

Контроль магнитным полем субизлучательных состояний системы двух атомов

А. А. Макаров^{+*1)}, В. И. Юдсон^{×°}

⁺Институт спектроскопии РАН, 108840 Троицк, Москва, Россия

^{*}Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

[×]Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, 101000 Москва, Россия

[°]Российский квантовый центр, 143025 Сколково, Россия

Поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.

Предлагается метод создания запутанного метастабильного (субизлучательного) возбужденного состояния в системе двух близко расположенных одинаковых атомов. Вначале система невозбужденных атомов помещается в магнитное поле, направленное под магическим углом $\alpha_0 = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54.7^\circ$ к линии, соединяющей атомы, и имеющее градиент в поперечном направлении. Градиент поля приводит к расстройке частот оптического перехода атомов. Далее производится резонансное лазерное возбуждение атома с большей частотой перехода и последующее адиабатическое выключение градиента магнитного поля. Показано, что при этом возбужденная атомная система с подавляющей вероятностью переходит в запутанное субизлучательное состояние. Анализируются необходимые для реализации этого эффекта требования к спектроскопическим параметрам переходов и скорости изменения градиента магнитного поля.

DOI: 10.7868/S0370274X17030122

Система двух одинаковых атомов с основным $|g\rangle$ и возбужденным $|e\rangle$ состояниями – модель, демонстрирующая эффекты сверх- и субизлучения Дикке (Dicke) [1]. Однократно возбужденные состояния системы являются суперпозициями состояний $|\mathcal{Q}_1\rangle = |e_1g_2\rangle$ и $|\mathcal{Q}_2\rangle = |g_1e_2\rangle$. При этом симметричное состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{Q}_1\rangle + |\mathcal{Q}_2\rangle)$ является сверхизлучающим, распадающимся в два раза быстрее, чем одноатомное состояние $|e\rangle$, а антисимметричное состояние $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathcal{Q}_1\rangle - |\mathcal{Q}_2\rangle)$ является субизлучающим, распадающимся относительно медленно по параметру $(r/\lambda_{eg})^2$, если расстояние r между атомами значительно меньше длины волны λ_{eg} излучения на переходе $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$. Межатомное диполь-дипольное взаимодействие снимает вырождение между этими состояниями, которые в современной литературе называются запутанными [2, 3].

Такая минимальная модель теоретически изучалась (с акцентом на сверхизлучение) в ряде работ (см., например, [4–6] и обзор [3]). Что же касается субизлучательных состояний, то они привлекают особое внимание в связи с потенциальной способностью хранить квантовую информацию на относительно больших временных промежутках. Ярко вы-

раженный эффект субизлучения может быть достигнут в одномерном случае (1D-одномодовый волновод или фотонный кристалл), когда два атома расположены на расстоянии целого или полуцелого числа длин волн оптического перехода, $r = n\lambda_{eg}/2$ [7, 8]. Рассматривалось несколько методов формирования субизлучательного состояния. Например, в упомянутой 1D-конфигурации субизлучающее состояние образуется с вероятностью $\approx 1/2$, если в начальный момент времени возбужден один из атомов. Однако эта схема может быть реализована только для пространственно удаленных атомов. Для 3D-случая двух близко расположенных атомов ($r \ll \lambda_{eg}$) в [9] была рассмотрена схема, использующая лазерные импульсы специальной формы. Интересная (хотя весьма сложная) схема для конструирования одноквантового субизлучательного состояния в ансамбле большого числа атомов была недавно рассмотрена в [10]. Что касается эксперимента, то некоторые свидетельства в пользу изменения скорости спонтанного распада были получены, например, в [11] для ансамбля из большого числа атомов и в [12] для системы двух ионов в ловушке. Наконец, совсем недавно с достоверностью наблюдалось субизлучение от облака холодных атомов [13]. Вклад этого эффекта был малым, но детектируемым по узкому спектру

¹⁾e-mail: amakarov@isan.troitsk.ru

флуоресценции, задержанной на времена, значительно превышающие время сверхизлучения.

