. Тем самым “от противного” приходим к совершенно новой ситуации, когда неизбежны либо нарушение пространственной симметрии конденсата с  $k = 0$ , т.е. появление самоорганизованных неоднородных структур, либо нестационарность системы в строго постоянных внешних условиях.

Упомянем, не вдаваясь в детали, какие именно установившиеся решения получаются в численных экспериментах, часть которых опубликована в [16]. Если система латерально ограничена, то “бездисперсионный” конденсат, не имеющий возможности распадаться на моды с отличными  $k$  из-за размерного квантования, переходит к автоколебаниям или хаосу. Неустойчивые распадные моды с отличающимися частотами предопределяют такие нестационарные решения. Но уже в одномерных системах появляется возможность внутренней стабилизации за счет разделения областей “правого” и “левого” спина в виде периодической жестко упорядоченной пространственной структуры. Наконец, в двумерных системах дальний порядок сохраняется, но перестает быть “жестким” и напоминает скорее турбулентную жидкость, чье состояние может быть хаотично в пространстве и времени.

Выражаю глубокую признательность В.Д. Кулаковскому, С.Г. Тиходеву и Н.А. Гиппиусу. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант #16-12-10538).

1. C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, and Y. Arakawa, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3314 (1992).
2. Y. Yamamoto, T. Tassone, and H. Cao, *Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics*, Springer-Verlag (2000).
3. A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech, and P. Laussy, *Microcavities*, Oxford University Press (2007).
4. C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, and P. Schwendimann, *Phys. Rev. B* **58**, 7926 (1998).
5. A. V. Sekretenko, S. S. Gavrilo, and V. D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **88**, 195302 (2013).
6. N. A. Gippius, I. A. Shelykh, D. D. Solnyshkov, S. S. Gavrilo, Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, S. G. Tikhodeev, and G. Malpuech, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 236401 (2007).
7. S. S. Gavrilo, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, and V. D. Kulakovskii, *JETP* **110**, 825 (2010).
8. T. K. Paraíso, M. Wouters, Y. Léger, F. Morier-Genoud, and B. Deveaud-Plédran, *Nat Mater* **9**, 655 (2010).

9. D. Sarkar, S.S. Gavrilov, M. Sich, J.H. Quilter, R.A. Bradley, N.A. Gippius, K. Guda, V.D. Kulakovskii, M.S. Skolnick, and D.N. Krizhanovskii, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 216402 (2010).
10. C. Adrados, A. Amo, T. C. H. Liew, R. Hivet, R. Houdré, E. Giacobino, A.V. Kavokin, and A. Bramati, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 216403 (2010).
11. S.S. Gavrilov, A.V. Sekretenko, S.I. Novikov, C. Schneider, S. Höfling, M. Kamp, A. Forchel, and V.D. Kulakovskii, *APL* **102**, 011104 (2013).
12. A.V. Sekretenko, S.S. Gavrilov, S.I. Novikov, V.D. Kulakovskii, S. Höfling, C. Schneider, M. Kamp, and A. Forchel, *Phys. Rev. B* **88**, 205302 (2013).
13. S.S. Gavrilov, A.S. Brichkin, S.I. Novikov, S. Höfling, C. Schneider, M. Kamp, A. Forchel, and V.D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **90**, 235309 (2014).
14. S.S. Gavrilov, A.V. Sekretenko, N.A. Gippius, C. Schneider, S. Höfling, M. Kamp, A. Forchel, and V.D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **87**, 201303 (2013).
15. S.S. Gavrilov, A.A. Demenev, and V.D. Kulakovskii, *JETP Lett.* **100**, 817 (2014).
16. S.S. Gavrilov, *Phys. Rev. B* **94**, 195310 (2016).
17. N.N. Bogolyubov, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Fiz.* **11**, 77 (1947).
18. N.A. Gippius, S.G. Tikhodeev, V.D. Kulakovskii, D.N. Krizhanovskii, and A.I. Tartakovskii, *EPL* **67**, 997 (2004).
19. S.S. Gavrilov, N.A. Gippius, V.D. Kulakovskii, and S.G. Tikhodeev, *JETP* **104**, 715 (2007).
20. I.A. Shelykh, Y.G. Rubo, and A.V. Kavokin, *Superlattices and Microstructures* **41**, 313 (2007).
21. S.S. Gavrilov, S.I. Novikov, V.D. Kulakovskii, N.A. Gippius, A.A. Chernov, and S.G. Tikhodeev, *JETP Lett.* **101**, 7 (2015).
22. A.S. Brichkin, S.G. Tikhodeev, S.S. Gavrilov, N.A. Gippius, S.I. Novikov, A.V. Larionov, C. Schneider, M. Kamp, S. Höfling, and V.D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **92**, 125155 (2015).
23. R.M. Stevenson, V.N. Astratov, M.S. Skolnick, D.M. Whittaker, M. Emam-Ismael, A.I. Tartakovskii, P.G. Savvidis, J.J. Baumberg, and J.S. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3680 (2000).
24. C. Ciuti, P. Schwendimann, and A. Quattropani, *Semiconductor Science and Technology* **18**, S279 (2003).
25. S.S. Gavrilov, *Phys. Rev. B* **90**, 205303 (2014).
26. S.S. Gavrilov, A.S. Brichkin, Y.V. Grishina, C. Schneider, S. Höfling, and V.D. Kulakovskii, *Phys. Rev. B* **92**, 205312 (2015).