В данной статье рассматривается схема создания (с использованием магнитного поля) субизлучательного состояния в системе двух одинаковых, близко расположенных атомов A_1 и A_2 . Для определенности предполагаем, что в основном атомном состоянии $|g\rangle$ полный угловой момент $J = 0$, а в возбужденном $|e\rangle$ имеем $J = 1$. Тогда однократно возбужденные состояния системы являются в общем случае суперпозициями шести состояний:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1^{(-1)} &= |e_1^{(-1)} g_2\rangle, \quad \mathcal{Q}_1^{(0)} = |e_1^{(0)} g_2\rangle, \quad \mathcal{Q}_1^{(+1)} = |e_1^{(+1)} g_2\rangle, \\ \mathcal{Q}_2^{(-1)} &= |g_1 e_2^{(-1)}\rangle, \quad \mathcal{Q}_2^{(0)} = |g_1 e_2^{(0)}\rangle, \quad \mathcal{Q}_2^{(+1)} = |g_1 e_2^{(+1)}\rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

где верхний индекс означает проекцию M углового момента на ось квантования z . Оператор межатомного диполь-дипольного взаимодействия может быть представлен в виде, явно зависящем от угла α между осью квантования z и линией, соединяющей атомы (рис. 1b):

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \frac{(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2)}{r^3} - 3 \frac{(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \mathbf{r})(\hat{\mathbf{d}}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} = \\ &= -\frac{1}{2r^3} \left\{ \frac{3}{2} \sin^2 \alpha (\tilde{d}_1^{(+)} \tilde{d}_2^{(+)} + \tilde{d}_1^{(-)} \tilde{d}_2^{(-)}) + \right. \\ &+ \left(\frac{3}{2} \sin^2 \alpha - 1 \right) (\tilde{d}_1^{(+)} \tilde{d}_2^{(-)} + \tilde{d}_1^{(-)} \tilde{d}_2^{(+)}) + \\ &+ 2(3 \cos^2 \alpha - 1) \tilde{d}_1^{(z)} \tilde{d}_2^{(z)} + \\ &+ \left. \frac{3}{2} \sin 2\alpha \left[(\tilde{d}_1^{(+)} + \tilde{d}_1^{(-)}) \tilde{d}_2^{(z)} + \tilde{d}_1^{(z)} (\tilde{d}_2^{(+)} + \tilde{d}_2^{(-)}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\tilde{d}^{(\pm)} = \tilde{d}^{(x)} \pm i\tilde{d}^{(y)}$. Удобно выразить матричные элементы оператора \hat{U} через скорость Γ спонтанного распада одиночного атома

$$\Gamma = \frac{32\pi^3}{3\hbar\lambda_{eg}^3} \left| \langle e^{(0)} | \tilde{d}^{(z)} | g \rangle \right|^2 \quad (3)$$

и параметр kr , где $k = 2\pi/\lambda_{eg}$. Следуя стандартным соотношениям для матричных элементов векторов [14] и вводя обозначения

$$\langle \mathcal{Q}_1^{(M)} | \hat{U} | \mathcal{Q}_2^{(M')} \rangle = U_r \beta_{MM'}, \quad U_r = \frac{3\Gamma}{4(kr)^3}, \quad (4)$$

получаем

$$\begin{aligned} \beta_{-1,-1} = \beta_{+1,+1} &= 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \alpha, \quad \beta_{00} = 1 - 3 \cos^2 \alpha, \\ -\beta_{-1,0} = -\beta_{0,-1} &= \beta_{0,+1} = \beta_{+1,0} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin 2\alpha, \quad (5) \\ \beta_{-1,+1} = \beta_{+1,-1} &= \frac{3}{2} \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

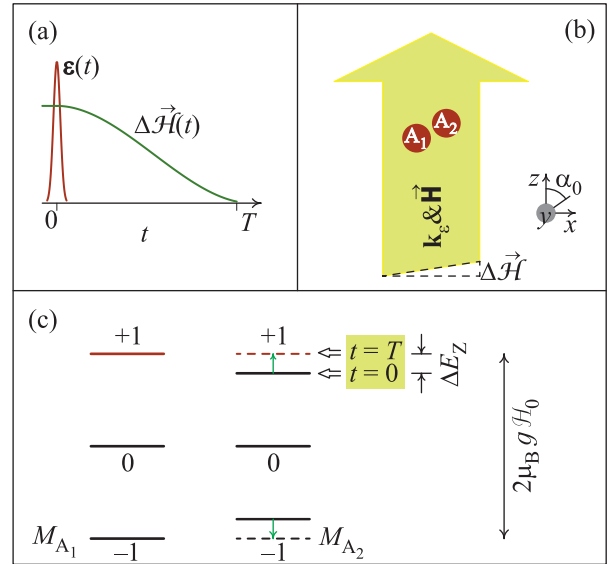


Рис. 1. (Цветной онлайн) К формированию субизлучательного состояния. В начальный момент времени включено магнитное поле с градиентом в поперечном направлении. (a) – Короткий лазерный импульс возбуждает подуровень $M = +1$ атома A_1 , затем градиент магнитного поля выключается с приближенным соблюдением адиабатического режима. (b) – Магнитное поле и лазерный импульс (с круговой поляризацией) направлены вдоль оси z . Атомы расположены в плоскости xz , линия, их соединяющая, направлена под углом α_0 к оси z . (c) – Первоначально возбужден атом с большей частотой перехода; при выключении $\Delta\mathcal{H}$ происходит пересечение уровней атомов и формируется антисимметричное запутанное состояние

Наиболее простой вид матрица $\|\beta\|$ имеет для магического угла $\alpha = \alpha_0 = \arccos(1/\sqrt{3})$ – в этом случае обнуляются матричные элементы β_{MM} (первая строка в (5)), а остальные равны ± 1 . Далее это свойство используется в наших целях.

Предлагаемый в письме сценарий формирования субизлучательного состояния представлен в подписи к рис. 1. Он основан на структуре возбужденных собственных состояний системы двух атомов в приложенном вдоль оси z сильном магнитном поле \mathcal{H} при выборе $\alpha = \alpha_0$ (см. рис. 1b). Если $E_Z = \mu_B g \mathcal{H} \gg U_r$ (E_Z – зеемановское расщепление, μ_B – магнетон Бора, g – фактор Ланде), то (см. рис. 2а, где показаны результаты соответствующего расчета, а также работу [15]):

(i) собственные состояния, симметричные и антисимметричные по перестановке атомов, образуют по три уровня, с хорошо определенным квантовым числом M , т.е. практически сводятся к состояниям $|\mathcal{Q}_{s,a}^{(M)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathcal{Q}_1^{(M)}\rangle \pm |\mathcal{Q}_2^{(M)}\rangle)$;

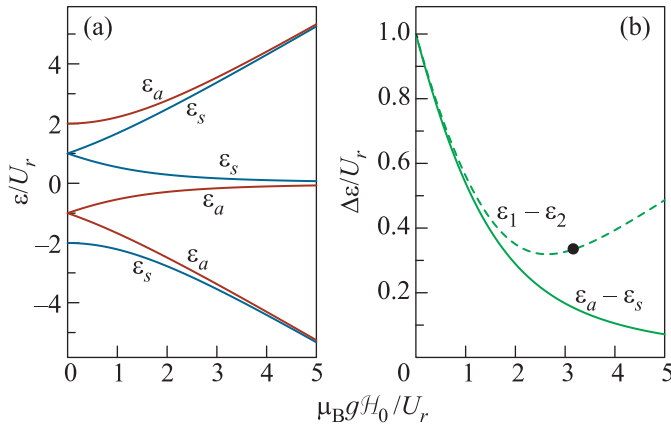


Рис. 2. (Цветной онлайн) Энергии собственных состояний системы двух атомов в зависимости от напряженности магнитного поля, приложенного под магическим углом (см. рис. 1b). (a) – Градиент магнитного поля равен нулю. (b) – Сплошная кривая представляет разность энергий двух верхних уровней на рис. 2a. Штриховая кривая также показывает разность энергий двух верхних уровней, но в присутствии поперечного градиента магнитного поля $\Delta\mathcal{H} = -0.1\mathcal{H}_0$. (Это соотношение, а также точка, отмеченная на кривой, задают значения соответствующих параметров, выбранных для финального численного расчета, – см. рис. 3 и сопутствующий текст)

(ii) энергии уровней во втором порядке теории возмущений по параметру U_r/E_Z даются следующими формулами:

$$\epsilon_{s,a}^{(0)} \approx \pm \frac{2U_r^3}{E_Z^2}, \quad \epsilon_{s,a}^{(M)} \approx M \left(E_Z + \frac{3U_r^2}{2E_Z} \right) \mp \frac{U_r^3}{E_Z^2}, \quad (6)$$

где во второй формуле $M = \pm 1$, и для которой величину

$$U_r^3/E_Z^2 = V_{\text{rsd}} \quad (7)$$

уместно рассматривать как *эффективный* недиагональный матричный элемент *остаточного* диполь-дипольного взаимодействия, осуществляющего расщепление пары состояний $|\mathcal{Q}_{1,2}^{(M)}\rangle$ на $|\mathcal{Q}_{s,a}^{(M)}\rangle$.

Далее, как показано на рис. 1с, нас интересует пара верхних состояний²⁾ (с $M = 1$), и в начальный момент процедуры присутствует градиент $\Delta\mathcal{H}$ магнитного поля в поперечном направлении, такой, что разность зеемановских сдвигов (см. рис. 2b) удовлетворяет неравенствам

$$\Delta E_Z \gg \frac{U_r^3}{E_Z^2}, \quad \Delta E_Z \gg \Gamma. \quad (8)$$

Благодаря первому из неравенств (8), становится принципиально возможным *селективно возбудить*

²⁾ Также возможно использование пары нижних состояний с $M = -1$.

один из атомов, а, благодаря второму из неравенств (8), сделать это возможно за время τ_ϵ , значительно короче времени спонтанного распада. Подчеркнем: чтобы при адиабатическом выключении $\Delta\mathcal{H}$ система переходила в антисимметричное состояние, возбуждать нужно *верхний* уровень, т.е. в данном случае $M = 1$ атома с *большим* зеемановским сдвигом; следует это требование из взаимного расположения ϵ_a и ϵ_s для $M = 1$ на рис. 2a.

Далее необходимо ответить на два вопроса, относящиеся к процессу выключения градиента магнитного поля:

(I) каким должно быть соотношение между скоростью уменьшения $\Delta\mathcal{H}$ и величиной V_{rsd} (7), характеризующей *остаточное* диполь-дипольное взаимодействие?

(II) насколько может быть обеспечена малость полного времени T изменения $\Delta\mathcal{H}$ по сравнению с временем спонтанного распада Γ^{-1} ?

Соответствующие оценки можно получить аналитически в рамках двухуровневой модели (в нашем случае $|\mathcal{Q}_1^{(+1)}\rangle$ и $|\mathcal{Q}_2^{(+1)}\rangle$), в которой расстояние между уровнями зависит от времени. Амплитуды вероятности для двух уровней модели обозначаем как $a_1(t)$ и $a_2(t)$ соответственно. Из временного уравнения Шредингера с гамильтонианом $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U} + \mu\mathcal{H}(t)$ имеем систему уравнений

$$\frac{da_1}{dt} = -iV_{\text{rsd}}a_2, \quad \frac{da_2}{dt} = -i\epsilon(t)a_2 - iV_{\text{rsd}}a_1, \quad (9)$$

где зависящая от времени разность энергий есть $\epsilon(t) = \mu_B g \Delta\mathcal{H}$. Для предварительной оценки воспользуемся решением системы (9), которое может быть получено аналитически в случае линейной по времени зависимости $\epsilon(t) = \kappa t$ [16]. Из этого решения следует, что при выполнении неравенства

$$\mathcal{N}_{\text{ad}} = \frac{V_{\text{rsd}}^2}{\kappa} \gg 1 \quad (10)$$

вероятность неадиабатического перехода при изменении ϵ до пересечения уровней оценивается, как $\sim \exp(-\pi\mathcal{N}_{\text{ad}})$. Отсюда следует ответ на вопрос (I). Что касается положительного ответа на вопрос (II), то требуется выполнение неравенства

$$\frac{\Gamma \Delta E_Z}{\kappa} \ll 1, \quad (11)$$

эквивалентного $\Gamma T \ll 1$, где $T = \Delta E_Z/\kappa$ – время изменения магнитного поля. Чтобы одновременно удовлетворить условиям (10) и (11), должно с запасом выполняться неравенство

$$V_{\text{rsd}}^2 \gg \Gamma \Delta E_Z \quad (12)$$

и, поскольку по смыслу задачи $\Gamma \ll V_{\text{rsd}} \ll \Delta E_Z$, ясно, что предлагаемый сценарий может быть, в принципе, осуществлен только в ситуации, когда скорость спонтанного распада на несколько порядков меньше величины ΔE_Z . Рис. 3 демонстрирует возможность одновременного выполнения перечисленных условий

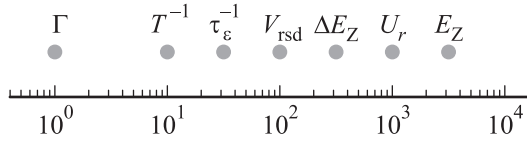


Рис. 3. Иллюстрация к выбору параметров задачи (все в единицах Γ). Этот выбор позволяет удовлетворить сформулированным в тексте условиям. Видно, например, что при $\sqrt{\Delta E_Z/T} \lesssim V_{\text{rsd}} \lesssim \Delta E_Z$ параметр адиабатичности $\mathcal{N}_{\text{ad}} = V_{\text{rsd}}^2 T / \Delta E_Z$ больше единицы. Также отметим, что соотношение между U_r и Γ обусловлено значением расстояния между атомами; так, в приведенной шкале $kr \sim 0.1$, а для больших расстояний шкала должна быть сжата, чтобы обеспечить приемлемое значение \mathcal{N}_{ad}

(8), (10)–(12), но можно видеть, что рамки допустимых взаимных изменений параметров ограничены.

Численный расчет позволяет оценить, насколько вероятность образования субблиздательного состояния может быть близка к единице. Форма возбуждающего лазерного импульса взята гауссовой

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{4t^2}{\tau_\epsilon^2}\right) \cos \omega t \quad (13)$$

с оптимальным значением амплитуды \mathcal{E}_0 электрической компоненты (близость к π -импульсу). Частота излучения ω близка к резонансу с переходом $|g_1 g_2\rangle \rightarrow |e_1^{(+1)} g_2\rangle$, – она оптимизирована с учетом поправок, связанных с диполь-дипольным взаимодействием и динамическим штарк-эффектом. Функция, описывающая изменение расстояния между уровнями в уравнениях (9), взята в виде

$$\epsilon(t) = -\Delta E_Z \left\{ 3 \left[1 - \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] - 2 \left[1 - \left(\frac{t}{T} \right)^3 \right] \right\}, \quad (14)$$

чтобы избежать скачков производной на концах интервала $(0, T)$ (см. рис. 1а). В расчете учитывались основное состояние и все 6 возбужденных уровней, использовались уравнения для элементов матрицы плотности, а значения параметров были взяты в соответствии со шкалой на рис. 3. Для простоты интерпретации конечного результата удобно работать в базисе состояний $|\mathcal{Q}_{s,a}^{(M)}\rangle$. В этом базисе верхнее состояние на рис. 1с, которое возбуждается лазерным

импульсом с круговой поляризацией, является суперпозицией

$$|\mathcal{P}\rangle = \sum b_{s,a}^{(M)} |\mathcal{Q}_{s,a}^{(M)}\rangle. \quad (15)$$

Энергии собственных состояний показаны на рис. 2b (штриховая кривая), а коэффициенты разложения $b_{s,a}^{(M)}$ при заданных (см. рис. 3) соотношениях между E_Z , U_r и ΔE_Z приведены во второй строке табл. 1. Некоторые характеристики, относящиеся к базисным состояниям, обозначены в 1-й строке. В 3-й строке показаны значения диагональных элементов матрицы плотности в момент времени $t = T$, когда градиент магнитного поля становится равным нулю. Отсюда скорость распада возбуждаемого состояния составляет величину $2\Gamma \sum_M |b_s^{(M)}|^2 \approx 0.5\Gamma$.

Результат расчета состоит в следующем. Значения диагональных элементов матрицы плотности в момент времени $t = T$ (когда градиент магнитного поля становится равным нулю) приведены в третьей строке табл. 1. Дальнейшая эволюция сводится к распаду симметричных компонент за время порядка $(2\Gamma)^{-1}$, а антисимметричные компоненты (суммарная доля которых составляет³⁾ около 95%) распадаются при $kr \ll 1$ значительно медленнее – со скоростью $\approx \frac{1}{6}(kr)^2 \Gamma$ [15].

Таблица 1. Характеристики, коэффициенты и элементы матрицы

$ i\rangle$	$g_1 g_2$	$\mathcal{Q}_s^{(-1)}$	$\mathcal{Q}_s^{(0)}$	$\mathcal{Q}_s^{(+1)}$	$\mathcal{Q}_a^{(-1)}$	$\mathcal{Q}_a^{(0)}$	$\mathcal{Q}_a^{(+1)}$
b_i	–	–0.06	–0.12	–0.48	–0.16	–0.26	0.80
ρ_{ii}	0.054	$\sum_i \rho_{ii} \ll 10^{-2}$			0.031	0.087	0.824

Рассмотрим теперь конкретный пример – атом ^{138}Ba с нулевым спином ядра и основным состоянием 6^1S_0 с угловым моментом $J_g = 0$. В качестве возбужденного состояния выбираем 6^3P_1 с угловым моментом $J_e = 1$. Скорость спонтанного радиационного перехода $6^3P_1 \rightarrow 6^1S_0$ на длине волны $\lambda_{eg} \approx 791$ нм составляет $\Gamma \approx 7.4 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}$ [17]. Соотношение между U_r и Γ на шкале рис. 3 задает расстояние между атомами $r \approx 11.4$ нм в соответствии с формулой (4). Характеристики зеемановского расщепления должны в соответствии со шкалой на рис. 3 составлять величины $E_Z \approx 2.3 \cdot 10^9 \text{ c}^{-1}$ и $\Delta E_Z \approx 2.3 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$. Учитывая фактор Ландэ $g \approx 3/2$ для состояния 6^3P_1 и геометрию расположения атомов на рис. 1b, получаем следующие оценки для параметров магнитно-

³⁾Эта доля максимизирована варьированием в расчете амплитуды и частоты возбуждающего импульса (13).

го поля: $\mathcal{H}_0 \approx 180$ Гс и $d\mathcal{H}/dx \approx -1.9 \cdot 10^7$ Гс/см.⁴⁾ Последняя цифра требует комментария: она велика, однако все еще на порядок меньше чем реально достигнутое значение градиента магнитного поля в микромасштабе [18]. Для полноты описания оценим также плотность энергии $\Phi = (c/4\pi) \int \mathcal{E}^2(t) dt$ лазерного импульса, осуществляющего возбуждение системы. Выбрав электрическую составляющую лазерного импульса в форме (13), оптимизируя его амплитуду \mathcal{E}_0 импульса соотношением

$$\hbar^{-1} \langle g_1 g_2 | \hat{d}^{(+)} | \mathcal{P} \rangle \int \mathcal{E}(t) dt \approx \pi \quad (16)$$

(π -импульс с близким к единице поправочным коэффициентом) и подставляя $b_s^{(+1)}$ из табл. 1 в формулу (15), получаем $\Phi \approx 50$ нДж/см².

Итак, в данной статье рассмотрен метод создания субизлучательного (запутанного) состояния в системе двух атомов, основанный на первоначальном лазерном возбуждении одного из атомов и дальнейшего контроля эволюции системы с помощью магнитного поля. Построен модельный пример, оптимизированный по спектроскопическим параметрам и используемым лазерному и магнитному полям. Показано, что при этом точность реализации субизлучательного состояния составляет $\approx 95\%$. Из нашего анализа следует, что наиболее критичным требованием к эксперименту является локализация атомов на расстоянии друг от друга порядка сотых долей длины волны используемого перехода. В этой связи можно отметить одно из последних оригинальных предложений в статье [19], основанное на высокочастотной модуляции оптического поля. В дополнение к лазерным пинцетам и ионным ловушкам, во введении к этой статье дан обзор и других вариантов *субволновой локализации*, рассматриваемых в литературе. Например, в качестве перспективного метода отмечено предложение использовать оптические решетки, основанные на многофотонных оптических переходах [20]. Мы можем отметить также идею фемтосекундной ловушки (см., например, [21]). Вся тема, как прелюдия к новой интересной физике, актуальна и безусловно будет развиваться. Решение задачи

субволновой локализации позволит реализовать метод, предложенный в данной статье.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант # 15-02-05657а).

1. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
2. И. В. Баграгин, Б. А. Гришанин, В. Н. Задков, УФН **171**, 625 (2001).
3. Z. Ficek and R. Tanaš, Phys. Rep. **372**, 369 (2002).
4. R. H. Lehberg, Phys. Rev. A **2**, 889 (1970).
5. P. W. Milloni and P. L. Knight, Phys. Rev. A **10**, 1096 (1974).
6. D.-W. Wang, Z.-H. Li, H. Zheng, and S.-Y. Zhu, Phys. Rev. A **81**, 043819 (2010).
7. А. А. Макаров, В. С. Летохов, ЖЭТФ **124**, 766 (2003).
8. E. S. Redchenko and V. I. Yudson, Phys. Rev. A **90**, 063829 (2014).
9. I. V. Bagratin, B. A. Grishanin, and V. N. Zadkov, Fortschr. Phys. **48**, 637 (2000).
10. M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **115**, 243602 (2015).
11. D. Pavolini, A. Crubellier, P. Pillet, L. Cabaret, and S. Liberman, Phys. Rev. Lett. **54**, 1917 (1985).
12. R. G. DeVoe and R. G. Brewer, Phys. Rev. Lett. **76**, 2049 (1996).
13. W. Guerin, M. O. Araújo, and R. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **116**, 083601 (2016).
14. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматлит, М. (1963), с. 119.
15. А. А. Макаров, Phys. Rev. A **92**, 053840 (2015).
16. P. Horwitz, Appl. Phys. Lett. **26**, 306 (1975).
17. N. D. Scielzo, J. R. Guest, E. C. Schulte, I. Ahmad, K. Bailey, D. L. Bowers, R. J. Holt, Z.-T. Lu, T. P. O'Connor, and D. H. Potterveld, Phys. Rev. A **73**, 010501 (2006).
18. H. J. Mamin, M. Poggio, C. L. Degen, and D. Rugar, Nature Nanotechnology **2**, 301 (2007).
19. S. Nascimbene, N. Goldman, N. R. Cooper, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **115**, 140401 (2015).
20. B. Dubetsky and P. R. Berman, Phys. Rev. A **66**, 045402 (2002).
21. D. N. Yanyshev, V. I. Balykin, Y. V. Vladimirova, and V. N. Zadkov, Phys. Rev. A **87**, 033411 (2013).

⁴⁾Возможно также использование градиента \mathcal{H} в продольном направлении. В этом случае приведенное значение должно быть умножено на $\tan \alpha_0 = \sqrt{2}$.